

## Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

### Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των ψηφιακών φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (*Finite Impulse Response – FIR*). Επίσης, θα γνωρίσουμε τις δύο πιο σημαντικές μεθόδους σχεδίασής τους και θα αναλύσουμε εκτενώς τη μέθοδο των παραθύρων. Τα FIR φίλτρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος λόγω δύο πολύ σημαντικών ιδιοτήτων που παρουσιάζουν, και τις οποίες επίσης θα εξετάσουμε εδώ: τη γραμμική απόκριση φάσης και την ευστάθεια.

### Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Σχεδιάζετε τη γενική δομή ενός FIR ψηφιακού φίλτρου
- Γνωρίζετε τα πλεονεκτήματά τους, για τα οποία άλλωστε και τα χρησιμοποιούμε
- Καθορίζετε τις προδιαγραφές ενός FIR φίλτρου
- Υπολογίζετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου
- Κατανοείτε το ρόλο της γραμμικής απόκρισης φάσης στη διατήρηση της μορφής του σήματος
- Υπολογίζετε την απόκριση φάσης στα φίλτρα αυτά
- Σχεδιάζετε ένα FIR φίλτρο με τη μέθοδο των παραθύρων
- Εξηγείτε τι είναι βέλτιστο φίλτρο και σε τι πλεονεκτεί η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων σε σχέση με εκείνη των παραθύρων
- Επιλέγετε την απαιτούμενη ακρίβεια των συντελεστών του FIR φίλτρου για να επιτευχθούν τα επιθυμητά χαρακτηριστικά

### Έννοιες κλειδιά

- Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
- Συμμετρική κρουστική απόκριση

- Γραμμική απόκριση φάσης
- Ευστάθεια των FIR φίλτρων
- Μέθοδος σχεδίασης με παράθυρα
- Συνάρτηση παραθύρου
- Φάσμα παραθύρου
- Φαινόμενο Gibbs
- Βέλτιστο φίλτρο
- Υλοποίηση γραμμικής απόκρισης φάσης
- Κβάντιση των συντελεστών

### Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν πεπερασμένη χρονική διάρκεια απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας κρούσης. Στη διεθνή βιβλιογραφία τα συναντούμε ως *Finite Impulse Response* ή *FIR* φίλτρα. Αποτελούν ουσιαστικά μερική περίπτωση των φίλτρων άπειρης κρουστικής απόκρισης (*IIR*). Από τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα, προτιμούνται συνήθως τα *FIR* έναντι των *IIR*, λόγω της ευστάθειας στη λειτουργία τους και της γραμμικής απόκρισης που παρουσιάζουν στη φάση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τα είδη και τα χαρακτηριστικά των *FIR* φίλτρων και θα μελετήσουμε τη μέθοδο σχεδίασης τους με τα παράθυρα. Τέλος, θα περιγράψουμε δομές υλοποίησης των *FIR* φίλτρων, καθώς και τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την υλοποίηση αυτή. Απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο αποτελεί η ύλη του προηγούμενου κεφαλαίου.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τις ακόλουθες ενότητες:

- 4.1 Χαρακτηριστικά των *FIR* φίλτρων
- 4.2 Τύποι και προδιαγραφές των *FIR* φίλτρων
- 4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των *FIR* φίλτρων
- 4.4 Θέματα υλοποίησης *FIR* φίλτρων

### 4.1 Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων

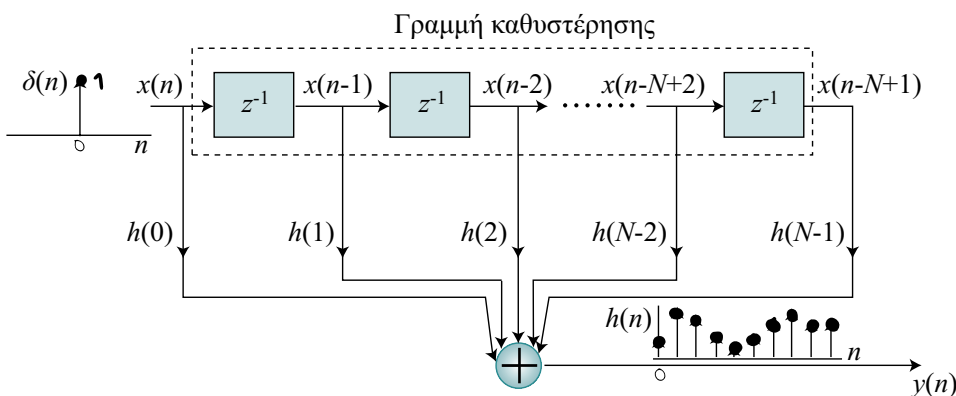
Η γενική δομή των FIR φίλτρων έχει όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Αποτελείται από μία γραμμή καθυστέρησης (delay line), όπου ολισθαίνουν τα δείγματα του σήματος εισόδου  $x(n)$ , και από τους πολλαπλασιαστές  $h(m)$ . Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο του φίλτρου  $y(n)$ . Είναι προφανές ότι η έξοδος  $y(n)$  είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δειγμάτων εισόδου  $x(n)$ :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (4.1)$$

Αν το σήμα εισόδου στο FIR φίλτρο είναι η μοναδιαία κρούση  $\delta(n)$ , τότε η έξοδος του (κρουστική απόκριση του φίλτρου ή Impulse Response) θα είναι διαδοχικά ίση με κάθε έναν από τους συντελεστές  $h(m)$ . Έτσι, έχουμε πεπερασμένη σε χρονική διάρκεια κρουστική απόκριση  $h(m)$  για τα FIR φίλτρα (Finite Impulse Response). Η εξίσωση διαφορών (4.1) αποτελεί τη σχέση εισόδου–εξόδου του FIR φίλτρου. Επίσης ξέρουμε ότι για τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύει,

$$H(z) \leftrightarrow h(n) \Leftrightarrow H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-m} \quad (4.2)$$

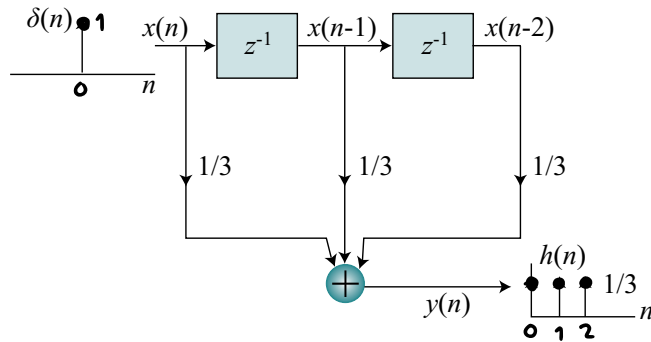
Ο βαθμός  $N$  του φίλτρου χαρακτηρίζεται από το πλήθος των όρων της κρουστικής απόκρισης (πλήθος συντελεστών  $h(m)$ ).



**Σχήμα 4.1**  
Δομή FIR ψηφιακού φίλτρου.

### Παράδειγμα 4.1

Για το FIR φίλτρο του Σχήματος 4.2 να γραφεί η εξίσωση εισόδου–εξόδου και η συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης, να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου.

**Σχήμα 4.2**

Ψηφιακό φίλτρο μέσης τιμής με τρεις όρους.

**Λύση**

Το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι FIR, διότι η κρουστική του απόκριση είναι πεπερασμένης χρονικής διάρκειας (τρεις όροι). Κάθε όρος της κρουστικής απόκρισης είναι ίσος με  $1/3$ , όσο δηλαδή ο αντίστοιχος συντελεστής του φίλτρου. Η εξίσωση εισόδου–εξόδου (εξίσωση διαφορών) είναι η ακόλουθη:

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι ένα ψηφιακό σύστημα μέσης τιμής (averager). Με τη βοήθεια της σχέσης (4.2) η συνάρτηση μεταφοράς έχει ως εξής:

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

**Δραστηριότητα 4.1**

Να σχεδιαστεί ένας απλός ψηφιακός διαφοριστής (digital differentiator). Να γραφεί η σχέση εισόδου–εξόδου, η συνάρτηση μεταφοράς και να σχεδιαστεί η δομή του φίλτρου. Επίσης να σχεδιαστεί η κρουστική του απόκριση.

Ο απλούστερος ψηφιακός διαφοριστής θα έχει έξοδο  $y(n)$  τη διαφορά δύο διαδοχικών δειγμάτων της εισόδου  $x(n)$ . Έτσι η σχέση εισόδου–εξόδου του φίλτρου θα είναι

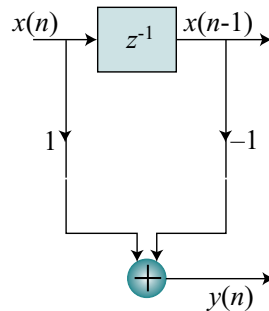
$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογιστεί αν λάβουμε το μετασχηματισμό- $z$  και των δύο μερών της προηγούμενης σχέσης:

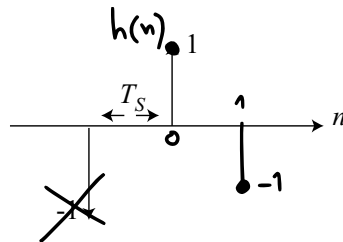
$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-1}$$

Η δομή του φίλτρου είναι πολύ απλή και έχει ως εξής:



Όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρούση, η έξοδος του φίλτρου (κρουστική απόκριση) θα ισούται με τους συντελεστές της αρχικής σχέσης εισόδου–εξόδου, δηλαδή με 1 και  $-1$ . Η μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει ως εξής:



#### 4.1.1 Γραμμική απόκριση φάσης

Ένα φίλτρο έχει γραμμική απόκριση φάσης (linear phase response) όταν η διαφορά φάσης  $\theta(\omega)$  μεταξύ εισόδου και εξόδου για σήμα γωνιακής συχνότητας  $\omega$ , δίνεται ως:

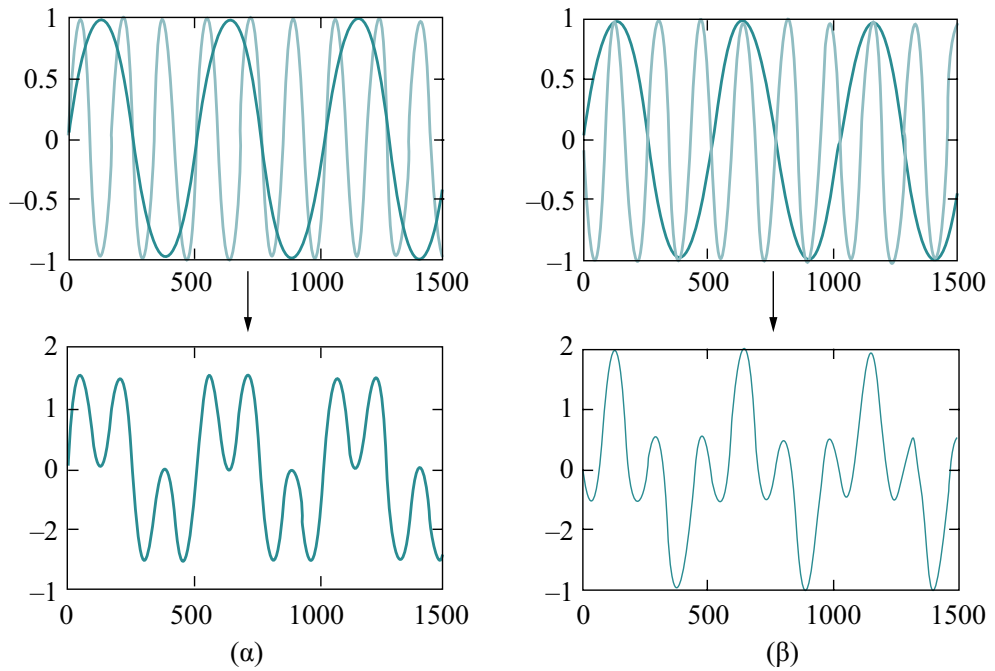
$$\theta(\omega) = -a\omega \quad \text{ή} \quad \theta(\omega) = b - a\omega \quad (4.3)$$

Όπου  $a$  και  $b$  σταθερές που εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου. Όταν οι αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος, διέλθουν από σύστημα που έχει γραμμική απόκριση φάσης σύμφωνα με την (4.3), υπόκεινται όλες στην ίδια χρονική καθυστέρηση ίση με  $a$  sec, με αποτέλεσμα να μην καταστρέφεται η μορφή του σήματος. Αυτό γίνεται φανερό αν σκεφτούμε ότι  $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t - a\omega) = \cos[\omega(t-a)]$ . Στο Σχήμα 4.3α φαίνονται οι δύο αρμονικές συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται ένα σήμα, που έχουν μηδενική διαφορά φάσης για  $t = 0$ , καθώς και η μορφή του σήματος. Το σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.3β αποτελείται από τις ίδιες συνιστώσες, που έχουν όμως υποστεί διαφορετική χρονική καθυστέρηση η μία ως προς την άλλη, έτσι ώστε να έχουν διαφορά φάσης για  $t = 0$  ίση με  $\pi$ . Το αποτέλεσμα είναι ότι η μορφή του

σήματος έχει αλλάξει ριζικά. Παρ' ότι το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος, μία τέτοια αλλαγή θα μπορούσε να έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η μορφή του σήματος (τηλεπικοινωνίες, καρδιογράφημα, εικόνες κτλ.).

**Σχήμα 4.3**

Δύο αρμονικές που δίνουν διαφορετική μορφή για το σύνθετο σήμα ανάλογα με τη μεταξύ τους αρχική διαφορά φάσης. α) Αρχική διαφορά φάσης 0. β) Αρχική διαφορά φάσης  $\pi$ .



Για να έχει ένα FIR φίλτρο την ιδιότητα της γραμμικής απόκρισης φάσης, θα πρέπει να παρουσιάζει κάποιας μορφής συμμετρία στην κρουστική απόκριση  $h(n)$ . Έτσι, έστω ένα FIR φίλτρο με  $N$  όρους στην κρουστική απόκριση  $h(n)$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ), όπου το  $N$  είναι περιττός αριθμός και οι όροι  $h(n)$  παρουσιάζουν τη συμμετρία:

$$h(n) = h(N - n - 1) \quad (4.4)$$

Τότε, το φίλτρο αυτό έχει γραμμική απόκριση φάσης. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την απόκριση συχνότητας του φίλτρου για  $N = 5$ . Θέτουμε στην (4.2)  $z = e^{j\omega}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^4 h(m)e^{-j\omega m} = \\ &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega} [h(0)e^{j2\omega} + h(1)e^{j\omega} + h(2) + h(3)e^{-j\omega} + h(4)e^{-j2\omega}] \\ &= e^{-j2\omega} [h(0)(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h(1)(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + h(2)] \\ &= e^{-j2\omega} [2h(0)\cos(2\omega) + 2h(1)\cos(\omega) + h(2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Το μέτρο της  $H(e^{j\omega})$  είναι η πραγματική ποσότητα μέσα στην αγκύλη. Η φάση της ισούται με τη φάση που δημιουργεί ο όρος  $e^{-j2\omega}$ . Ο υπολογισμός της δίνει  $\theta(\omega) = -2\omega$ . Στη γενική περίπτωση φίλτρων μήκους  $N$  θα είναι  $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$ .

Επομένως ο συντελεστής αναλογίας της σχέσης (4.3) ισούται με  $(N-1)/2$ . Συμπερασματικά, ένα FIR φίλτρο με συμμετρική κρουστική απόκριση και περιττό πλήθος όρων έχει γραμμική φάση, και όπως είδαμε αυτό έχει ως συνέπεια τη χρονική καθυστέρηση όλων των αρμονικών του σήματος κατά  $\frac{N-1}{2}$  δείγματα.

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι FIR φίλτρων γραμμικής φάσης, ανάλογα με το αν το πλήθος  $N$  των συντελεστών της  $h(n)$  είναι άρτιο ή περιττό και αν η  $h(n)$  είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Σε όλες τις περιπτώσεις ο υπολογισμός του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  γίνεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, και αποδεικνύεται ότι η φάση είναι γραμμική.

## Παράδειγμα 4.2

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) για το φίλτρο του παραδείγματος 4.1.

**Λύση**

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^2 h(m)e^{-j\omega m} = \frac{1}{3}[1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] \\ &= \frac{1}{3}e^{-j\omega}[(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[2\cos(\omega) + 1] \end{aligned}$$

Το μέτρο της  $H(e^{j\omega})$  είναι  $\frac{1}{3}[2\cos(\omega) + 1]$ . Η φάση της υπολογίζεται από τη φάση που δημιουργεί ο μιγαδικός  $e^{-j\omega}$ , και η οποία είναι  $\theta(\omega) = -\omega$ .

## Δραστηριότητα 4.2

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) του φίλτρου που περιγράφηκε στην δραστηριότητα 1/ κεφάλαιο 4.

Η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  υπολογίζεται αν στη σχέση  $H(z) = 1 - z^{-1}$  θέσουμε  $z = e^{j\omega}$ :

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}} [e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}] = je^{-j\frac{\omega}{2}} [2 \sin \frac{\omega}{2}]$$

Το μέτρο της  $H(e^{j\omega})$  είναι:

$$|H(e^{j\omega})| = 2 \sin \frac{\omega}{2},$$

ενώ η φάση ισούται με  $\pi/2$  που εισάγει η μιγαδική μονάδα και  $-\omega/2$  από τον εκθετικό όρο:

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

#### 4.1.2 Ευστάθεια των φίλτρων - Πόλοι και μηδενικά

Στα FIR φίλτρα η έξοδος εξαρτάται μόνο από τις τιμές της εισόδου  $x(n-k)$  με  $k = 0, \dots, N-1$ . Καμία καθυστερημένη τιμή της εξόδου  $y(n-k)$  δεν συμμετέχει στον υπολογισμό της. Έτσι η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη και η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου  $H(z)$  που δίνεται από την (4.2) δεν έχει παρονομαστή, επομένως δεν έχει πόλους που δημιουργούν αστάθεια. Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα την ευστάθεια του φίλτρου, που σημαίνει ότι για οποιοδήποτε πεπερασμένο σε πλάτος σήμα εισόδου, η έξοδος είναι επίσης πεπερασμένη σε μέγεθος. Η θέση όπου η  $H(z)$  μηδενίζεται (μηδενικά) μπορεί να καθοριστεί, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται από το φίλτρο πολύ καλή απόρριψη κάποιων από τις αρμονικές συνιστώσες του σήματος.

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.1

Σε ένα FIR φίλτρο η κρουστική απόκριση έχει τους πέντε όρους της ίσους με 0,2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς και γιατί;

- Το φίλτρο χρειάζεται τέσσερις μονάδες καθυστέρησης για την υλοποίησή του.
- Οι συντελεστές του φίλτρου είναι 6.
- Κάθε συντελεστής έχει τιμή 0,3.
- Η καθυστέρηση φάσης που δημιουργεί το φίλτρο είναι  $2\omega$ .
- Για συχνότητα δειγματοληψίας 44,1 kHz η χρονική καθυστέρηση που δημιουργείται σε κάθε αρμονική του σήματος είναι  $2T_s = 50,5$  msec.



### Σύνοψη ενότητας

Τα FIR φίλτρα παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία είναι απαραίτητα στις περισσότερες περιπτώσεις ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Το πρώτο από αυτά, η ευστάθεια, οφείλεται στο γεγονός ότι η έξοδος  $y(n)$  στα FIR φίλτρα υπολογίζεται μόνο από τιμές της εισόδου  $x(n)$ , επομένως τα φίλτρα δεν έχουν κλάδο ανατροφοδότησης. Το άλλο χαρακτηριστικό, η γραμμική απόκριση φάσης, λαμβάνεται όταν η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι συμμετρική.

## 4.2 Τύποι και προδιαγραφές των FIR φίλτρων

Ο τρόπος με τον οποίο κυρίως καθορίζεται αλλά και χρησιμοποιείται ένα ψηφιακό φίλτρο είναι η συμπεριφορά του στη συχνότητα. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από την απόκριση στη συχνότητα του φίλτρου, τόσο σε ό,τι έχει σχέση με την επίδρασή του στο πλάτος των διαφόρων αρμονικών του σήματος (απόκριση πλάτους), όσο και στο τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τη φασική σχέση των αρμονικών (απόκριση φάσης). Δεδομένου ότι η απόκριση στη συχνότητα των ψηφιακών συστημάτων είναι περιοδική, αρκεί να καθοριστεί η συμπεριφορά του ψηφιακού φίλτρου στην περιοχή από 0 ως  $\pi$ .

Η απόκριση φάσης στα FIR φίλτρα μπορεί να είναι γραμμική αν η κρουστική απόκριση  $h(n)$  είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Στην απόκριση μέτρου του φίλτρου ενδιαφέρον παρουσιάζουν τόσο οι αποκλίσεις από την επιθυμητή απόκριση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής, όσο και οι συχνότητες που καθορίζουν τα όρια των ζωνών αυτών. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3, παράγραφος 3.4.5 και ιδιαίτερα στο Σχήμα 3.9. Στο Σχήμα αυτό μπορούμε να διακρίνουμε τις επόμενες παραμέτρους:

- $\delta_p$  είναι η απόκλιση (από τη μονάδα) στη ζώνη διέλευσης
- $\delta_s$  είναι η απόκλιση (από το μηδέν) στη ζώνη αποκοπής
- $\omega_p$  είναι το όριο της ζώνης διέλευσης
- $\omega_s$  είναι το όριο της ζώνης αποκοπής
- $2\pi$  είναι η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας

Το εύρος της ζώνης μετάβασης είναι  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ . Συνήθως τα  $\omega_p$  και  $\omega_s$  ορίζονται ως κλάσματα του  $\pi$ , ενώ οι αποκλίσεις  $\delta_p$  και  $\delta_s$  ορίζονται σε dB μέσω των ποσοτήτων  $20 \log(1 + \delta_p)$  και  $20 \log(\delta_s)$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, ως χαρακτηριστικό σχεδίασης μπορεί να θεωρηθεί το μέγιστο αποδεκτό πλήθος  $N$  των συντελεστών  $h(n)$  του φίλτρου. Οι προηγούμενες προδιαγραφές αφορούν την πραγματική συμπεριφο-

ρά ενός FIR φίλτρου. Όταν τα μεγέθη  $\delta_s$ ,  $\delta_p$  και  $\Delta\omega$  τείνουν στο μηδέν, το απαιτούμενο πλήθος  $N$  των συντελεστών τείνει στο άπειρο και η απόκριση του φίλτρου προσεγγίζει την ιδανική απόκριση (Βλέπε Σχήμα 3.8).

### Παράδειγμα 4.3

Οι προδιαγραφές FIR φίλτρου είναι 0,01 dB κυμάτωση (απόκλιση) στη ζώνη διέλευσης,  $-60$  dBs στη ζώνη αποκοπής,  $\omega_s = 0,4\pi$  και ζώνη μετάβασης ίση με  $0,2\pi$ . Να εξηγήσετε τι ακριβώς σημαίνει καθεμιά από τις προδιαγραφές αυτές.

#### Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει από το φίλτρο να διέρχονται όλες οι συχνότητες μέχρι το  $0,4\pi$ , και να αποκόπτονται όλες οι συχνότητες πάνω από τα  $0,6\pi$ . Η ζώνη μετάβασης βρίσκεται από το  $0,4\pi$  μέχρι το  $0,6\pi$ . Στη ζώνη διέλευσης η απόκλιση από τη μονάδα είναι  $\delta_p$  και προσδιορίζεται από τη σχέση:

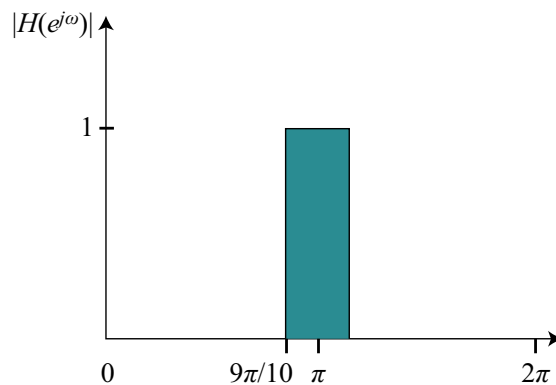
$$20 \log(1 + \delta_p) = 0,01 \Rightarrow \delta_p = 0,001$$

Στη ζώνη αποκοπής ισχύει  $20 \log(\delta_s) = -60 \Rightarrow \delta_s = 1/1000$ . Αυτό σημαίνει ότι μόνο το ένα χιλιοστό από το πλάτος των συχνοτήτων στην περιοχή αυτή διέρχεται από το φίλτρο.

### Δραστηριότητα 4.3

Να σχεδιαστεί η απόκριση μέτρου στη συχνότητα ιδανικού υπερπαρατού φίλτρου με ζώνη διέλευσης το  $1/N$  της συχνότητας Nyquist. Η τιμή του  $N$  είναι δική σας επιλογή.

Η συχνότητα Nyquist είναι ίση με  $\pi$  (μισό της συχνότητας δειγματοληψίας). Έτσι, η ζώνη διέλευσης του υπερπαρατού φίλτρου θα έχει εύρος  $\pi/N$ . Αν επιλέξουμε  $N = 10$ , τότε η απόκριση μέτρου του φίλτρου στη συχνότητα έχει όπως φαίνεται στο επόμενο Σχήμα.



## Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.2

Στην επόμενη πρόταση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Σε ένα ζωνοδιαβατό FIR φίλτρο η ανώτερη συχνότητα αποκοπής είναι:

- Μεγαλύτερη από  $\pi$
- Μικρότερη από  $\pi$
- Μεγαλύτερη από  $2\pi$

### Σύνοψη ενότητας

Οι τύποι των ψηφιακών φίλτρων που μπορούν να σχεδιαστούν ως FIR φίλτρα ποικίλλουν και μπορούν να έχουν όλες τις μορφές όπως βαθυπερατά, ζωνοδιαβατά και υψηπερατά. Επίσης οι προδιαγραφές τους μπορεί να είναι πολύ αυστηρές τόσο στη ζώνη διέλευσης των συχνοτήτων, όσο και στη ζώνη αποκοπής.

### 4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των FIR φίλτρων

Η διαδικασία για τη σχεδίαση FIR φίλτρων περιλαμβάνει τον καθορισμό των προδιαγραφών του φίλτρου, τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου με μία από τις διαθέσιμες μεθόδους, τον καθορισμό της δομής υλοποίησης, την ανάλυση σφαλμάτων λόγω του πεπερασμένου μήκους των συντελεστών καθώς και την επιλογή για υλοποίηση με λογισμικό ή υλικό.

Σημαντικό βήμα στη διαδικασία σχεδίασης των FIR φίλτρων είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές  $h(n)$ , ώστε το φίλτρο να πληροί τις επιθυμητές προδιαγραφές μέτρου και φάσης στη συχνότητα. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι κυρίως οι επόμενες τρεις. Η μέθοδος των παραθύρων (windows method), η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων (optimal method) και η μέθοδος της δειγματοληψίας στη συχνότητα (frequency sampling method). Εδώ θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο των παραθύρων που είναι απλή. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων δίνει την καλύτερη δυνατή απόκριση συχνότητας για συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών. Όλες οι μέθοδοι μπορούν να δώσουν FIR φίλτρα γραμμικής φάσης.

#### 4.3.1 Μέθοδος των παραθύρων

Η μέθοδος των παραθύρων αποτελεί μια σχετικά απλή διαδικασία σχεδίασης FIR φίλτρων. Οι συντελεστές  $h_D(n)$  του ιδανικού φίλτρου υπολογίζονται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας  $H_D(e^{j\omega})$ :

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.6)$$

Το γράμμα  $D$  χρησιμοποιείται για να δηλώσει την επιθυμητή (Desired) ή ιδανική συμπεριφορά.

#### Παράδειγμα 4.4

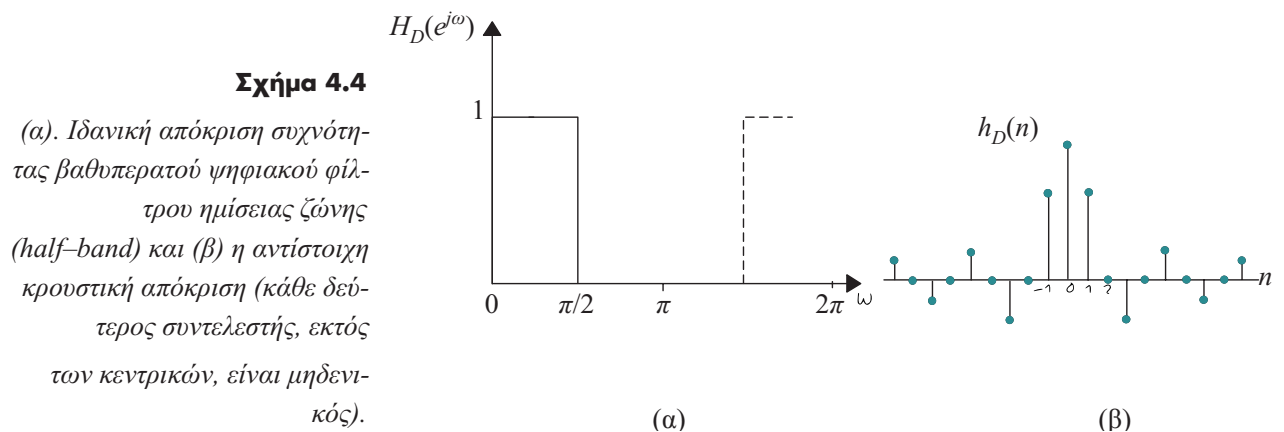
Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c = \pi/2$  (ημίσειας ζώνης ή half-band), του οποίου η ιδανική απόκριση στη συχνότητα δίνεται στο Σχήμα 4.4α.

#### Λύση

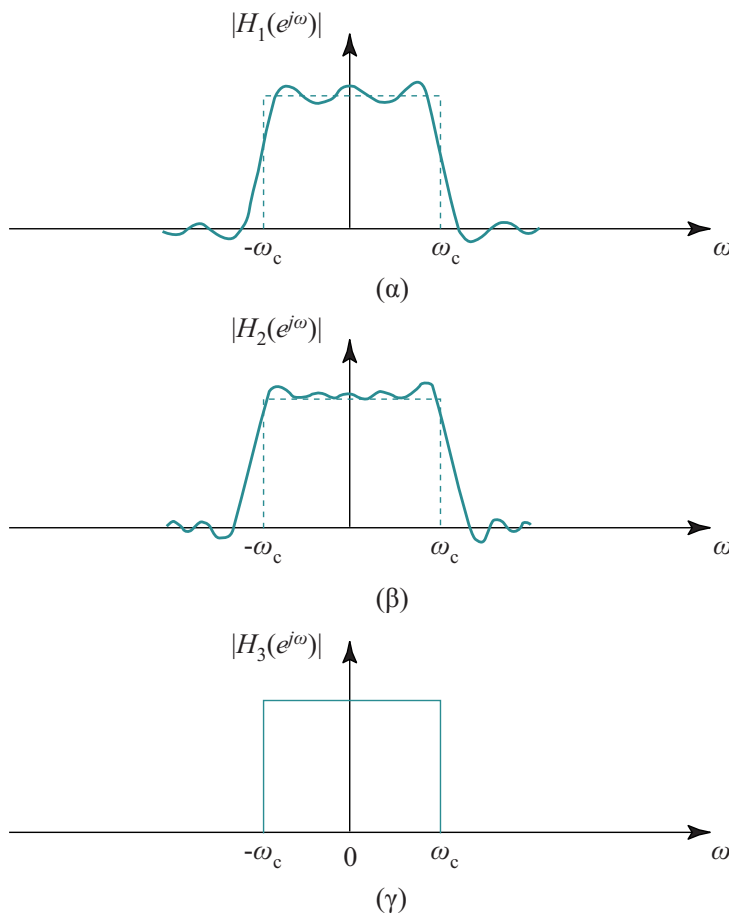
Θεωρούμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα ( $\omega_s = 2\pi$ ). Από τη σχέση (4.6) οι συντελεστές  $h(n)$  υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} h_D(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{\omega_c \sin(n\omega_c)}{\pi n \omega_c} \xrightarrow{\omega_c = \pi/2} \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Η γραφική παράσταση των συντελεστών δίνεται στο Σχήμα 4.4β, από όπου φαίνεται ότι η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική. Επομένως, το φίλτρο θα έχει γραμμική απόκριση φάσης. Από τη σχέση (4.7) είναι φανερό ότι οι όροι  $h_D(n)$  φθίνουν συνεχώς αλλά, δεν μηδενίζονται ποτέ, με αποτέλεσμα η κρουστική απόκριση να είναι άπειρη.



Η αποκοπή της κρουστικής απόκρισης  $h_D(n)$  για  $|n| > M$ , ώστε αυτή να έχει πεπερασμένο μήκος και να διατηρεί τη συμμετρία της, έχει ως αποτέλεσμα να αλλοιωθεί η ζητούμενη ιδανική απόκριση στη συχνότητα. Η αλλοίωση αυτή είναι εμφανής στο Σχήμα 4.5 όπου δείχνονται οι αποκρίσεις στη συχνότητα για κρουστική απόκριση με 13 (Σχήμα 4.5α), 25 (Σχήμα 4.5β) και άπειρους όρους (Σχήμα 4.5γ). Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$ , εμφανίζει κυμάτωση σε όλη την έκταση της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής, ενώ παρουσιάζει διαπλάτυνση της ζώνης μετάβασης. Η εμφάνιση της κυμάτωσης είναι γνωστή ως φαινόμενο *Gibbs*, και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της κοντά στις ασυνέχειες της  $H(e^{j\omega})$ , στην περιοχή της ζώνης μετάβασης. Η μέγιστη αυτή τιμή κυμαίνεται περίπου στο 9% του ύψους της ασυνέχειας και παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από το μήκος  $2M + 1$  της κρουστικής απόκρισης. Για τη ζώνη της αποκοπής η τιμή του 9% αντιστοιχεί σε 21 περίπου dBs εξασθένιση, τιμή που δεν είναι αποδεκτή για πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, για ικανοποιητική προσέγγιση των ιδανικών μορφών των διάφορων φίλτρων, δεν συνιστάται ο απευθείας περιορισμός του μήκους της κρουστικής απόκρισης  $h(n)$ .

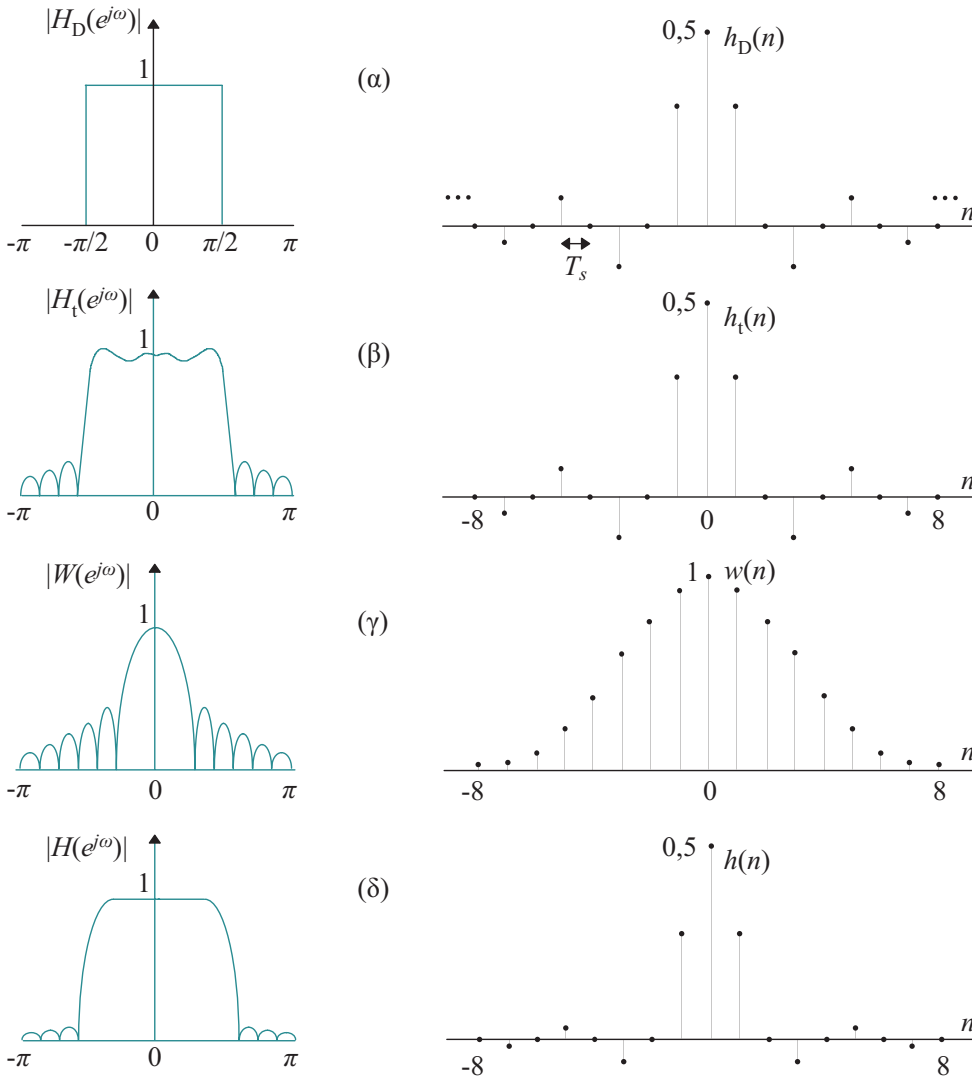


**Σχήμα 4.5**

Απόκριση συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου με (α) 13, (β) 25 και (γ) άπειρους όρους στην κρουστική απόκριση.

Ένας δόκιμος τρόπος, για να πετύχουμε ικανοποιητική προσέγγιση στην απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου, είναι να χρησιμοποιηθεί μια πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών  $w(n)$ , που καλείται *παραθύρο*, για να τροποποιήσει τους συντελεστές  $h_D(n)$  της εξίσωσης (4.7). Η νέα κρουστική απόκριση  $h(n)$  προκύπτει ως το γινόμενο  $h_D(n)w(n)$ . Με τον τρόπο που περιγράφεται στο Σχήμα 4.6 ελέγχονται τα προβλήματα σύγκλισης (φαινόμενο Gibbs) του μετασχηματισμού Fourier στα σημεία ασυνέχειας της  $H(e^{j\omega})$ . Στο Σχήμα 4.6α απεικονίζεται η επιθυμητή απόκριση  $H_D(e^{j\omega})$  του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου ημίσειας ζώνης (half-band). Ακριβώς δίπλα δίνεται η απεριόριστη στο χρόνο κρουστική απόκριση  $h_D(n)$ . Στο επόμενο Σχήμα 4.6β δίνεται η απόκριση  $H_1(e^{j\omega})$ , όπως προκύπτει από την αποκοπή της  $h_D(n)$  για  $M=8$ . Εδώ εμφανίζεται καθαρά το φαινόμενο Gibbs. Ακολούθως, στο Σχήμα 4.6γ, δίνεται το παράθυρο  $w(n)$ , το οποίο είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $-8 \leq n \leq 8$  και μηδέν για  $|n| > 8$ . Στο αριστερό μέρος δίνεται το φάσμα του παραθύρου  $W(e^{j\omega})$ . Στο Σχήμα 4.6δ δίνεται η τελική κρουστική απόκριση  $h(n)$  η οποία προκύπτει από το γινόμενο  $h_1(n)w(n)$ , από πολλαπλασιασμό δηλαδή σημείο προς σημείο των δύο χρονικών ακολουθιών. Η αντίστοιχη τελική απόκριση  $H(e^{j\omega})$  προκύπτει φυσικά από τη συνέλιξη της  $H_1(e^{j\omega})$  με την  $W(e^{j\omega})$ . Στο Σχήμα αυτό έχει μειωθεί αισθητά το φαινόμενο Gibbs, αλλά έχει αυξηθεί η ζώνη μετάβασης του φίλτρου. Η τελική κρουστική απόκριση  $h(n)$  πρέπει να ολισθήσει στο χρόνο για να γίνει αιτιατή (causal), και επομένως φυσικώς πραγματοποιήσιμη (η  $h(n)$  ευρίσκεται όλη στα θετικά  $n$ ). Η χρονική αυτή ολίσθηση πρακτικά αντιστοιχεί στην προσθήκη της γραμμικής απόκρισης φάσης που εισάγουν τα FIR φίλτρα. Αυτό γίνεται ξεκάθαρα από τη σχέση (4.5), όπου ο κοινός παράγοντας που δημιουργεί τη γραμμική απόκριση φάσης έχει προκύψει ακριβώς διότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου έχει γίνει αιτιατή.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι η αύξηση του πλήθους των συντελεστών που προκύπτει όταν το μήκος του παραθύρου είναι μεγαλύτερο, έχει ως αποτέλεσμα να γίνει στενότερη η ζώνη μετάβασης, δηλαδή το φίλτρο πιο απότομο. Από την άλλη, το είδος του χρησιμοποιούμενου παραθύρου θα επηρεάσει την κυμάτωση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.



**Σχήμα 4.6**  
 Γραφική παράσταση του τρόπου εφαρμογής των παραθύρων στη σχεδίαση FIR φίλτρων.

**Δραστηριότητα 4.4**

Με τη βοήθεια της εξίσωσης 4.7, να υπολογίσετε τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c = \pi/N$  ( $N$ -th band ή  $N$ -ζωνικό φίλτρο). Η επιλογή του  $N$  είναι δική σας.

**4.3.2 Ιδιότητες και τύποι των παραθύρων**

Η συνάρτηση  $W(e^{j\omega})$ , που είναι το φάσμα του παραθύρου  $w(n)$ , αποτελείται από έναν κύριο λοβό που περιέχει την περισσότερη φασματική ενέργεια του παραθύρου, καθώς και από παράπλευρους λοβούς που γενικά ελαττώνονται γρήγορα (Σχήμα 4.6γ). Το εύρος της ζώνης μετάβασης του φίλτρου εξαρτάται από το εύρος του κύριου λοβού της  $W(e^{j\omega})$ . Στην τελική  $H(e^{j\omega})$  επιδρούν επίσης οι παράπλευροι λοβοί της  $W(e^{j\omega})$ , εισάγοντας σ' αυτή μικρή κυμάτωση σε όλες τις συχνότητες. Το φάσμα μιας

συνάρτησης παραθύρου πρέπει να έχει στενό κύριο λοβό, ο οποίος να περιέχει όσο το δυνατόν περισσότερη φασματική ενέργεια, με παράπλευρους λοβούς που να φθίνουν γρήγορα. Από τις πλέον γνωστές συναρτήσεις παραθύρων είναι οι ακόλουθες:

A. Το τετραγωνικό παράθυρο (rectangular). Αντιστοιχεί στην απλή αποκοπή της ακολουθίας  $h_D(n)$ . Η ακολουθία βάρους δίνεται από τη σχέση:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (4.8)$$

B. Το γενικευμένο παράθυρο Hamming:

$$w_R(n) = \begin{cases} a + (1-a) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (4.9)$$

Το παράθυρο αυτό για  $a = 0,54$  δίνει το γνωστό παράθυρο Hamming. Για την τιμή αυτή του  $a$ , ο κεντρικός λοβός της  $W(e^{j\omega})$  περιέχει το 99,96% της συνολικής φασματικής ενέργειας, ενώ επιτυγχάνονται  $-52$  dB εξασθένιση στη ζώνη απόρριψης των φίλτρων που σχεδιάζονται. Η μορφή του παραθύρου  $w(n)$  για  $N = 17$  είναι αυτή του Σχήματος 4.6γ.

Η μέθοδος σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα, παρ' ότι απλή, δεν αίρει το βασικό μειονέκτημα των FIR φίλτρων, να απαιτούν πολλούς συντελεστές και, επομένως, αυξημένες απαιτήσεις σε υλικό για την υλοποίησή τους. Με κατάλληλη χρήση του παραθύρου Hamming και άλλων παραθύρων έχει γίνει δυνατή η μείωση του απαιτούμενου υλικού υλοποίησης των φίλτρων.

### Παράδειγμα 4.5

Να δειχθεί γραφικά η επίδραση του πλήθους  $N$  των συντελεστών του παραθύρου Hamming (και κατά συνέπεια του πλήθους των συντελεστών του φίλτρου) στα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης.

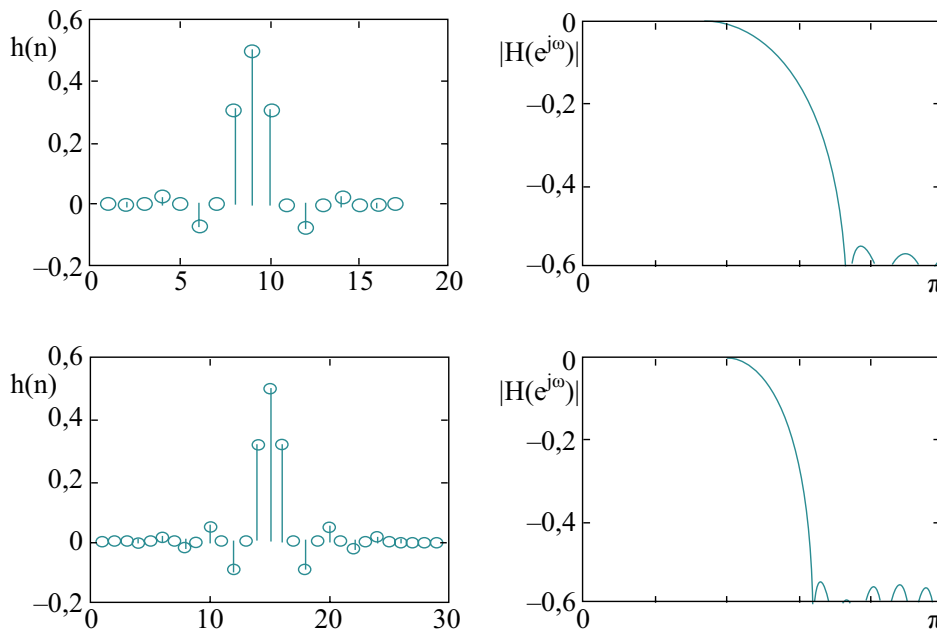
#### Λύση

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.9), έχουμε για τους συντελεστές  $h(n)$  ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης με τη χρήση του παραθύρου Hamming

$$h(n) = h_D(n)w_R(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} \left[ 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$



Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για να σχεδιαστούν δύο FIR φίλτρα, το πρώτο με  $N = 17$  συντελεστές και το δεύτερο με  $N = 29$ . Ο υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας για τα δύο φίλτρα, γίνεται όπως ακριβώς και στη σχέση (4.5). Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4.7 ελήφθησαν με τη βοήθεια του MATLAB και με εφαρμογή της προηγούμενης διαδικασίας. Τα δύο πρώτα Σχήματα, δείχνουν τους συντελεστές του φίλτρου και την απόκριση συχνότητας για  $N = 17$ . Τα δύο επόμενα, παρουσιάζουν το φίλτρο με  $N = 29$  συντελεστές. Από τη σύγκριση των δύο αποκρίσεων στη συχνότητα γίνεται φανερό ότι η αύξηση των συντελεστών του παραθύρου οδηγεί σε πιο μικρή ζώνη μετάβασης (transition band), άρα και πιο απότομο φίλτρο, όχι όμως και σε μεγαλύτερη εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής. Για να πετύχει κάτι τέτοιο ο σχεδιαστής πρέπει να αναζητήσει στη βιβλιογραφία διαφορετικού τύπου παράθυρο.



**Σχήμα 4.7**

Βαθυπερατό FIR φίλτρο σχεδιασμένο με δέκα εφτά και εικοσιεννέα συντελεστές. Στη δεύτερη περίπτωση το φίλτρο είναι πιο απότομο.

### Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.3

Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις, που αφορούν στη σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων, είναι σωστές και γιατί;

1. Η συνάρτηση του παραθύρου επιδρά απευθείας στο φάσμα του σήματος.
2. Το τελικό φίλτρο έχει ευρύτερη ζώνη μετάβασης
3. Το τετραγωνικό παράθυρο που δίνεται από τη σχέση 4.8 έχει σαράντα έναν όρους.
4. Η εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής του φίλτρου εξαρτάται από το είδος του χρησιμοποιούμενου παραθύρου και όχι από το πλήθος των όρων του.

## Δραστηριότητα 4.5

Με τη βοήθεια του παραθύρου Hamming να υπολογιστούν οι συντελεστές του φίλτρου της δραστηριότητας 4 /Κεφάλαιο 4 για να γίνει FIR φίλτρο με δέκα επτά όρους. Με κατάλληλο λογισμικό να σχεδιαστεί η απόκριση μέτρου και φάσης του φίλτρου.

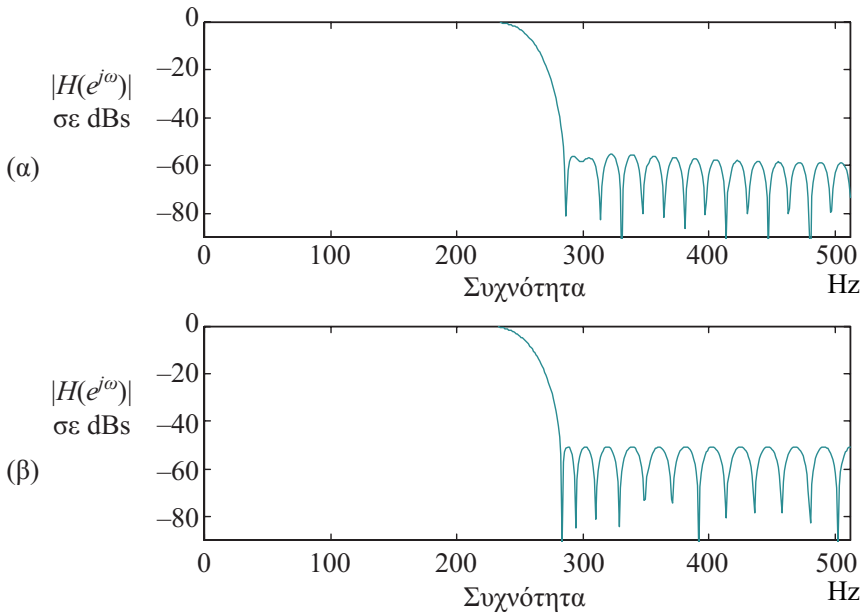
Οι συντελεστές του third band φίλτρου θα βρεθούν αν οι όροι  $h_D(n)$  της δραστηριότητας 4.4 πολλαπλασιαστούν με τους όρους  $g_R(n)$  της σχέσης (4.9) για  $\alpha = 0,54$  και  $N = 17$ .

### 4.3.3 Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων

Ο όρος *βέλτιστο FIR φίλτρο* σημαίνει την επίτευξη των καλύτερων δυνατών προδιαγραφών στην απόκριση συχνότητας με το μικρότερο πλήθος συντελεστών. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '70, και έχει κωδικοποιηθεί σε πρόγραμμα υπολογιστή με αποτέλεσμα να είναι εύκολη η εφαρμογή της. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών.

#### Σύνοψη ενότητας

Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων είναι η καλύτερη επιλογή, όταν είναι διαθέσιμο το αντίστοιχο λογισμικό. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών. Αντίθετα, η μέθοδος των παραθύρων είναι πολύ απλή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν δεν υπάρχει το απαραίτητο λογισμικό για την προηγούμενη μέθοδο. Δίνει πάντα την ίδια κυμάτωση στη ζώνη μετάβασης και τη ζώνη αποκοπής, ενώ δεν παρέχει έλεγχο στα όρια των ζωνών. Στο Σχήμα 4.8 δίνονται φίλτρα που έχουν σχεδιαστεί ώστε να έχουν τις ίδιες προδιαγραφές. Η σχεδίαση με τα παράθυρα δίνει εξήντα ένα συντελεστές, ενώ με τη μέθοδο των βέλτιστων φίλτρων σαράντα έξι συντελεστές.

**Σχήμα 4.8**

(α) Απόκριση μέτρου FIR ψηφιακού φίλτρου σχεδιασμένου με το παράθυρο Hamming και εξήντα ένα συντελεστές, (β) Απόκριση μέτρου βέλτιστου FIR βαθυπερατού φίλτρου. Το απαιτούμενο πλήθος των συντελεστών είναι σαράντα έξι.

## 4.4 Θέματα υλοποίησης FIR φίλτρων

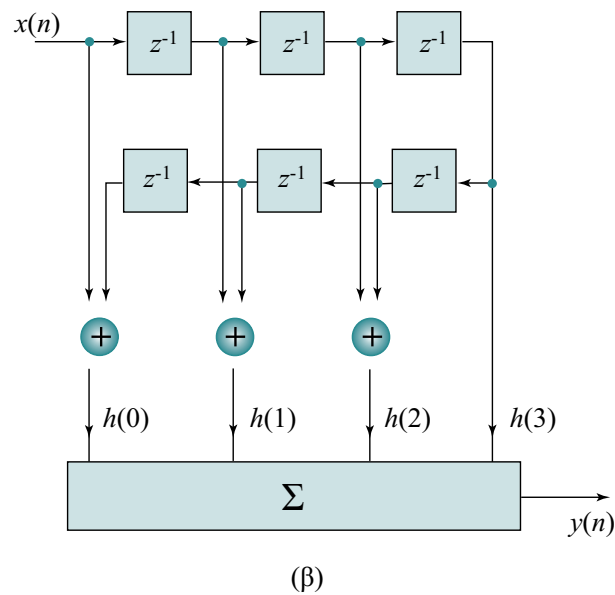
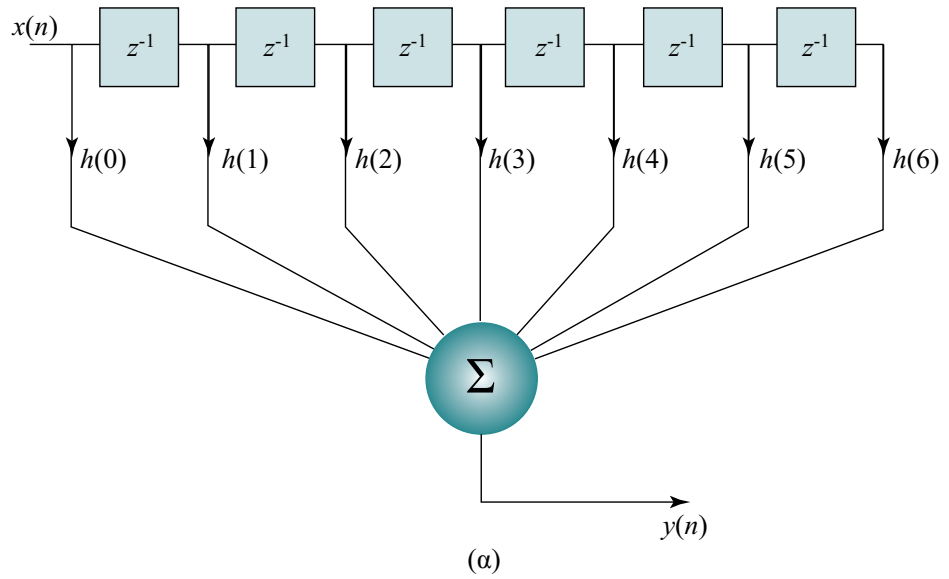
### 4.4.1 Δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων

Οι δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων είναι στην ουσία σχηματικά διαγράμματα για τους διαφορετικούς, αλλά θεωρητικά ισοδύναμους τρόπους που μπορεί να οργανωθεί η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ . Η πιο διαδεδομένη δομή είναι η άμεση ή transversal. Για τη δομή αυτή, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.9α, η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου–εξόδου του φίλτρου έχει ως εξής:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (4.10)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή η άμεση δομή απαιτεί για την πραγματοποίησή της:

- $N-1$  θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των δειγμάτων  $x(n)$ .
- $N$  θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των συντελεστών  $h(m)$ .
- $N$  πολλαπλασιασμούς.
- $N-1$  προσθέσεις.



**Σχήμα 4.9**  
Οι δύο κυριότερες  
δομές πραγματο-  
ποίησης FIR φίλ-  
τρων (α). Άμεση  
(Transversal) και  
(β) γραμμικής  
φάσης.

Τροποποίηση της transversal δομής αποτελεί η δομή γραμμικής φάσης. Στη δομή αυτή (Σχήμα 4.9β) τα δείγματα που πρόκειται να πολλαπλασιαστούν με ίδιους συντελεστές λόγω της συμμετρικής κρουστικής απόκρισης ( $h(n) = \pm h(N - n - 1)$ ), πρώτα προστίθενται και μετά πολλαπλασιάζονται. Αποτέλεσμα αυτού είναι να απαιτείται μόνο ένας πολλαπλασιασμός για κάθε δύο δείγματα. Η εξίσωση εισόδου–εξόδου στην περίπτωση αυτή γράφεται ως:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m)[x(n-m) + x(n-N+1+m)] \quad (4.11)$$

Η δομή της γραμμικής φάσης για να υλοποιηθεί απαιτεί τους μισούς πολλαπλασιασμούς σε σχέση με την άμεση, και βρίσκει εφαρμογή στα FIR φίλτρα γραμμικής φάσης (συμμετρική κρουστική απόκριση).

### Παράδειγμα 4.6

Για το FIR φίλτρο ημίσειας ζώνης του παραδείγματος 4.5, να υπολογιστούν οι μονάδες καθυστέρησης και οι πολλαπλασιαστές που απαιτούνται για την πραγματοποίησή του με άμεση δομή και δομή γραμμικής φάσης.

#### Λύση

Σύμφωνα με το Σχήμα 4.9α, ένα FIR φίλτρο με  $N$  συντελεστές απαιτεί  $N-1$  στοιχεία καθυστέρησης, και  $N$  πολλαπλασιαστές για την πραγματοποίησή του με την άμεση δομή. Στην περίπτωση μας ( $N = 17$  συντελεστές) χρειάζονται δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης και δέκα επτά πολλαπλασιασμοί. Αντίθετα, για την πραγματοποίηση της δομής γραμμικής φάσης, χρειάζονται (βλέπε Σχήμα 4.9β) δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης, δεκαεπτά προσθετές και εννέα πολλαπλασιασμοί. Πρέπει να σημειώσουμε, ότι στο φίλτρο αυτό, με βάση την εξίσωση (4.7), αρκετοί συντελεστές είναι μηδέν επειδή το φίλτρο είναι ημίσειας ζώνης. Έτσι, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι ακόμη μικρότερος.

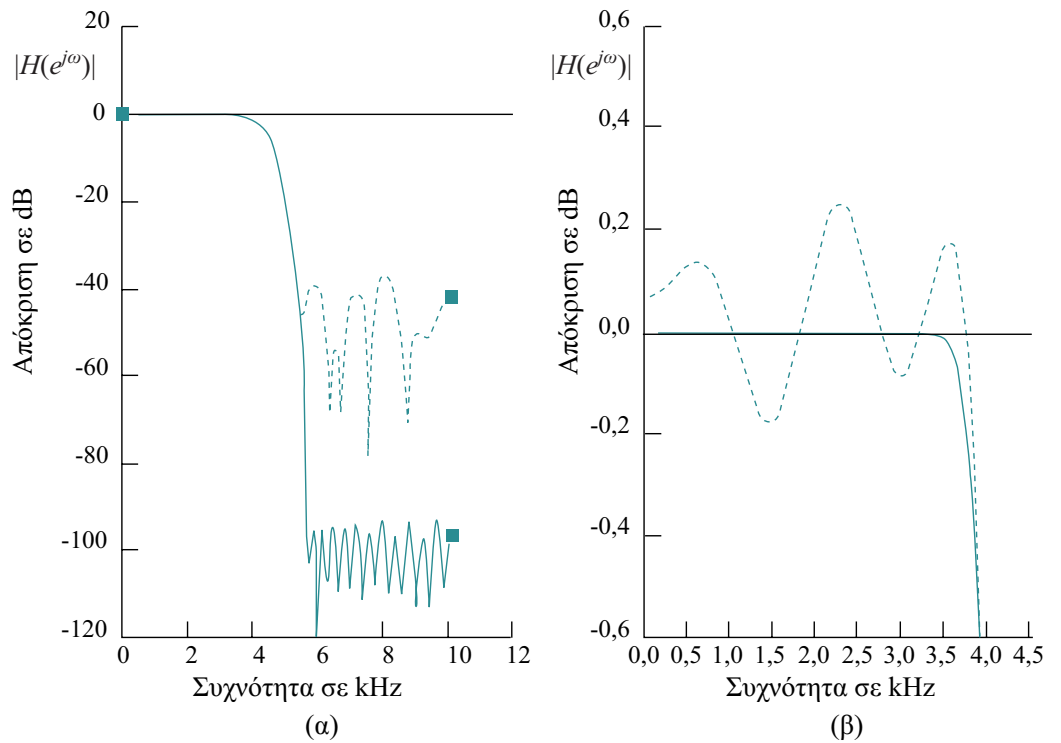
#### 4.4.2 Σφάλμα από την κβάντιση των συντελεστών

Η υλοποίηση των FIR φίλτρων με ψηφιακά κυκλώματα (hardware) συνεπάγεται πεπερασμένη ακρίβεια αναπαράστασης των συντελεστών του φίλτρου. Ο περιορισμός στην ακρίβεια των συντελεστών έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση των χαρακτηριστικών του φίλτρου από τις αρχικές προδιαγραφές. Ας σημειωθεί ότι μετά από τέτοια αλλαγή ένα φίλτρο παύει να είναι βέλτιστο. Το φαινόμενο αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *φαινόμενο πεπερασμένου μήκους λέξης* (Finite Wordlength Effect). Στο Σχήμα 4.10 με τη συνεχόμενη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου που σχεδιάστηκε αρχικά, ενώ με τη διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του ίδιου φίλτρου όταν οι συντελεστές του έχουν ακρίβεια 7 bits.

Αποδεικνύεται ότι κάθε αύξηση κατά 1 bit στην ακρίβεια των συντελεστών βελτιώνει την απόδοση του φίλτρου κατά έξι dBs (βλέπε επίσης ενότητα 1.2.2). Αν το φίλτρο έχει σχεδιαστεί με θεωρητική απόρριψη στη ζώνη αποκοπής  $A$  dBs, τότε απαιτούνται το λιγότερο  $A/6$  bits στην δυαδική αναπαράσταση των συντελεστών για να μην αλλοιωθεί η θεωρητική απόκριση του φίλτρου.

**Σχήμα 4.10**

Αποτελέσματα από την κβάντιση των συντελεστών. Με διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου μετά την κβάντιση των συντελεστών. (α) Απόκριση συχνότητας, (β) Λεπτομέρεια της ζώνης διέλευσης.

**Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.4**

Ένα FIR φίλτρο με 31 συντελεστές απαιτεί για την υλοποίησή του με την άμεση δομή

- α. 31 μονάδες καθυστέρησης και 31 πολλαπλασιασμούς.
- β. 30 μονάδες καθυστέρησης και 31 πολλαπλασιασμούς.
- γ. 30 μονάδες καθυστέρησης και 30 πολλαπλασιασμούς.
- δ. 31 μονάδες καθυστέρησης και 30 πολλαπλασιασμούς.

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

**Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.5**

Η θεωρητική αποκοπή ενός FIR φίλτρου στη ζώνη απόρριψης είναι 106 dBs. Οι συντελεστές που χρειάζονται για την υλοποίηση του φίλτρου πρέπει να έχουν ακρίβεια σε bits: 8, 12, 14, 18.

## Σύνοψη κεφαλαίου

Τα FIR ψηφιακά φίλτρα που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που είναι επιθυμητά στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Τη γραμμική απόκριση στη φάση και την ευστάθεια. Γνωρίσαμε τον τρόπο που καθορίζονται οι προδιαγραφές των φίλτρων αυτών και στη συνέχεια μελετήσαμε τη μέθοδο σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα. Τέλος, με τη μέθοδο σχεδίασης των βέλτιστων FIR φίλτρων μπορούμε να λάβουμε πολύ καλή απόκριση συχνότητας με τους λιγότερο δυνατούς συντελεστές.

## Βιβλιογραφία κεφαλαίου

### ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

- B. Αναστασόπουλος, *Σχεδίαση οικονομικών FIR φίλτρων για σήματα Διαμόρφωσης Δ' Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών 1986*
- N. Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Εκδόσεις Δίαυλος, 1993.

### ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

- V. Anastassopoulos and T. Deliyannis, *Method to design FIR Hilbert transformers for delta modulated signals*, *IEE Proc. G, Circuits, Devices and Systems*, 1986, 133, (2), pp. 113–114.
- V. Anastassopoulos and T. Deliyannis, *Efficient implementation of Nth-band FIR filters based on a simple window method*, *IEE Proc. G, Circuits, Devices and Systems*, 1990, 137, (4), pp. 302–308
- V. Anastassopoulos, N. Kouvaras and T. Deliyannis, *Method for designing half-band delta-modulation FIR filters*, *IEE Proc. F, Commun., Radar and Signal Process.*, 1985, 132, (1), pp. 13–17
- F. Harris, *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform*, *Proc. IEEE*, No. 1, pp. 51–83, January 1978.
- E.C. Ifeachor and B.W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Second edition, Pearson Education Limited, 2002.
- MATLAB, Signal processing toolbox, MathWorks, 1994.
- F. Mintzer, *On Half-band, Third-band and Nth-band FIR filters and their design*, *ASSP 30*, No. 5, pp. 734–738, October 1982.
- T.W. Parks and J.H. McClellan, *A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters*, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU–20, pp. 195–199, No. 3, Aug. 1972.
- L.R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs NJ, Prentice–Hall, 1975.

### ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

- B. Αναστασόπουλος, *Ανάλυση και Επεξεργασία Ψηφιακών σημάτων*, Σημειώσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1998.



Το κεφάλαιο 4 αναφέρεται περισσότερο αναλυτικά στα FIR φίλτρα.

MATLAB, Signal processing toolbox, MathWorks, 1994. Το MATLAB με το αντίστοιχο εγχειρίδιο του Toolbox, αποτελεί τον καλύτερο τρόπο πειραματισμού στη σχεδίαση των FIR, καθώς και στη μελέτη της συμπεριφοράς τους σε διάφορες περιπτώσεις.

### **Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική**

Averager	Κύκλωμα μέσης τιμής
Causal	Αιτιατό
Delay line	Γραμμή καθυστέρησης
Digital differentiator	Ψηφιακός διαφοριστής
Finite Impulse Response	Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
Frequency sampling method	Μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα
Half band	Ημίσειας ζώνης
Linear Phase Resonse	Απόκριση γραμμικής φάσης
Optimal method	Βέλτιστη μέθοδος
Pass band	Ζώνη διέλευσης
Stop band	Ζώνη απόρριψης (αποκοπής)
Third band	Ζώνης ενός τρίτου
Transversal	Άμεση
Windows method	Μέθοδος παραθύρων

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ τα εξής:

- Το σύστημα που μόλις εξετάσαμε είναι ένα φίλτρο πρώτης τάξης. (Θυμηθείτε ότι ο βαθμός του πολωνύμου του παρανομαστή της  $H(z)$  καθορίζει και την τάξη του συστήματος).
- Το φίλτρο είναι επαναληπτικό, αφού δείγματα της εξόδου ανατροφοδοτούνται στο σύστημα.
- Συγκρίνοντας την  $H(z)$  του συστήματος αυτού με εκείνη της άσκησης αυτοαξιολόγησης 3.5, παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά που υπάρχει είναι στο πρόσημο του συντελεστή της  $z^{-1}$  του παρανομαστή, δηλαδή στον πόλο της συνάρτησης. Αυτή η διαφορά έχει ως συνέπεια να αλλάξει ριζικά η συμπεριφορά του συστήματος και από βαθυπερατό φίλτρο στη μία περίπτωση να γίνει υπερπερατό στην άλλη.

#### 4.1

α. Σωστό.

β. Λάθος (5).

γ. Λάθος (Τιμή συντελεστή 0,2)

δ. Σωστό.

ε. Λάθος (Καθυστέρηση  $2T_s = 1/44100 = 45,3 \mu\text{sec}$ )

Αν έχετε απαντήσει σωστά, τότε μπράβο σας! Έχετε καταλάβει τις βασικές έννοιες στα FIR φίλτρα, τα οποία με τη σειρά τους αποτελούν ουσιαστικό εργαλείο στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Αν έχετε μερικές από τις απαντήσεις λάθος μην απογοητευτείτε. Διαβάστε πάλι την ενότητα 4.1, δίνοντας έμφαση στην υποενότητα 4.1.1.

#### 4.2

Η συχνότητα αποκοπής πρέπει να είναι μικρότερη από την  $\pi$ , αφού η περιοχή ενδιαφέροντος στα ψηφιακά φίλτρα είναι  $[-\pi, \pi]$ .

Αν απαντήσατε σωστά, συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει δύο πράγματα. Τον τρόπο που ενεργούν στις συχνότητες τα διάφορα φίλτρα (υψηπερατά, βαθυπερατά κτλ.), καθώς επίσης και το γεγονός ότι η απόκρισή τους στη συχνότητα είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

Στην περίπτωση που έχετε κάνει λάθος, θα πρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας

τόσο στον τρόπο ορισμού των προδιαγραφών ενός φίλτρου (ενότητα 4.2), όσο και στο κεφάλαιο 3 ενότητα 3.4.5 όπου εξηγείται η περιοδικότητα της απόκρισης συχνοτήτων των ψηφιακών φίλτρων.

### 4.3

1. Λάθος.
2. Σωστό.
3. Λάθος.
4. Σωστό.

Αν έχετε απαντήσει σωστά μπράβο σας! Έχετε καταλάβει τον τρόπο που λειτουργούν τα παράθυρα στη διαδικασία σχεδίασης των FIR φίλτρων. Αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί με ανάλογο τρόπο τα παράθυρα λειτουργούν και σε άλλες περιπτώσεις ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (δεν αναφέρονται στο βιβλίο αυτό).

Αν έχετε απαντήσει λάθος, τότε δώστε περισσότερη προσοχή στην ενότητα 4.3 και κυρίως στο σχήμα 4.6., που περιγράφει τον τρόπο επίδρασης του φάσματος του παραθύρου στην τελική απόκριση του φίλτρου.

### 4.4

Σωστή απάντηση είναι η β, διότι οι μονάδες καθυστέρησης στην άμεση δομή υλοποίησης των FIR φίλτρων είναι κατά μία λιγότερες από τους πολλαπλασιαστές.

Αν απαντήσατε σωστά σημαίνει ότι κατανοήσατε τους δύο διαφορετικούς τρόπους υλοποίησης των FIR φίλτρων που περιγράφονται στην υποενότητα 4.4.1.

Σε αντίθετη περίπτωση δώστε περισσότερη προσοχή στο σχήμα 4.9.

### 4.5

Τα bits που απαιτούνται στην αναπαράσταση των συντελεστών πρέπει να είναι περισσότερα από  $106/6 = 17,6$ . Άρα χρειάζονται 18 bits.

Αν στην άσκηση αυτή απαντήσατε σωστά, αυτό σημαίνει ότι μπορείτε να εμβαθύνετε στην σχεδίαση των FIR φίλτρων, αφού έχετε την αίσθηση του πόσο η ακρίβεια στην αναπαράσταση των συντελεστών του φίλτρου θα επηρεάσει την απόκρισή του.

Αν δεν απαντήσατε σωστά, προσπαθήστε πάλι στην υποενότητα 4.4.2.