**ΑΣΚΗΣΗ** Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση των σημάτων $x(t)=u(t)$ και $h(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, όπου $0<\alpha<1$.

**ΛΥΣΗ**

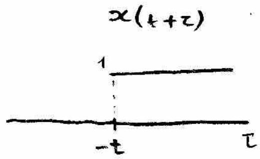
$$\Phi_{xh}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,h(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

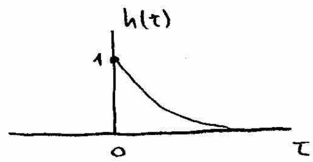
Βήμα 1ο: Γράφουμε τις εξισώσεις $x(t)$, $h(t)$

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{για } t\geq 0\\ 0 & \text{για } t<0\end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & \text{για } t\geq 0\\ 0 & \text{για } t<0\end{cases}$$

Βήμα 2ο: Γράφουμε και σχεδιάζουμε τα $x(t+\tau)$ και $h(\tau)$

$$x(t+\tau)=\begin{cases}1 & \text{για } t+\tau\geq 0 \text{ ή } \tau\geq -t\\ 0 & \text{για } t+\tau<0 \text{ ή } \tau<-t\end{cases} \qquad h(\tau)=\begin{cases}e^{-\alpha\tau} & \text{για } \tau\geq 0\\ 0 & \text{για } \tau<0\end{cases}$$

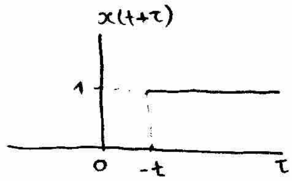


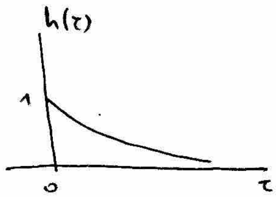




Εδώ δεν έχουμε σχεδιάσει τον κάθετο άξονα γιατί πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν το $t$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του μηδενός.

Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συσχέτισης για διαφορετικά διαστήματα του χρόνου

<u>Περίπτωση 1η:</u> $t<0$

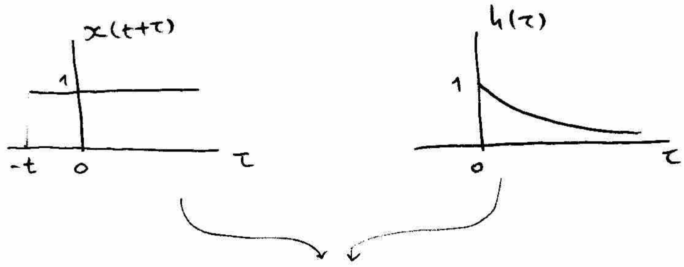



$$x(t+\tau)\,h(\tau)\neq 0 \text{ για } \tau\geq -t$$

$$\phi_{xh}(t) = \int_{-t}^{\infty} 1 \cdot e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{-\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{-t}^{\infty} = \frac{-1}{\alpha}\left(e^{-\infty} - e^{-\alpha(-t)}\right) = \frac{-1}{\alpha}\left(-e^{\alpha t}\right) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

<u>Περίπτωση 2η:</u> $t \geq 0$

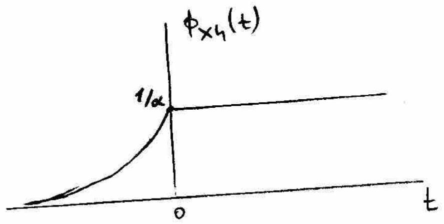



$x(t+\tau)\, h(\tau) \neq 0$ για $\tau \geq 0$

$$\phi_{xh}(t) = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{-\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{-\alpha}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης ισούται με:

$$\phi_{xh}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} & \text{για } t < 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$



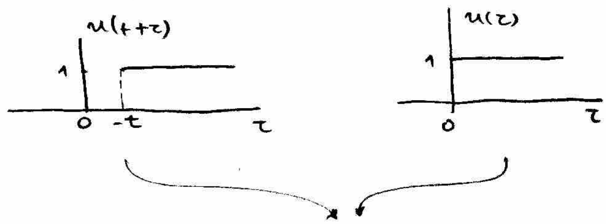
Σημείωση: Θα μπορούσαμε στη σχέση (1) να είχαμε αντικαταστήσει τις συναρτήσεις $x(t+\tau)$ και $h(\tau)$, οπότε:

$$\varphi_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t+\tau)\, e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(t+\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

Τα όρια του ολοκληρώματος καθορίζονται από το γινόμενο $u(t+\tau)u(\tau)$.

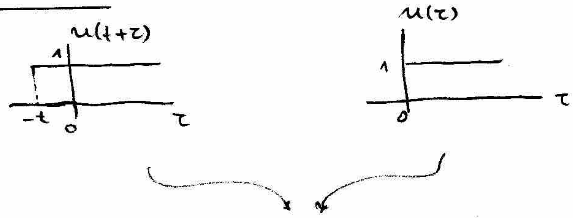

Περίπτωση 1η: $t<0$




$$u(t+\tau)\, u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } \tau \geq -t \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα $\varphi_{xh}(t) = \int_{-t}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{-\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{-t}^{\infty} = \frac{1}{-\alpha}\left(0 - e^{\alpha t}\right) = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha t}$

Περίπτωση 2η: $t \geq 0$




$$u(t+\tau)\, u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{για } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα $\varphi_{xh}(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1}{-\alpha}\, e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{-\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha}$

**ΑΣΚΗΣΗ** Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση των σημάτων $x(n)=u(n)$ και $h(n)=\alpha^n u(n)$, όπου $0<\alpha<1$.

**ΛΥΣΗ**

$$\phi_{xh}(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+l)\,h(l)\,dl=\sum_{l=-\infty}^{\infty} u(n+l)\,\alpha^l u(l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha^l u(n+l)\,u(l) \qquad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογως της τιμής του $n$.

Περίπτωση 1η: $n<0$


$$u(n+l)\,u(l)=\begin{cases}1 & \text{για } l>-n\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Άρα από την (1) έχουμε:

$$\phi_{xh}(n)=\sum_{l=-n}^{\infty}\alpha^l=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l-\sum_{l=0}^{-n-1}\alpha^l=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha}=\frac{1-1+\alpha^{-n}}{1-\alpha}=\frac{\alpha^{-n}}{1-\alpha}$$

Περίπτωση 2η: $n\geq 0$

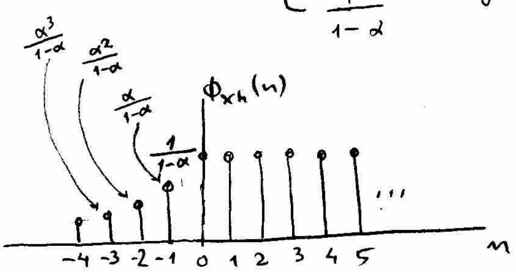

$$u(n+l)\,u(l)=\begin{cases}1 & \text{για } l\geq 0\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$\phi_{xh}(n)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l=\frac{1}{1-\alpha}$$

Τελικά

$$\phi_{xh}(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}\,\alpha^{-n} & \text{για } n<0\\[2ex] \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{για } n\geq 0\end{cases}$$

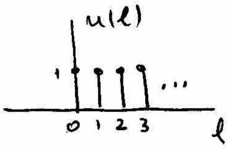


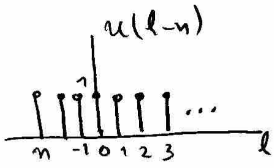
Σημείωση: Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον άλλο ορισμό της συσχέτισης:

$$\phi_{xh}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\, h(l-n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u(l)\, \alpha^{l-n}\, u(l-n) =$$

$$= \alpha^{-n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha^{l}\, \underbrace{u(l)\, u(l-n)}_{?} \qquad (2)$$

<u>Περίπτωση 1η:</u> $n < 0$



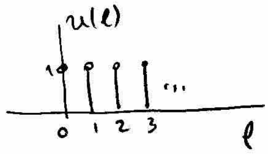



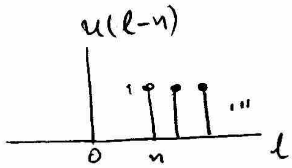

$$u(l)\, u(l-n) = \begin{cases} 1 & \text{για } l \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα από την (2) έχουμε:

$$\phi_{xh}(n) = \alpha^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{l} = \alpha^{-n} \frac{1}{1-\alpha}$$

<u>Περίπτωση 2η:</u> $n \geq 0$




$$u(l)\, u(l-n) = \begin{cases} 1 & \text{για } l \geq n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\phi_{xh}(n) = \alpha^{-n} \sum_{l=n}^{\infty} \alpha^{l} = \alpha^{-n} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{l} - \sum_{l=0}^{n-1} \alpha^{l} \right] = \alpha^{-n} \left[ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^{n}}{1-\alpha} \right] =$$

$$= \alpha^{-n} \left( \frac{1-1+\alpha^{n}}{1-\alpha} \right) = \alpha^{-n} \frac{\alpha^{n}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Τελικά $$\phi_{xh}(n) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\alpha^{-n} & \text{για } n < 0 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{για } n \geq 0 \end{cases}$$

**ΑΣΚΗΣΗ** Έστω $x(t)$ ένα πραγματικό σήμα με μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$.

Ως <u>αναλυτικό σήμα</u> (analytic signal) του σήματος $x(t)$ ορίζεται το σήμα:

$$x_a(t) = x(t) + j\,\hat{x}(t) \quad \text{όπου } \hat{x}(t) \text{ ο μετασχ. Hilbert του } x(t).$$

α. Ποιος ο μετασχ. Fourier του αναλυτικού σήματος;

β. Για το σήμα $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ να υπολογιστεί το αναλυτικό σήμα καθώς και ο μετασχ. Fourier αυτού. Δίνεται ότι $\Omega_0 > 0$

**ΛΥΣΗ** α.

$$x_a(t) = x(t) + j\,\hat{x}(t)$$

$$\Big\downarrow F$$

$$X_a(\Omega) = X(\Omega) + j\, F\{\hat{x}(t)\} =$$

$$= X(\Omega) + j\left[-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\, X(\Omega)\right] =$$

$$= X(\Omega) + \mathrm{sgn}(\Omega)\, X(\Omega) \qquad (1)$$

Άρα
$$X_a(\Omega) = \begin{cases} 2X(\Omega) & \text{για } \Omega > 0 \\ 0 & \text{για } \Omega < 0 \end{cases}$$

β. Για $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ το αναλυτικό σήμα είναι

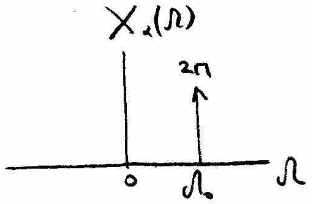
$$x_a(t) = x(t) + j\,\hat{x}(t) =$$

$$= \cos(\Omega_0 t) + j\,\sin(\Omega_0 t) = \langle \text{Euler} \rangle$$

$$= e^{j\Omega_0 t}$$

$$\Big\downarrow F$$

$$X_a(\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0)$$




Στη σχέση αυτή θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και από την (1) λαμβάνοντας υπόψη ότι $X(\Omega) = F\{x(t)\} = F\{\cos(\Omega_0 t)\} = \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$

Δηλαδή

$$X_a(\Omega) = X(\Omega) + \mathrm{sgn}(\Omega)\, X(\Omega) =$$

$$= \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] + \mathrm{sgn}(\Omega)\cdot \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0) + \mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0) + \underbrace{\mathrm{sgn}(\Omega_0)}_{1}\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \underbrace{\mathrm{sgn}(-\Omega_0)}_{-1}\,\delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0) + \delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)\right] =$$

$$= 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2.2** Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα $x(n)=\{2,1,-1,-2\}$.

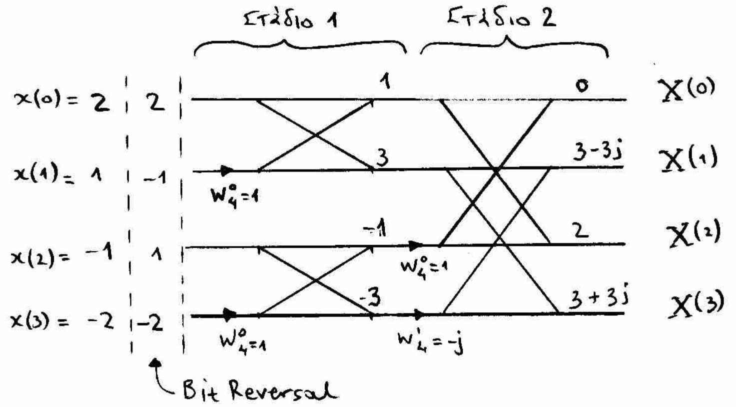
α. Να υπολογίσετε τον 4-σημείων FFT $X_4(k)$, μέσω του διαγράμματος DIT των πεταλούδων. Να σημειώσετε τα αποτελέσματα των υπολογισμών σας σε κάθε κόμβο και στάδιο του διαγράμματος.

β. Να υπολογίσετε τον 8-σημείων FFT $X_8(k)$ μέσω Python/Matlab/Octave.

γ. Να υπολογίσετε τη γραμμική συνέλιξη $x(n)*h(n)$, όπου $h(n)=\{\underline{1},-1\}$ μέσω του FFT. Να ελέγξετε την ορθότητα του αποτελέσματος μέσω της απευθείας γραμμικής συνέλιξης. (Να επισυνάψετε τους κώδικες που αναπτύξατε για τους υπολογισμούς).

**ΛΥΣΗ**

α.




$X(k)=\{0,\ 3-3j,\ 2,\ 3+3j\}$

β.

```
x=[2 1 -1 -2];
X= fft(x,8);
```

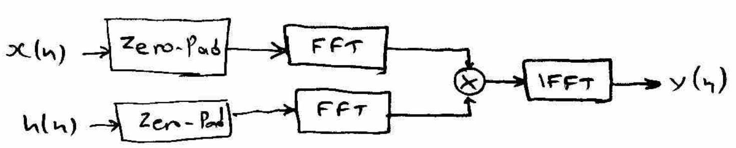
$X(k)=\{0,\ 4.1213+1.7071j,\ 3-3j,\ -0.1213-0.2929j,\ 2,\ -0.1213+0.2929j,\ 3+3j,\ 4.1213-1.7071j\}$

γ. Η γραμμική συνέλιξη του $x(n)$ μήκους $N_1=4$ με το $h(n)$ μήκους $N_2=2$ θα μας δώσει ως αποτέλεσμα ένα σήμα $y(n)=x(n)*h(n)$ μήκους $N=N_1+N_2-1=5$, το εξής:

```
y(n)=conv(x,h);
```

$y(n)=\{2,\ -1,\ -2,\ -1,\ 2\}$

Για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη μέσω του FFT, θα πρέπει να επεκτείνουμε τις ακολουθίες $x(n)$, $h(n)$ προσαρτώντας μηδενικά στο τέλος τους, ώστε να αποκτήσουν μήκος 8 στοιχείων η καθεμιά, να υπολογίσουμε τον FFT καθεμιάς, να κάνουμε πολ/μό των αποτελεσμάτων στοιχείο-προς-στοιχείο, και τέλος να υπολογίσουμε τον αντίστροφο FFT του αποτελέσματος.



Κώδικας Matlab για τον υπολογισμό της συνέλιξης μέσω FFT

```
x=[2 1 -1 -2];
h=[1 -1];

xz=[2  1 -1 -2 0 0 0 0];
hz=[1 -1  0  0 0 0 0 0];

Xz=fft(xz);
Hz=fft(hz);

Yz=Xz.*Hz;

y=ifft(Yz)
```

Αποτέλεσμα:

```
y =

    2.0000   -1.0000   -2.0000   -1.0000    2.0000         0
0    0.0000
```

Εναλλακτικά ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

```
x=[2 1 -1 -2];
h=[1 -1];

y=ifft(fft(x,8).*fft(h,8))
```