



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

# ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

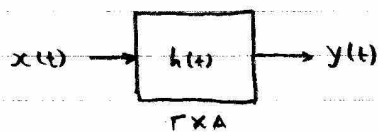
Β - ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023-2024

## ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΙΣΟΔΟΥΣ



Για είσοδο  $x(t) = e^{j\Omega t}$  η είσοδος του συστήματος ισούται

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega(t-\tau)} d\tau =$$

$$= e^{j\Omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau}_{H(j\Omega)} = H(j\Omega) e^{j\Omega t}$$

↑ ιδιοσυνάρτηση  
↑ ιδιοτιμή

Άρα η απόκριση του ΓΧΑ συστήματος σε μιγαδική εκθετική είσοδο είναι το ίδιο μιγαδικό εκθετικό με αλλαγή μόνο στο πλάτος.

Ένα σύστημα το οποίο εφαρμόζεται σε ένα σύστημα παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή η είσοδος του συστήματος ισούται με την είσοδο πολλαπλασιασμένη επί ένα σταθερά (πραγματική ή φανταστική), αποτελεί για ιδιοσυνάρτηση (eigenfunction) του συστήματος, ενώ η σταθερά αποτελεί την ιδιοτιμή (eigenvalue) του συστήματος.

**Συμπέρασμα:** Ένα γραμμικό σύστημα μεταβάλλει το μέτρο και τη φάση του σήματος εισόδου, αλλά όχι την κυκλική συχνότητά του.

Η διατήρηση της κυκλικής συχνότητας αποτελεί για βασική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων.

**Σημείωση:** Με τον όρο "σταθερά" εννοούμε ότι αυτή δεν εξαρτάται από τον χρόνο  $t$ . Αυτό θα μπορούσε να γίνει περισσότερο σκόπευτο αν αντί για  $\Omega$  χρησιμοποιούσατε  $\omega$  στην είσοδο, δηλαδή  $x(t) = e^{j\omega t}$ , όπου  $\omega$  οποιαδήποτε συχνότητα.

## ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega) \cdot X(j\Omega)$$

Η συνάρτηση  $h(t)$  αποτελεί την κρουστική απόκριση του συστήματος.

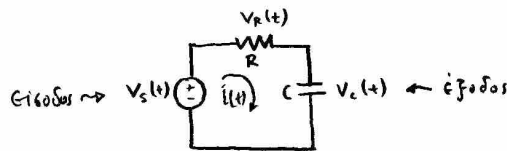
Η συνάρτηση  $H(j\Omega)$  αποτελεί την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Η συνάρτηση  $H(j\Omega)$  μπορεί να υπολογιστεί είτε ως ο ΜΦ της  $h(t)$ , είτε ως λόγος του ΜΦ της εξόδου προς τον ΜΦ της εισόδου, δηλαδή

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$$

**Παράδειγμα**

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του πρώτου τάξης RC φίλτρου για την περίπτωση που η είσοδος λαμβάνεται από τον πυκνωτή.



$$\left. \begin{aligned} V_s(t) &= V_R(t) + V_C(t) \\ i(t) &= C \frac{dV_C(t)}{dt} \end{aligned} \right\} V_s(t) = R i(t) + V_C(t) = RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

Υπολογίζοντας τον ΜΦ και των δύο φελών της εξίσωσης έχουμε:

$$F\{V_s(t)\} = F\left\{RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)\right\} \Rightarrow$$

$$F\{V_s(t)\} = RC F\left\{\frac{dV_C(t)}{dt}\right\} + F\{V_C(t)\} \Rightarrow$$

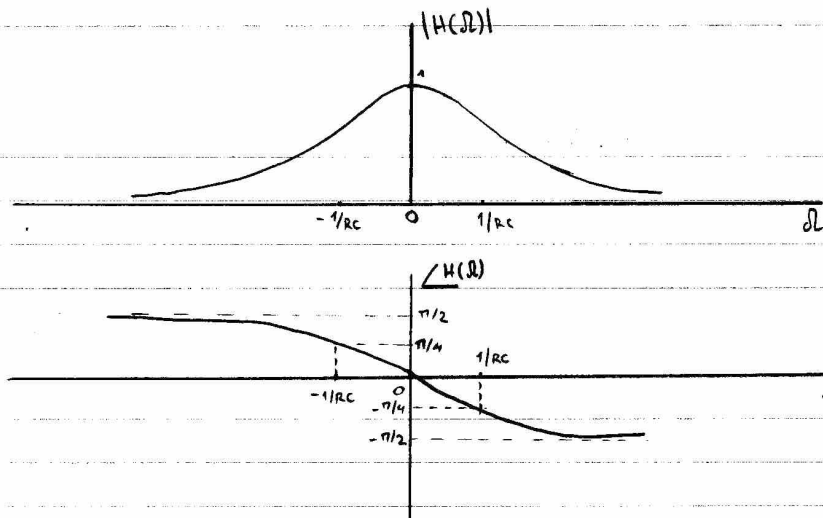
$$V_s(j\Omega) = RC \cdot j\Omega V_C(j\Omega) + V_C(j\Omega) \Rightarrow$$

$$V_s(j\Omega) = [RC j\Omega + 1] V_C(j\Omega) \Rightarrow$$

$$H(j\Omega) = \frac{V_C(j\Omega)}{V_s(j\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} = \frac{1/RC}{1/RC + j\Omega} \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Το κέρπο και η φάση της απόκρισης συχνότητας  $H(\Omega)$  είναι:

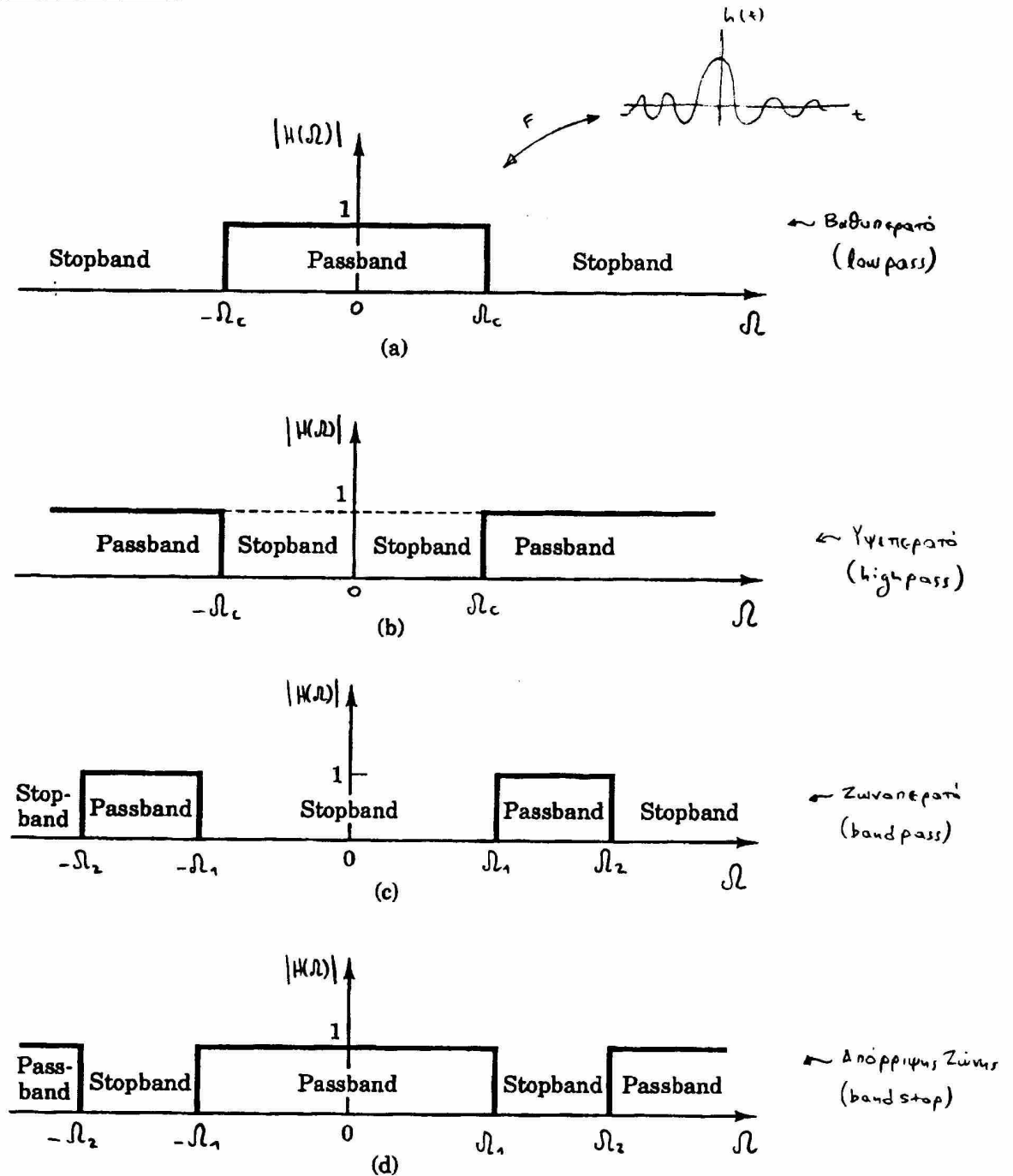
$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + RC^2\Omega^2}} \quad \angle H(\Omega) = -\tan^{-1}(RC\Omega)$$



Παραπομπή ότι πρόκειται για ένα βαθυκέρπο (lowpass) φίλτρο, αφού για  $\Omega=0$  το κέρπο  $|H(\Omega)|=1$ , ενώ για  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $|H(\Omega)| \rightarrow 0$ . Με άλλα λόγια το σύστημα (φίλτρο) αυτό επιτρέπει τις χαμηλές συχνότητες να διέλθουν, ενώ εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες. Η σταθερά χρόνου  $\tau = RC$  καθορίζει τον ρυθμό εξασθένισης.

# ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

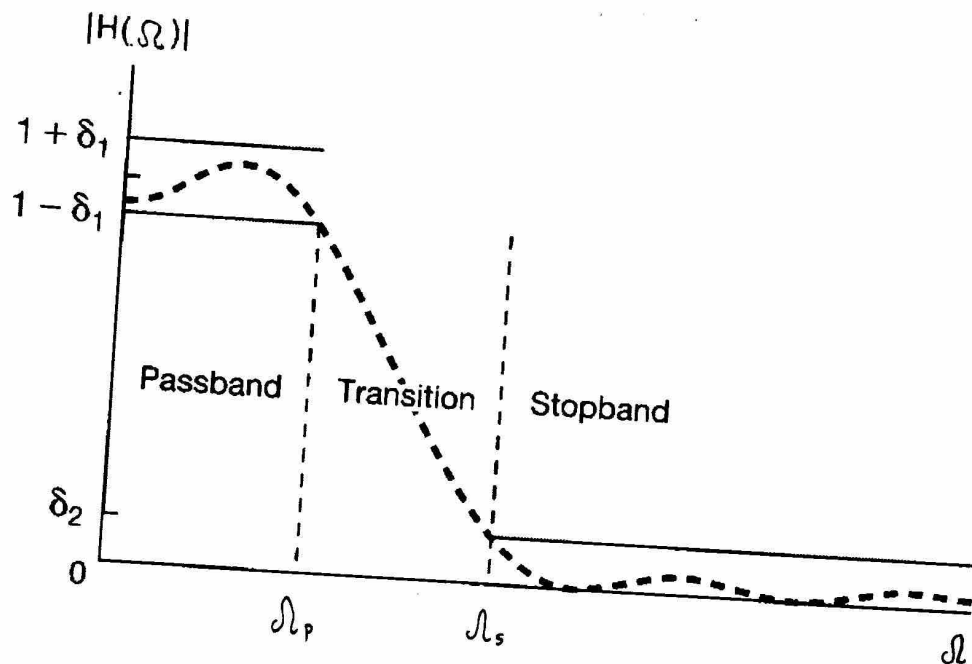
## ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



Τα ιδανικά φίλτρα είναι είτε αιτιατά αφού η κρουστική τους απόκριση  $h(t)$  είναι 0 για  $t < 0$ .

Τα φυσικά (πραγματοποιήσιμα) φίλτρα πρέπει να είναι αιτιατά. Για να προσεγγίσουμε το φίλτρο της απόκρισης συχνότητας των ιδανικών (μη αιτιατών) φίλτρων, τα σχεδιάζουν έτσι ώστε η κρουστική απόκριση των φυσικών φίλτρων να είναι ίδια με την κρουστική απόκριση των ιδανικών, αλλά καθυστερημένη στον χρόνο. Αυτή η καθυστερήση στον χρόνο έχει ως αποτέλεσμα την αρνητική φάση στην απόκριση συχνότητας του φυσικού φίλτρου.

## ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ (ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ)



- Τα πραγματικά φίλτρα προσπαθούν να προσεγγίσουν τα ιδανικά.
- Ορισμένα επιδιώκουν να προσεγγίσουν το πλάτος όσο το δυνατόν πιο καλά, αγνοώντας την απόκριση φάσης, όπως για παράδειγμα τα φίλτρα Butterworth, Chebyshev και ελλειπτικά. Τέτοια φίλτρα είναι κατάλληλα για ακουστικά σήματα (audio signals), αφού η ανθρώπινη ακοή δεν είναι ευαίσθητη στην ολιγόθυση της φάσης των συνιστωσών του σήματος.
  - Άλλα φίλτρα, όπως το φίλτρο Bessel, επιδιώκουν να προσεγγίσουν τη φάση κατά το δυνατόν καλύτερα, αγνοώντας την απόκριση μέτρου.
  - Είναι αδύνατον να βελτιστοποιήσουμε φίλτρο και φάση ταυτόχρονα, αφού η απόκριση φάσης ενός ευσταθούς κλιμακωτού φίλτρου με δεδομένη απόκριση μέτρου δεν μπορεί να επιλεγεί τυχαία, όπως και το αντίθετο.

ΙΔΑΝΙΟ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

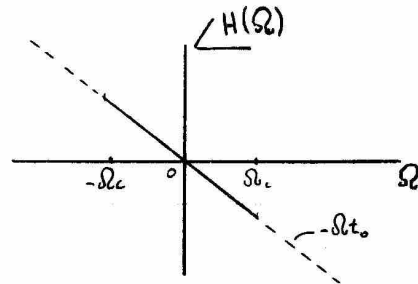
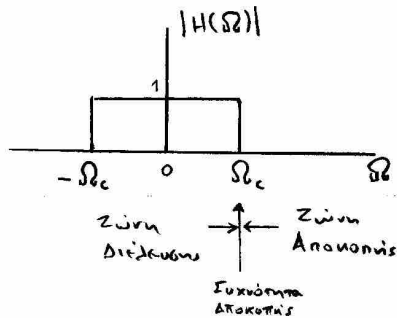


Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (ideal lowpass filter) έχει κλάση συχνότητας

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

όπου το σταθερά και  $\Omega_c$  η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου.

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης του φίλτρου είναι:



Αφού  $Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega)$ , γίνεται φανερό ότι ένα τέτοιο σύστημα (φίλτρο) επιτρέπει να διέρχονται αφράθιστα όλες οι συχνότητες που είναι μικρότερες της  $\Omega_c$ , ενώ απορρίπτεται (φιλτράρεται) η συχνότητα της μεγαλύτερης από  $\Omega_c$ .

Για την περιοχή των συχνοτήτων  $\Omega < \Omega_c$ , δηλαδή για τη ζώνη διάλευσης, θα ισχύει

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$$

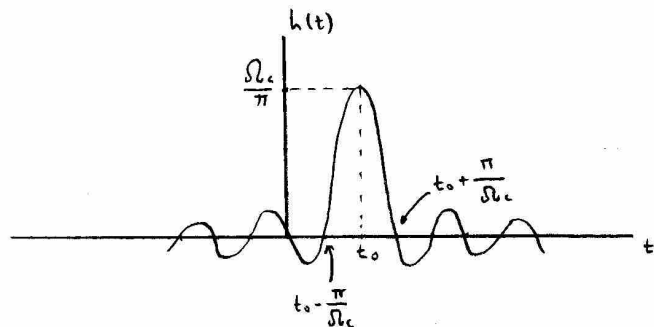
ή ισοδύναμα

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σήμα εισόδου παραμένει αναλλοίωτο και το μόνο που υφίσταται είναι μια χρονική καθυστέρηση κατά  $t_0$ .

Τέλος, με βάση το παράδειγμα 3.3 και την ιδιότητα της ολιθιότητας στο χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε την χρονική κλάση του φίλτρου  $h(t)$ , δηλ. τον αντίστροφο ΜΦ:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\text{sin}[\Omega_c(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)} = \\ &= \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\text{sin}[\Omega_c(t-t_0)]}{\Omega_c(t-t_0)} = \\ &= \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c(t-t_0)}{\pi}\right] \end{aligned}$$

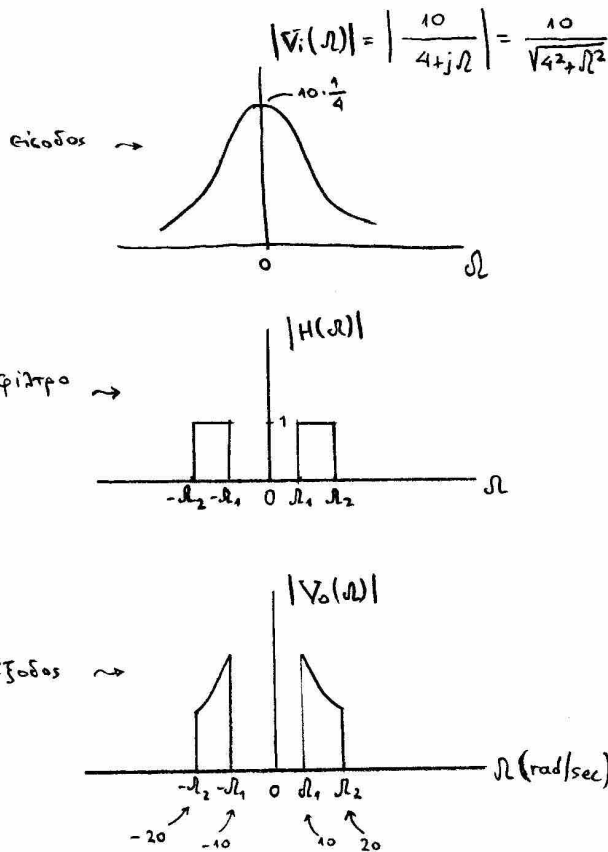


ΑΣΚΗΣΗ

Σε ιδανικό ζωνοδιαβατό (bandpass) φίλτρο με συχνότητες αποκοπής  $\omega_1 = 10 \text{ rad/sec}$  και  $\omega_2 = 20 \text{ rad/sec}$  εφαρμόζεται η είσοδος  $v_i(t) = 10 e^{-4t} u(t)$ . Να υπολογιστεί ο λόγος της ενέργειας του σήματος εξόδου προς την ενέργεια του σήματος εισόδου. Να σχεδιαστούν τα φασμάτα (μέτρο μόνο) εισόδου, εξόδου και φίλτρου.

ΛΥΣΗ

Ενέργεια σήματος εισόδου:  $E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |v_i(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} 10^2 (e^{-4t})^2 dt = 100 \frac{1}{-8} e^{-8t} \Big|_0^{\infty} = \frac{25}{2}$



Ενέργεια σήματος εξόδου:

$$E_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V_o(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\infty} |V_i(\omega) \cdot H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |V_i(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{10}^{20} \left| \frac{10}{4+j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{100}{\pi} \int_{10}^{20} \frac{1}{4^2 + \omega^2} d\omega = \frac{100}{\pi} \frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \Big|_{10}^{20} = \frac{25}{\pi} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{20}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{10}{4}\right) \right] = \frac{25}{\pi} [1.3734 - 1.1903] = \frac{25}{\pi} \cdot 0.1831$$

Τελικά:

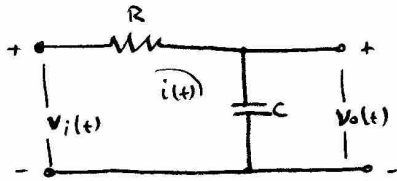
$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{25}{\pi} \cdot 0.1831}{\frac{25}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot 0.1831 = 0.1166 = 11.66 \%$$

① Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει εάν υπολογίζαμε την ενέργεια στο πεδίο της συχνότητας:

$$E_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V_i(\omega)|^2 d\omega = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{10}{4+j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{100}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{4^2 + \omega^2} d\omega = \frac{100}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{100}{4\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$$



## RC ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ



$$\left. \begin{aligned} v_i(t) &= i(t)R + v_o(t) \\ i(t) &= C \frac{dv_o(t)}{dt} \end{aligned} \right\} v_i(t) = RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier και εργαζόμενοι με:

$$V_i(\omega) = RC j\omega V_o(\omega) + V_o(\omega) \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

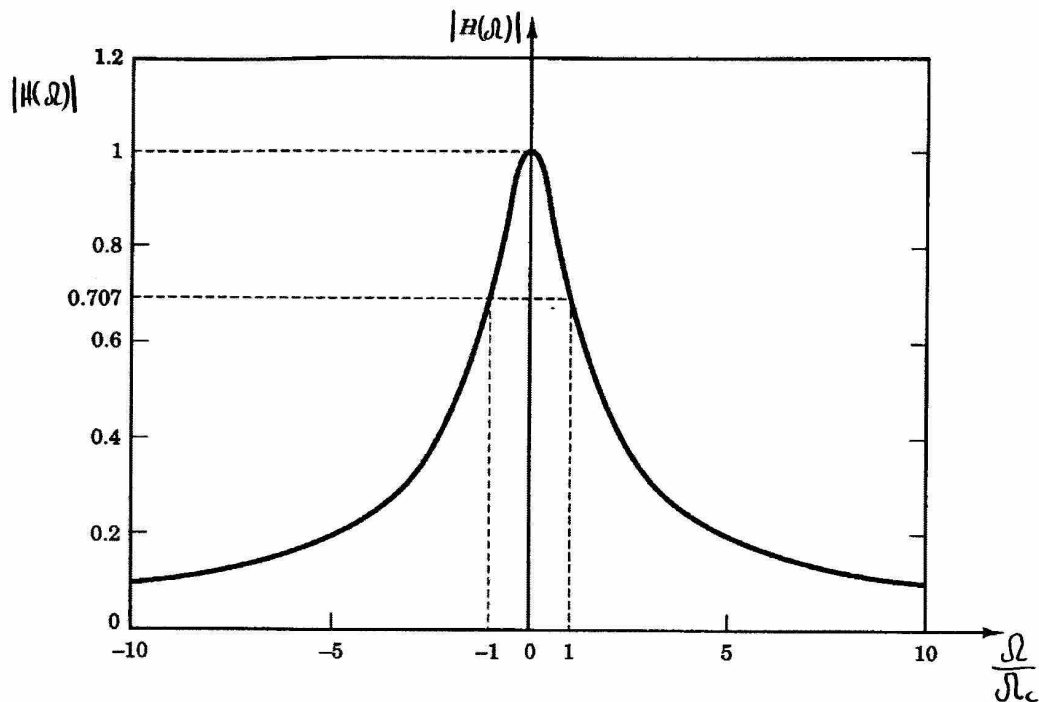
Αντιστοιχώντας  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  η  $H(\omega)$  γίνεται:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad \text{όπου} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\underline{\phi(\omega)} = \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Η συχνότητα  $\omega_c$  ονομάζεται συχνότητα  
 αποκοπής (cut-off frequency) ή συχνότητα  
 μισής ισχύος (half-power frequency), και

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad |H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$$



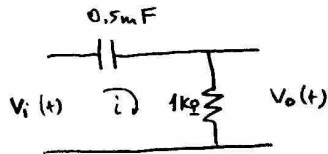
ΑΣΚΗΣΗ Για το κύκλωμα του σχήματος:

α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας.

Για τη είσοδο φίλτρο προδύεται;

β. Να βρείτε την φασματική απόκριση του κυκλώματος.

γ. Ποια η είσοδος του κυκλώματος για είσοδο  $v_i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$ ;



ΛΥΣΗ

$$\left. \begin{aligned} \alpha. \quad v_i(t) &= v_c(t) + v_o(t) \\ i(t) &= C \frac{dv_c(t)}{dt} \\ v_o(t) &= R i(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_i(t) &= v_c(t) + RC \frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow \langle MF \rangle \Rightarrow \\ v_i(\Omega) &= v_c(\Omega) + RC j\Omega v_c(\Omega) \Rightarrow \\ v_i(\Omega) &= (1 + jRC\Omega) v_c(\Omega) \Rightarrow \end{aligned} \quad (1')$$

$$\frac{v_c(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \quad (1)$$

Αλλά

$$v_i(t) = v_c(t) + v_o(t) \xrightarrow{MF} v_i(\Omega) = v_c(\Omega) + v_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$v_c(\Omega) = v_i(\Omega) - v_o(\Omega) \quad (2)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

Συμπέρασμα: Στη σχέση (3) θα μπορούσατε να καταλήψετε και ως εξής:

$$v_o(t) = R i(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$F \rightarrow v_o(\Omega) = RC j\Omega v_c(\Omega) \quad (2')$$

Από την (1') έχουμε:

$$v_i(\Omega) = (1 + jRC\Omega) v_c(\Omega) \quad (3')$$

Από τις (2'), (3'):

$$H(\Omega) = \frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{jRC\Omega}{1 + jRC\Omega} \quad (3)$$

$$\frac{v_i(\Omega) - v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$\frac{v_o(\Omega)}{v_i(\Omega)} = 1 - \frac{1}{1 + jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + jRC\Omega} = \frac{jRC\Omega}{1 + jRC\Omega} \quad (3)$$

Για  $R=1\text{ k}\Omega$  και  $C=0.5\text{ mF} \rightarrow RC=1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}$  η σχέση (3) γίνεται:

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \quad (4)$$

Για να βρούμε την κέρωση συχνότητας θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο  $|H(\Omega)|$  για διαφορετικές συχνότητες.

$$\begin{aligned} |H(\Omega)| &= \left| 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{1 + j\frac{1}{2}\Omega - 1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} \right| = \\ &= \frac{|j\Omega|}{|2 + j\Omega|} = \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\sqrt{4 + \Omega^2}} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{4 + \Omega^2}} \quad (5) \end{aligned}$$

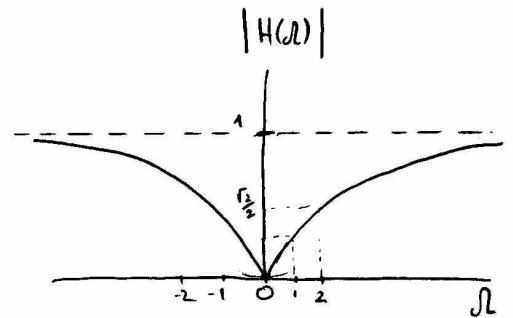
$$|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |H(\Omega)|_{\Omega=-1}$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=2} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |H(\Omega)|_{\Omega=-2}$$

$$\vdots$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\Omega^2}{4 + \Omega^2}} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\Omega^2} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{0+1}} = 1$$



Συνεπώς προκύπτει για ένα υψηλ-pass (HP - High Pass) φίλτρο.

- β. Η κρουστική απόκριση του συστήματος προκύπτει άμεσα από τη σχέση (4), λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

$$\begin{aligned} F^{-1} \left( \begin{aligned} H(\Omega) &= 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = 1 - \frac{2}{2 + j\Omega} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2 + j\Omega} \quad (6) \\ h(t) &= \delta(t) - 2 \cdot e^{-2t} u(t) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη δίντην από τη σχέση (4) και τις ιδιότητες της παραγώγου των ΜΦ.

$$\begin{aligned} H(\Omega) = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega} &= j\Omega \cdot \frac{1}{2 + j\Omega} = j\Omega G(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{-2t} u(t)) = \\ &= \frac{d}{dt} (e^{-2t}) \cdot u(t) + e^{-2t} \frac{du(t)}{dt} = -2e^{-2t} u(t) + e^{-2t} \delta(t) = \\ &= -2e^{-2t} u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$8. \quad v_i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) \xrightarrow{MF} V_i(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+j\omega} \quad (7)$$

Από την (6) έχουμε:

$$H(\omega) = 1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = 1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow$$

$$V_o(\omega) = \left( 1 - 2 \frac{1}{2+j\omega} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} - \underbrace{\frac{1}{2+j\omega} \cdot \frac{1}{1+j\omega}}_{G(\omega)} \quad (8)$$

Αναλύουμε την  $G(\omega)$  σε fractions μερικά.

$$G(\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)} = \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

$$A = (2+j\omega) G(\omega) \Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{1+j\omega} \Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$B = (1+j\omega) G(\omega) \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2+j\omega} \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

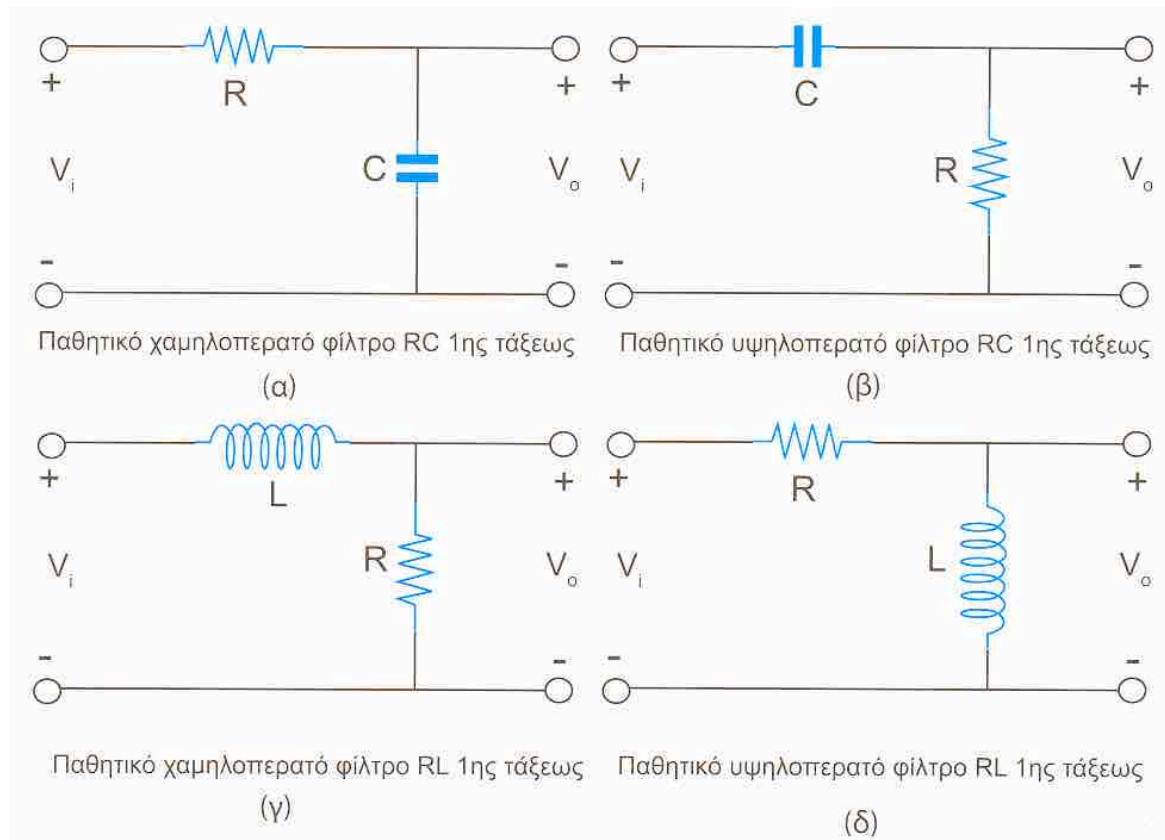
$$\text{Έτσι} \quad G(\omega) = \frac{-1}{2+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} \quad (9)$$

Με βάση το αποτέλεσμα (9) η σχέση (8) γίνεται:

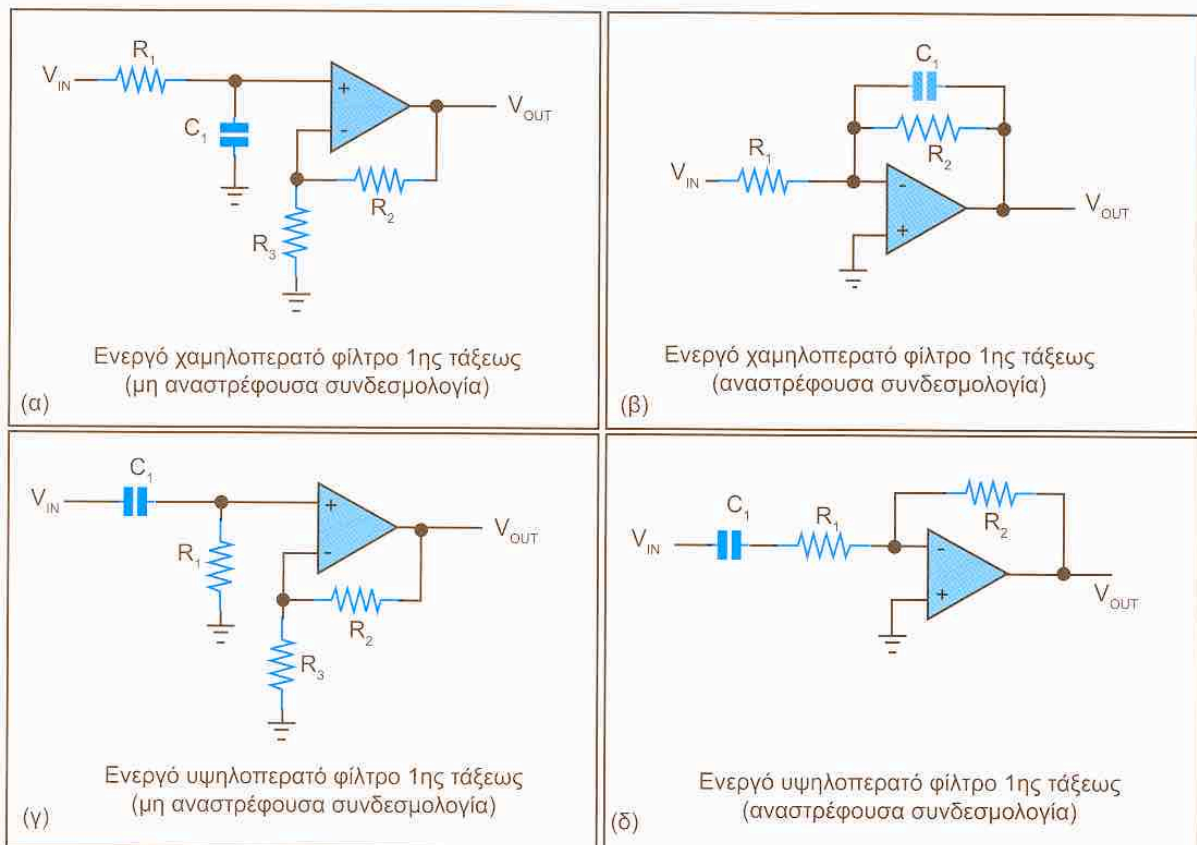
$$V_o(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow$$

$$F^{-1} \left( \begin{aligned} V_o(\omega) &= \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\omega} \\ v_o(t) &= e^{-2t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t) = \left( e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t} \right) u(t) \end{aligned} \right.$$

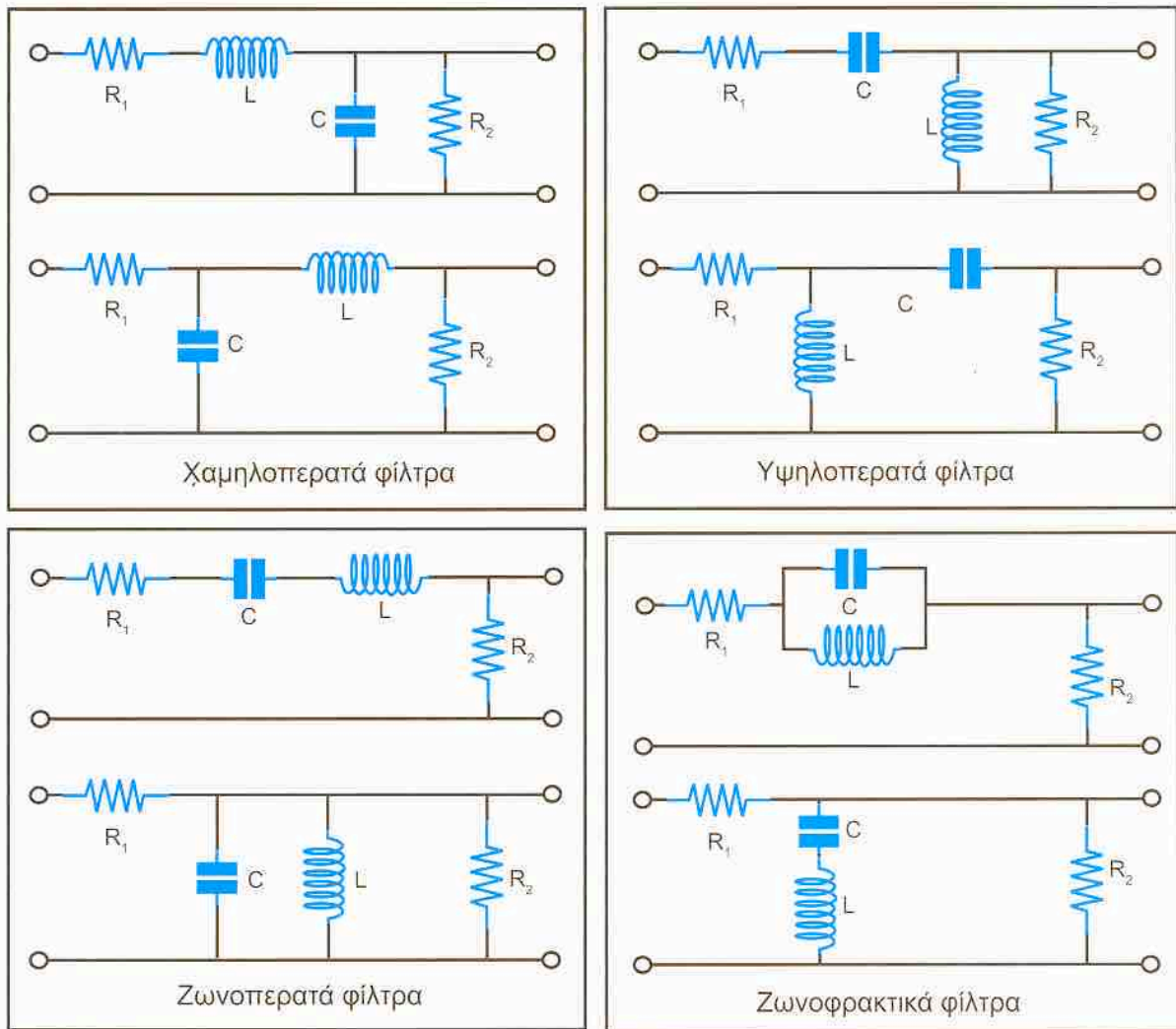
## Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1<sup>ης</sup> τάξης



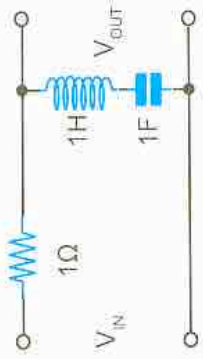
## Παραδείγματα αναλογικών ενεργών φίλτρων 1<sup>ης</sup> τάξης



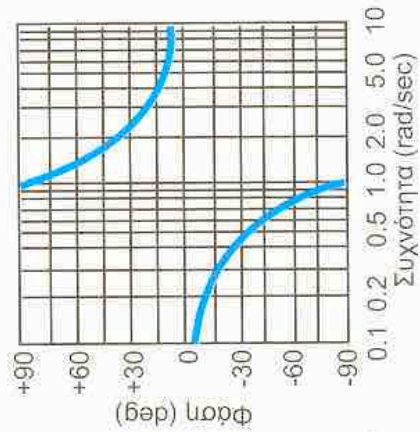
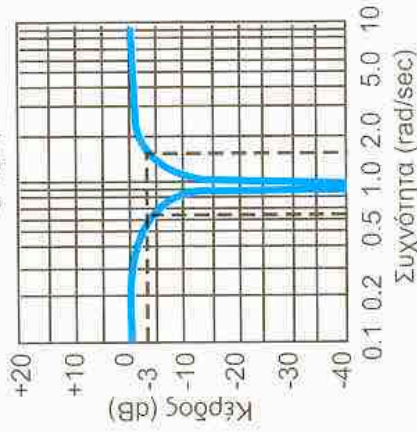
## Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 2<sup>ης</sup> τάξης



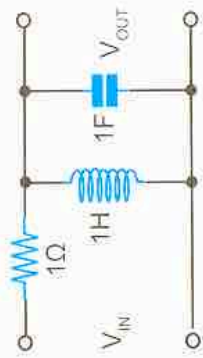
Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 2<sup>ης</sup> τάξης:  
Κύκλωμα – συνάρτηση μεταφοράς – αποκρίσεις συχνότητας



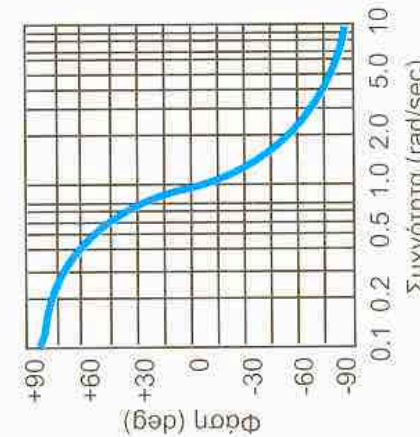
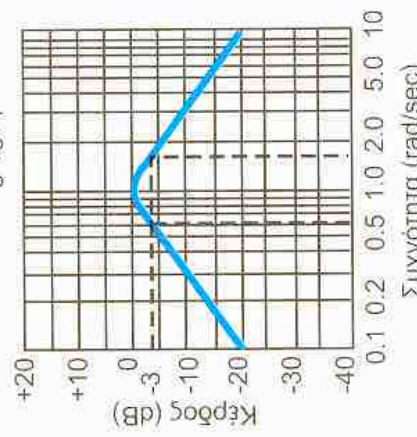
$$H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+s+1}$$



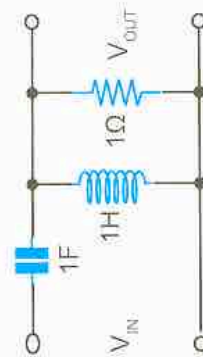
Ζωνοφρακτικό



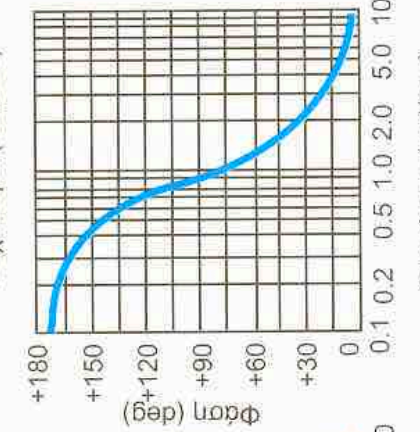
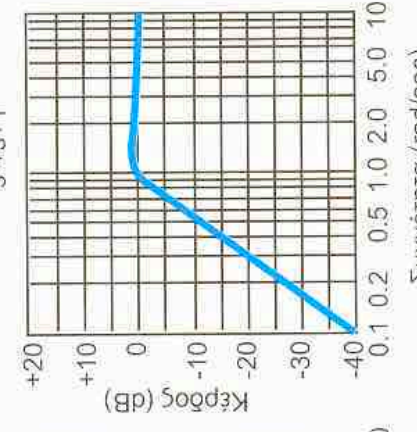
$$H(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$$



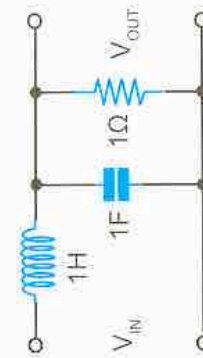
Ζωνοπερατό



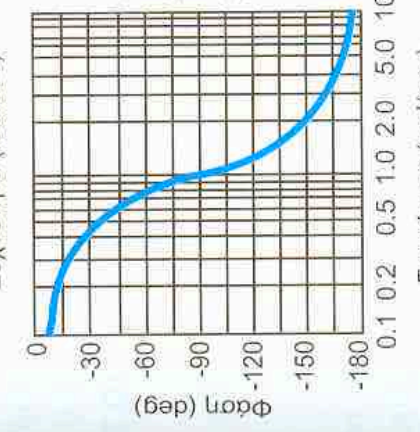
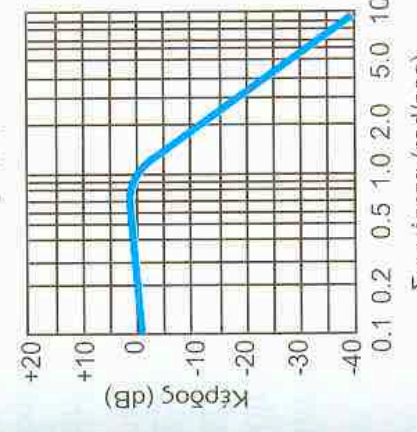
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+s+1}$$



Υψηλοπερατό



$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$



Χαμηλοπερατό

## ΦΙΛΤΡΑ

- Φίλτρα  $\hat{=}$  Συστήματα Επιλογής Συχνοτήτων
- Γιατί ΓΧΑ;  $\rightarrow$  Δεν αλλάζουν τη συχνότητα, αλλά φέρνουν το πλάτος ή/και τη φάση.
- Ιδανικά φίλτρα  $\rightarrow$  άπειρη διάρκεια κρουστική απόκριση  
 $\rightarrow$  μη αιτιατά
- Πραγματοποιήσιμα αιτιατά και ευσταθή συστήματα ΓΧΑ:
  - ▶  $H(s)$   $\rightarrow$  ρητή με πραγματικούς συντελεστές
  - ▶ Πόλοι της  $H(s)$  στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου
  - ▶ Βαθός αριθμητή  $\leq$  βαθός παρονομαστή
- Τάξη φίλτρου  $\rightarrow$  μεγαλύτερη δύναμη του  $s$  στον παρονομαστή της  $H(s)$   
 $\Downarrow$   
πλήθος στοιχείων κυκλώματος ή δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας, δηλαδή πυκνών και πυκνωτών
- $\omega_c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$  της μέγιστης τιμής ή  $\frac{1}{2}$  της μέγιστης ισχύος  
 $\Downarrow$   
-3 dB - Συχνότητα κλιμακωτικής -

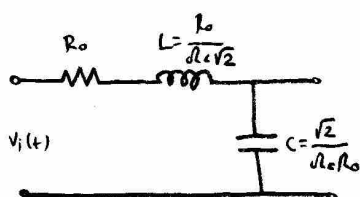


ΦΙΛΤΡΟ BUTTERWORTH 'Η ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ (MAXIMALLY-FLAT)

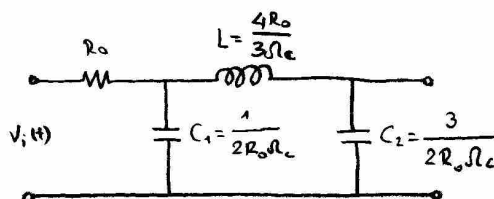
$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}}$$

όπου  $N$  είναι η τάξη (order) του φίλτρου. ( $N$  είναι η τάξη της διαφορικής εξίσωσης η οποία περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά των φίλτρων στο πεδίο του χρόνου).

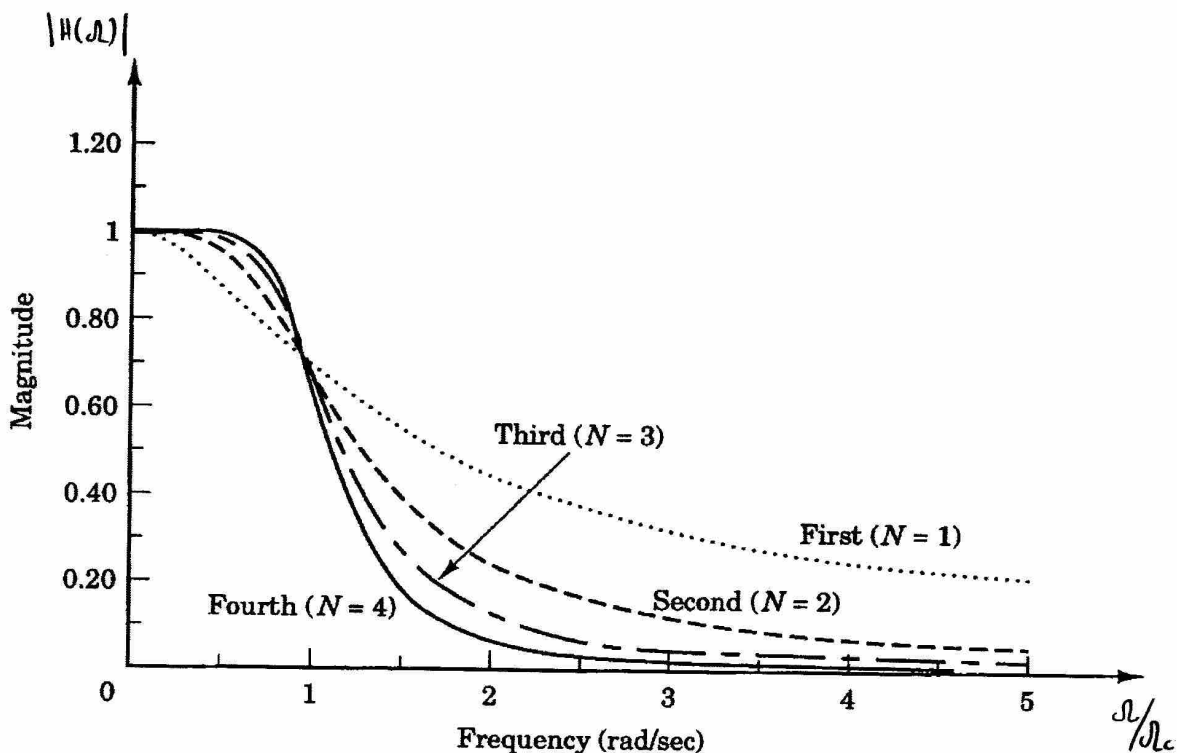
Το RC βαθμωτά φίλτρο είναι ένα φίλτρο Butterworth 1ης τάξης.



Butterworth 2ης τάξης



Butterworth 3ης τάξης



ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Ζώνη διέλευσης κατά το δυνατόν επίπεδη (στρωτήρι) χωρίς κυψάλωση.
- Ζώνη φεράδας μονοτονική με ρυθμό 6dB/οκτάβα (ή 20dB/δεκάδα) για κάθε πόλο.
- Σχετικά καλή (ως προς τη γραμμικότητα) απόκριση φάσης.

ΦΙΛΤΡΟ CHEBYSCHEV I

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(v)}}$$

όπου  $\epsilon < 1$  και  $v$  η κανονικοποιημένη συχνότητα:  $v = \frac{\Omega}{\Omega_c}$

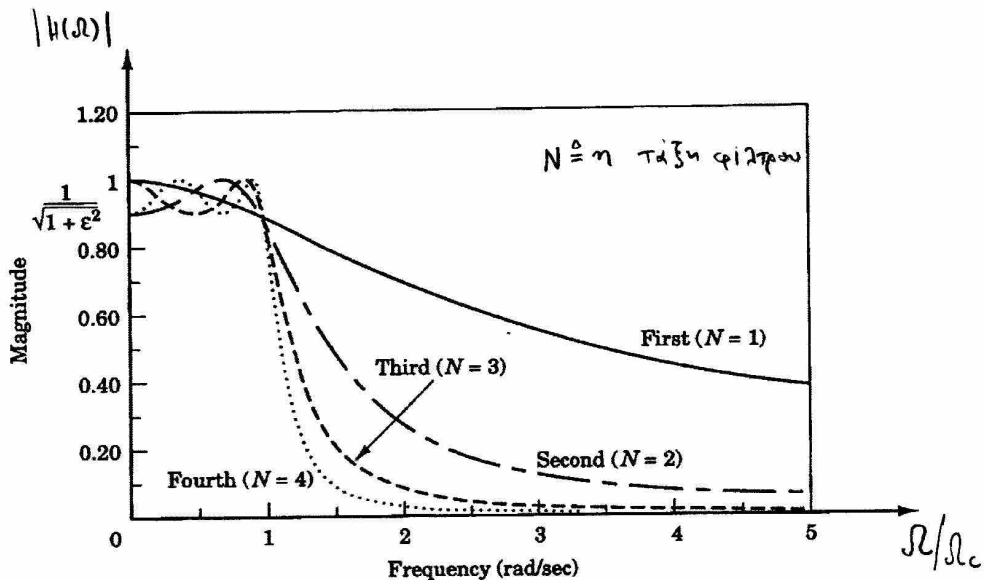
$C_n$  είναι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης  $n$ :

$$C_n = \cos(n \cos^{-1}(v))$$

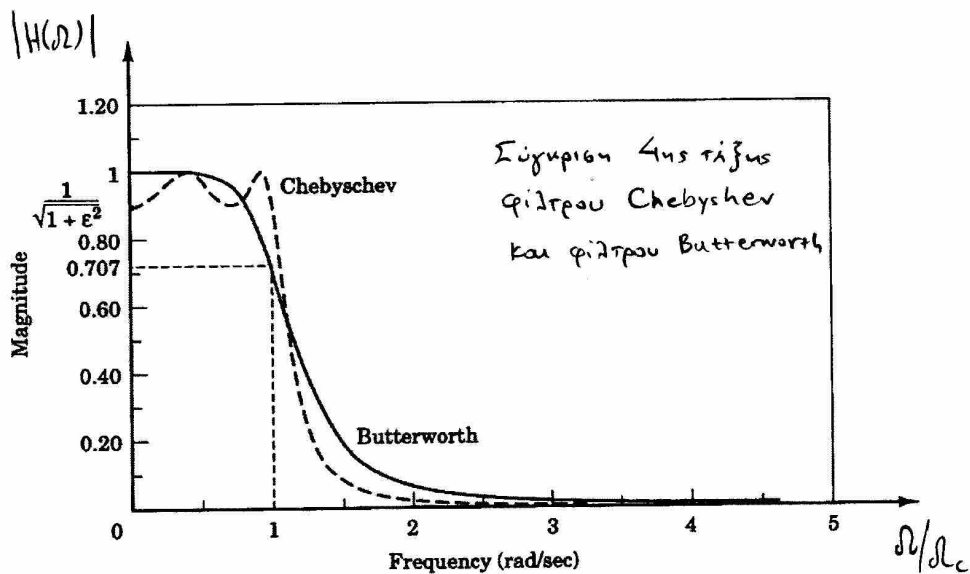
$$C_0 = 1, C_1 = v, C_2 = 2v^2 - 1, C_3 = 4v^3 - 3v, \dots$$

Γενικά:

$$C_{n+1}(v) = 2v C_n(v) - C_{n-1}(v)$$



(a)



(b)

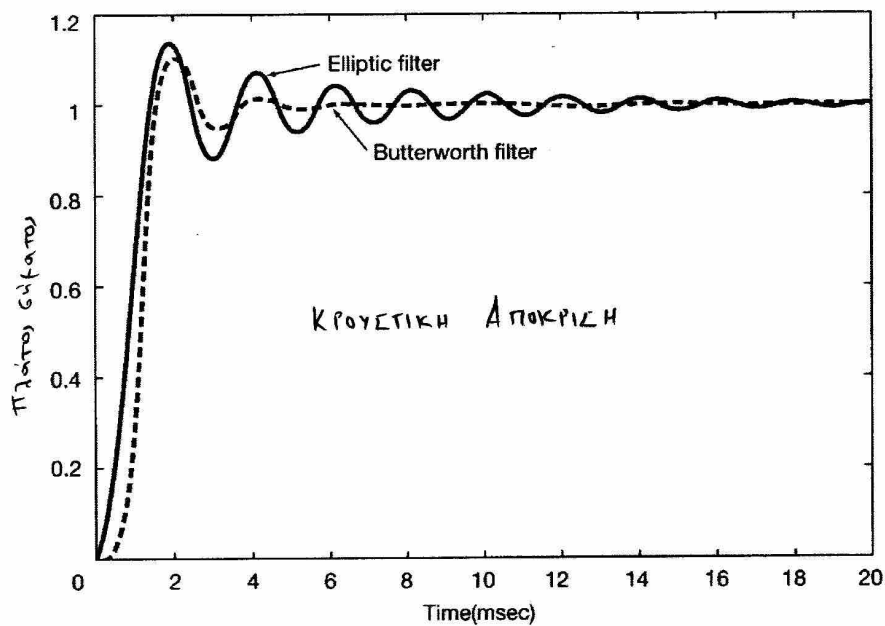
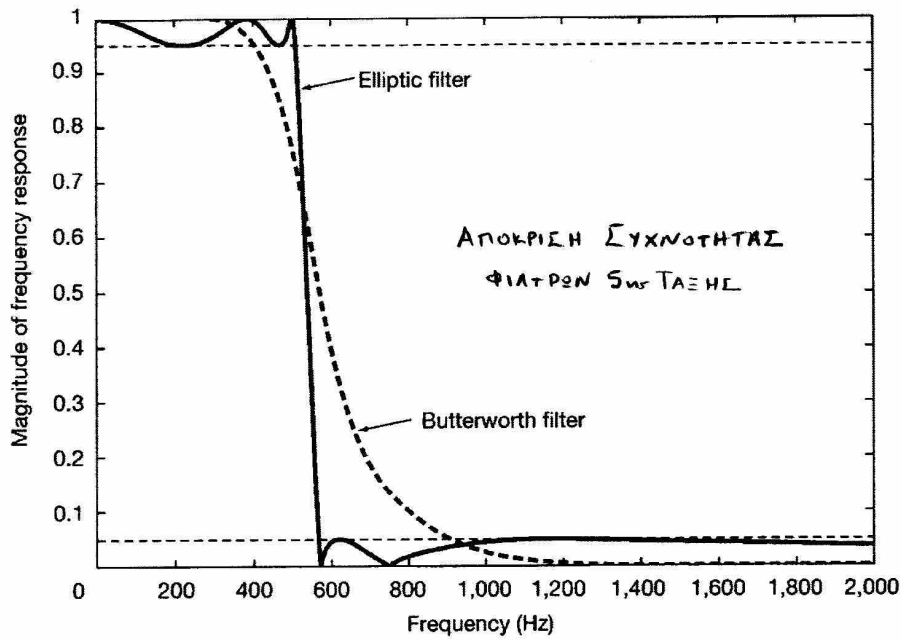
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Τα φίλτρα Chebyshev τύπου I παρουσιάζουν κυλιώδη στη ζώνη διέλευσης, ενώ τα τύπου II παρουσιάζουν κυλιώδη στη ζώνη απόκλισης.
- Είναι πιο κριτική ζώνη μετάβασης συγκριμένα με ίδιου βαθμού Butterworth.
- Ισχυρά μη-γραμμική απόκριση φάσης.

## ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ Ή ΦΙΛΤΡΟ CAUER

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 U_N^2(\nu)}}$$

όπου  $U_N(\nu)$  η ελλειπτική ρητή συνάρτηση τάξης  $N$ .



### ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Παρουσιάζει καλύτερη τάξη στη ζώνη διέλευσης, όσο και στη ζώνη αποκλισης.
- Έχει πιο απότομη (μικρό εύρος) ζώνη μεταβάσεως συγκρινόμενο με τα αντίστοιχα Butterworth και Chebyshev I/II.
- Ισχυρά τη-γραμμική απόκριση φάσης

## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

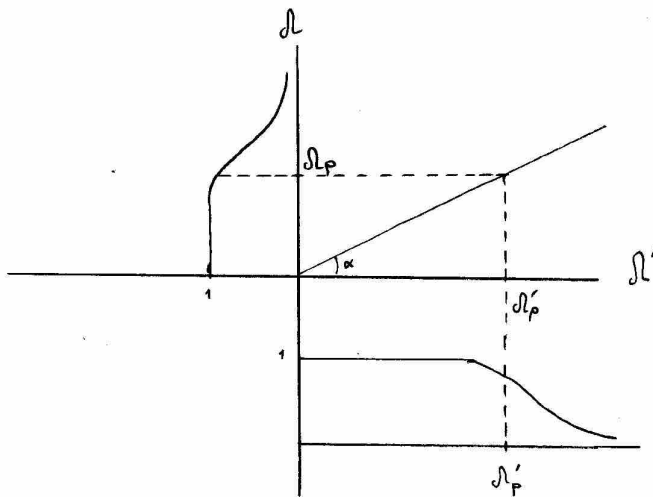
### ● ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ-ΣΕ-ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ (LOWPASS-TO-LOWPASS)

Εάν  $\Omega_p$  είναι η συχνότητα στο όριο της ζωής διάλωσης του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου και  $\Omega'_p$  η αντίστοιχη συχνότητα του τελικού (επιθυμητού) βαθυπερατού φίλτρου, τότε επιτελούμε τον μετασχηματισμό

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$$

δηλ. αδμ

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s}$$



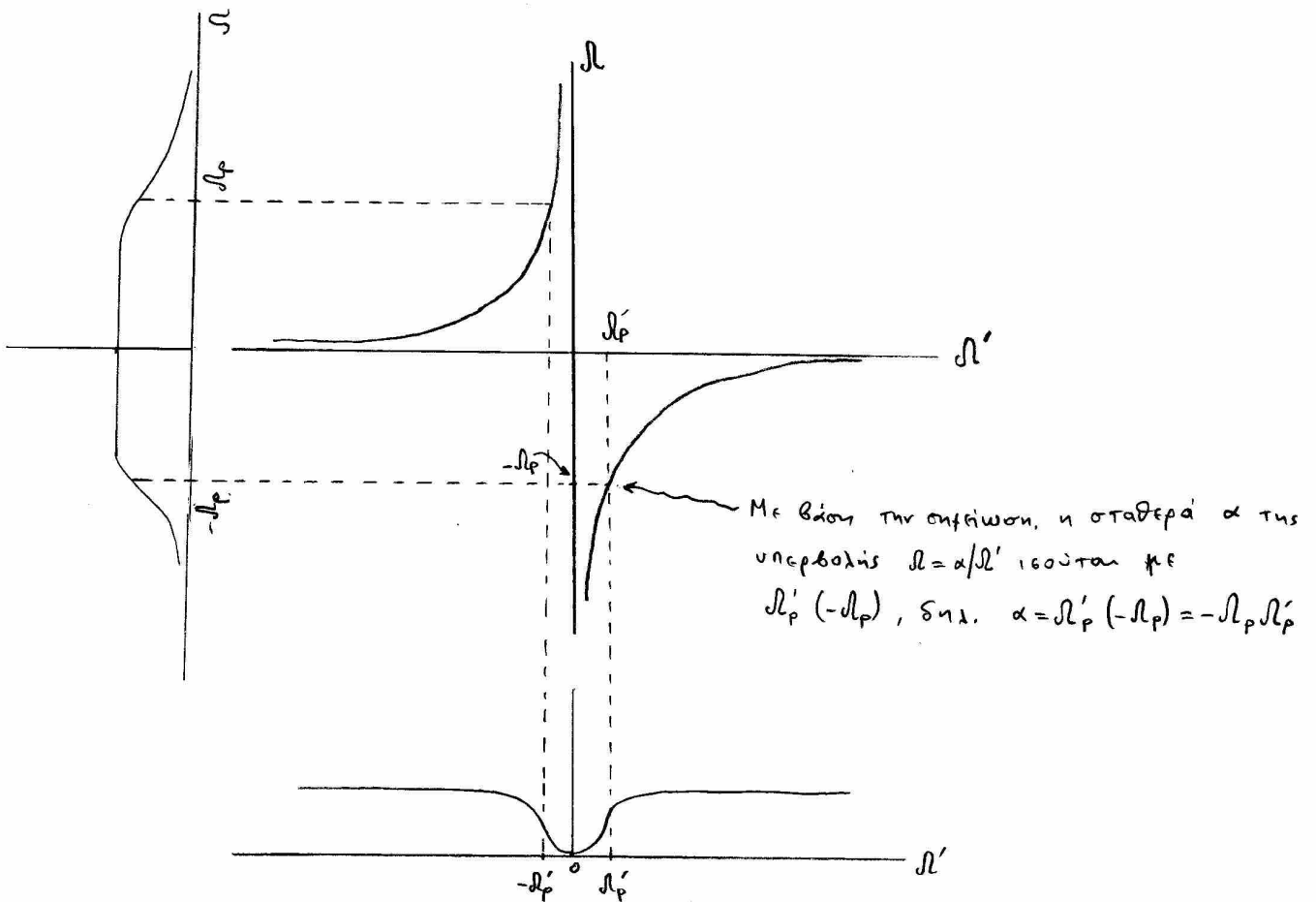
$$\Omega = \tan(\alpha) \cdot \Omega' \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} \Omega' \Rightarrow \langle \text{πολλαπλασιάζουμε με } j \text{ τα δύο μέλη} \rangle$$

$$j\Omega = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} j\Omega' \Rightarrow \langle \text{για ανάσφρηση συχνότητας } s = j\omega \rangle$$

$$s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s' \quad \langle \text{δηλαδή όπου } s \text{ αντικαθιστούμε } \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s \rangle$$

• ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ - ΣΕ - ΥΨΙΠΕΡΑΤΟ (LOWPASS-TO-HIGHPASS)

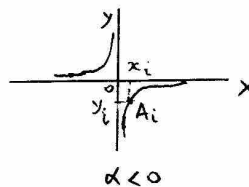
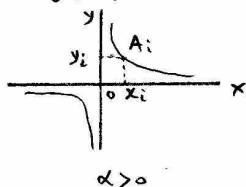


$$\Omega = \frac{(-\Omega_p) \Omega'_p}{\Omega'} \Rightarrow \langle \text{δεδομένου ότι } s = j\Omega \rangle$$

$$s = \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s'} \quad \langle \text{δηλαδή όπου } s \text{ αντικαθιστούμε } \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s} \rangle$$

Σημείωση: Ορίζεται την συνάρτηση  $y = \alpha/x$  (υπερβολή), όπου  $\alpha \neq 0$  είναι το σταθερό γινόμενο των  $x$  και  $y$ . Δηλαδή, σε οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής το γινόμενο των τεταγμένων επί την τεταγμένη είναι σταθερό και ίσο με  $\alpha$ .

Οι γραμμικές παραστάσεις για  $\alpha > 0$  και  $\alpha < 0$  είναι:



Για οποιοδήποτε σημείο  $A_i$  ισχύει  $x_i y_i = \alpha$

**ΑΣΚΗΣΗ** Να σχεδιαστείτε βιθνερατό αναλογικό φίλτρο το οποίο να εξασθενίση φωνοτονικά τις συχνότητες. Το φίλτρο κυρίως θέλω να πληροί τις εξής προδιαγραφές. Η εξασθένιση στη ζώνη διαόδου να είναι μικρότερη από 1/2 dB μέχρι τη συχνότητα των 100 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη απόκοσης να είναι μεγαλύτερη από 15 dB μετά τη συχνότητα των 600 Hz. Να σχεδιαστείτε την απόκριση συχνότητας.

**ΛΥΣΗ** Το ότι το σύστημα πρέπει να εξασθενίση φωνοτονικά τις συχνότητες μας παραπέμπει σε φίλτρο τύπου Butterworth. Με βάση τις προδιαγραφές μπορούμε να υπολογίσουμε την τάξη του φίλτρου. Ακολουθώντας, από το πρώτο βιθνερατό Butterworth βρίσκουμε το επιθυμητό φίλτρο εφαρμόζοντας μετασχηματισμό συχνότητας στον αναλογικό χώρο από βιθνερατό σε βιθνερατό.

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi F_p = 2\pi \cdot 100 \text{ rad/sec} & (1) \\ \text{Όριο ζώνης διαόδου: } -10 \log_{10} \left( \frac{1}{1+\epsilon^2} \right) &= -0.5 \Rightarrow \epsilon^2 = 0.122 & (2) \\ \text{Όριο ζώνης απόκοσης: } -10 \log_{10} \left( \frac{1}{A^2} \right) &= -15 \Rightarrow A^2 = 31.623 & (3) \\ \omega_s &= 2\pi F_s = 2\pi \cdot 600 \text{ rad/sec} & (4) \end{aligned}$$

$$\text{Τάξη φίλτρου: } N = \frac{\log_{10} [(A^2-1)/\epsilon^2]}{2 \log_{10} (\omega_s/\omega_p)} = \frac{\log_{10} [30.623/0.122]}{2 \cdot \log_{10} (600/100)} = \frac{\log_{10} (251.01)}{2 \log_{10} (6)} = \frac{2.4}{1.56} = 1.54 \quad (5)$$

Άρα το βιθνερατό φίλτρο θα πρέπει να είναι 2ης τάξης ( $N=2$ ), οπότε το φίλτρο της απόκοσης συχνότητας θα είναι:  $|H(\Omega)| = \frac{1}{(1+\epsilon^2(\Omega/\omega_p)^{2N})^{1/2}}$  όπου  $\epsilon^2=0.122$  και  $\omega_p=200\pi$  rad/sec (B2, Matlab Code D)

Το πρώτο βιθνερατό φίλτρο Butterworth 2ης τάξης είναι:

$$H_p(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (6)$$

Το επιθυμητό βιθνερατό φίλτρο προκύπτει από το πρώτο βιθνερατό φίλτρο του μετασχηματισμού συχνότητας "βιθνερατό-βιθνερατό" ως εξής:

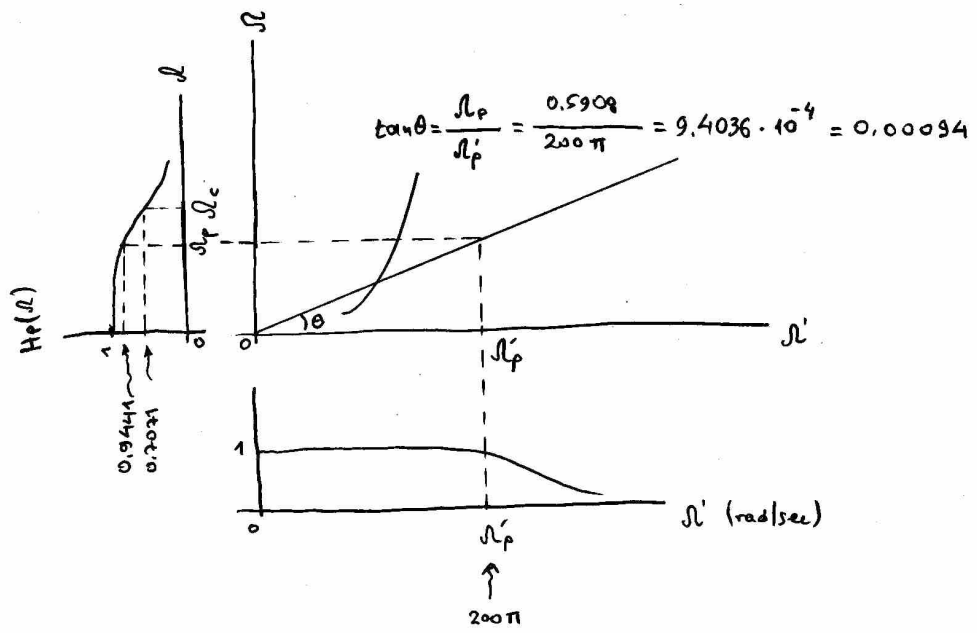
$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\omega_p}{\omega} s = \frac{0.5908}{200\pi} s} = \frac{1}{\alpha^2 s^2 + \sqrt{2} \alpha s + 1} \quad (7)$$

$\alpha = 0.00094$

Η απόκριση συχνότητας προκύπτει από τον (7) για  $s = j\Omega$

$$H_{LP}(j\Omega) = \frac{1}{-\alpha^2 \Omega^2 + j\alpha\sqrt{2}\Omega + 1} = \frac{1}{\underbrace{(1-\alpha^2 \Omega^2)}_A + j \underbrace{\alpha\sqrt{2}\Omega}_B} \quad (8)$$

$|H_{LP}(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$   
 $\angle H_{LP}(j\Omega) = -\tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (9)$



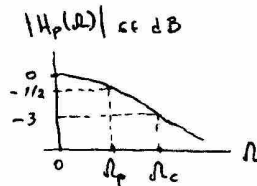
## Συμπίεση

Για τον υπολογισμό της συχνότητας (7) εφαρμόζεται τον μετασχηματισμό συχνότητας "βαθμονεματί - σε - βαθμονεματί"  $s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega_c} s$ , όπου  $\Omega_p$  είναι η συχνότητα του

κανονικοποιημένου φίλτρου για την οποία η εστιακή κλίση είναι  $-1/2$  dB.

Ας υποθέσουμε ότι για τη συχνότητα αποκοπής  $\Omega_c = 1$  η εστιακή κλίση είναι  $-3$  dB.

Άρα η συχνότητα  $\Omega_p \leq \Omega_c$ ,



Η συχνότητα  $\Omega_p$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση του πρωτότυπου φίλτρου ως εξής:

$$H_p(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \xrightarrow{s=j\Omega} H_p(\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2 + j\sqrt{2}\Omega + 1} = \frac{1}{(1-\Omega^2) + j\sqrt{2}\Omega}$$

$$\Rightarrow |H_p(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 2\Omega^2}} \quad (10)$$

Στην συχνότητα  $\Omega = \Omega_p$  το φίλτρο θα είναι  $-1/2$  dB, δηλαδή

$$|H_p(\Omega_p)| = -\frac{1}{2} \text{ dB} \Rightarrow 20 \log_{10} |H_p(\Omega_p)| = -\frac{1}{2} \Rightarrow |H_p(\Omega_p)| = 0.9441 \quad (11)$$

Άρα, με βάση την (11) και (10) γίνεται:

$$0.9441 = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega_p^2)^2 + 2\Omega_p^2}} \Rightarrow (1-\Omega_p^2)^2 + 2\Omega_p^2 = \frac{1}{(0.9441)^2} \Rightarrow \langle \text{Θέτω } \Omega_p^2 = q \rangle$$

$$(1-q)^2 + 2q = 1.1219 \Rightarrow$$

$$1 - 2q + q^2 + 2q = 1.1219 \Rightarrow q^2 = 0.1219 \Rightarrow q = 0.3491 \Rightarrow \Omega_p^2 = 0.3491 \Rightarrow \Omega_p = 0.5908 \quad (12)$$



Εκκλιετική την  $\beta_p$   $\beta_c$  τη φασίαζε να την υπολογίσετε όπως παρακάτω:

Η συχνότητα  $\beta_p$  του πρωτότυπου φίλτρου, δηλαδή του φίλτρου που έχει  $\beta_c=1$ , υπολογίζεται ως:

$$\frac{1}{1+(\beta_p/\beta_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \Rightarrow$$

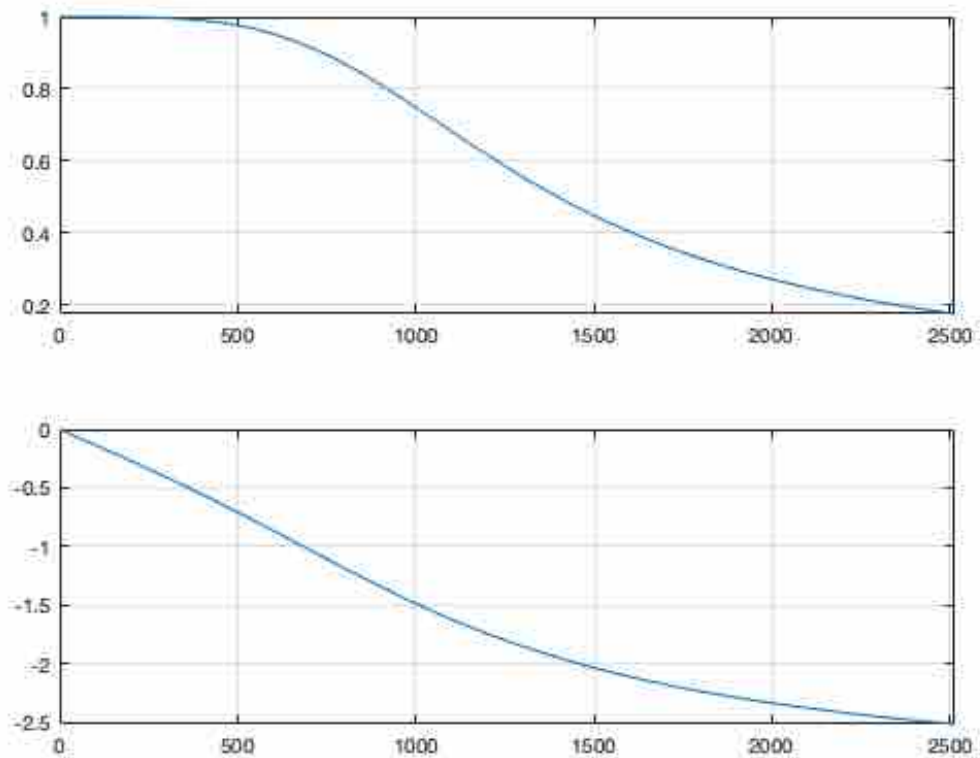
$$\frac{1}{1+(\beta_p/1)^{2 \cdot 2}} = \frac{1}{1+0.122} \Rightarrow$$

$$1+\beta_p^4 = 1+0.122 \Rightarrow$$

$$\beta_p = \sqrt[4]{0.122} \Rightarrow$$

$$\beta_p = 0.591$$

## ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ (ΜΕΤΡΟ & ΦΑΣΗ)



```
% Matlab code A
```

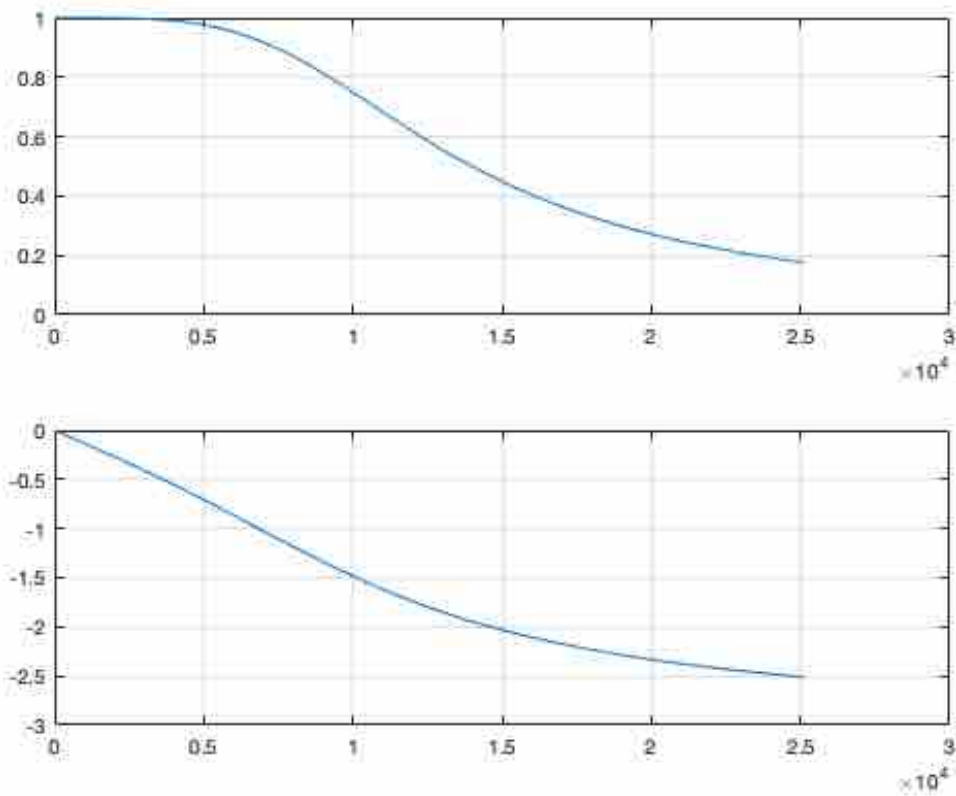
```
clc  
clear all  
close all
```

```
Wp = 0.5908; % Wp: frequency at the edge of the passband of  
the normalised filter  
Wpp = 200*pi; % Wpp (Wp'): frequency at the edge of the  
passband of the filter  
w = Wp / Wpp;
```

```
Hmag = @(W) 1 / sqrt( (1-(w*W)^2)^2 + 2 * (w*W)^2 );  
Hpha = @(W) -atan2(sqrt(2)*(w*W), (1-(w*W)^2));
```

```
subplot(2,1,1); fplot(Hmag,[0 800*pi]); grid on  
subplot(2,1,2); fplot(Hpha,[0 800*pi]); grid on
```

-----



```
% Matlab code B
```

```
clc
clear all
close all
```

```
Wp = 0.5908; % Wp: frequency at the edge of the passband of
the normalised filter
Wpp = 200*pi; % Wpp (Wp'): frequency at the edge of the
passband of the filter
w = Wp / Wpp;
```

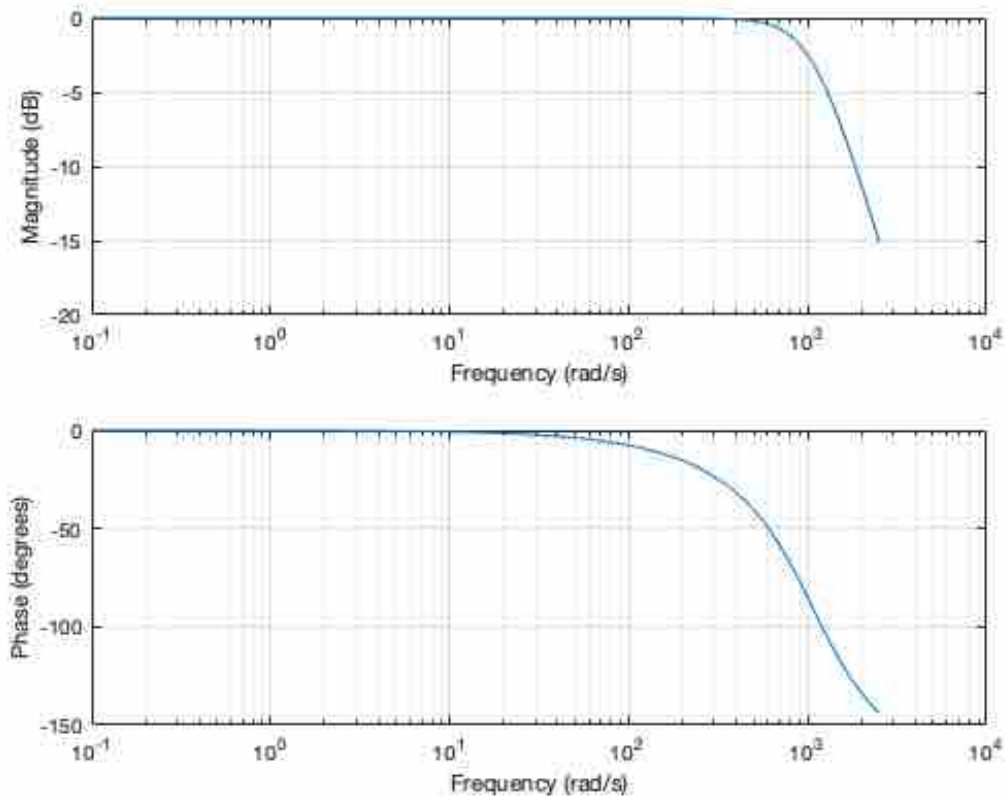
```
b = [0 0 1];
a = [w*w w*sqrt(2) 1];
```

```
W = 0:0.1:800*pi;
```

```
H = freqs(b,a,W);
```

```
subplot(2,1,1); plot(abs(H)); grid on
subplot(2,1,2); plot(angle(H)); grid on
```

-----



```
% Matlab code C
```

```
Wp = 0.5908; % Wp: frequency at the edge of the passband of
the normalised filter
Wpp = 200*pi; % Wpp (Wp'): frequency at the edge of the
passband of the filter
```

```
w = Wp / Wpp;
```

```
b = [0 0 1];
```

```
a = [w*w w*sqrt(2) 1];
```

```
W = 0:0.1:800*pi;
```

```
H = freqs(b,a,W);
```

```
Hmag = abs(H); Hphase = angle(H); Hphasedeg = Hphase*180/pi;
```

```
subplot(2,1,1); semilogx(W,db(Hmag)); grid on
```

```
xlabel('Frequency (rad/s)')
```

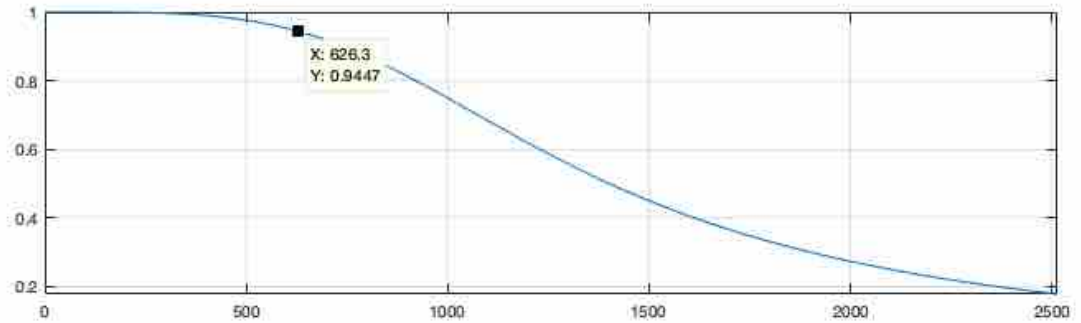
```
ylabel('Magnitude (dB)')
```

```
subplot(2,1,2); semilogx(W,Hphasedeg); grid on
```

```
xlabel('Frequency (rad/s)')
```

```
ylabel('Phase (degrees)')
```

```
-----
```



```
% Matlab code D
```

```
clc
clear all
close all
```

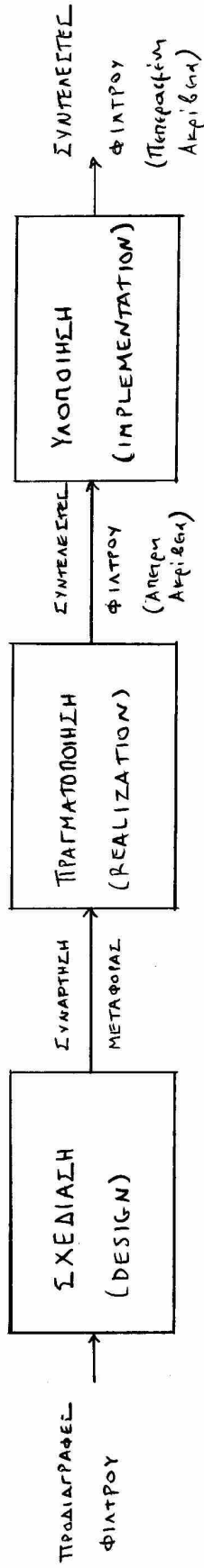
```
N=2;
epsilon=0.122;
Wp=2*pi*100;
```

```
Hmag = @(W) 1 / sqrt((1 + epsilon * (W/Wp)^(2*N)));
```

```
subplot(2,1,1); fplot(Hmag,[0 800*pi]); grid on
```

```
-----
```

# Ψ Η Φ Ι Α Κ Α Φ Ι Λ Τ Ρ Α



- ο ΠΟΛΥ-ΜΗ ΔΕΝΙΚΑ (ΓΡΑΦ. Ή ΓΕΩΜΕΤΡ.)
- ο ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΑΥΡΩΝ
- ο ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΗ ΣΥΝΚΟΤΗΤΑ
- ο ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΦΙΛΤΡΑ
- ο ΑΝΕΙΣΗ (TRANSVERSAL)
- ο ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΦΑΣΗΣ
- ο ΣΤΡΟΓΓΥΛΕΥΣΗ / ΑΠΟΚΟΠΗ

## FIR

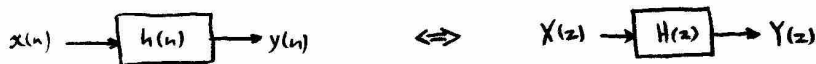
FINITE IMPULSE RESPONSE

- ο ΠΟΛΥ-ΜΗ ΔΕΝΙΚΑ
- ο ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ
- ο ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
- ο ΣΕ ΣΕΙΡΑ
- ο ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ
- ο ΚΒΑΝΤΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ → ΑΣΤΑΘΕΙΑ
- ο ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ
- ο ΣΤΡΟΓΓΥΛΕΥΣΗ → ΟΡΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

## IIR

INFINITE IMPULSE RESPONSE

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Ή ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$h(n)$ : χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο του χρόνου

$H(z)$ : χαρακτηρίζει το σύστημα στο πεδίο  $z$

$h(n)$ : απόκριση μοναδιαίου δείκτητος ή μοναδιαία κρουστική απόκριση

$H(z)$ : συνάρτηση συστήματος ή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$H(z)$  και  $h(n)$  είναι δύο ισοδύναμες περιγραφές ενός συστήματος σε δύο διαφορετικά πεδία.

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την γραμμική σταθερών συντελεστών εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Λαμβάνοντας τον ΜΖ και των δύο μελών και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολιγόθεσης, στον χρόνο έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Συνεπώς ένα ΓΧΑ το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών (difference equation) με σταθερούς συντελεστές, έχει μια ρητή (rational) συνάρτηση συστήματος.

Περίπτωση 1:  $\alpha_k = 0 \rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$

Η  $H(z)$  έχει  $M$  μηδενικά (zeros) και ένα πόλο (pole) πολλαπλότητας  $M$  στην αρχή των αξόνων  $z=0$ .

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-μηδενικά (all-zero system).

Επίσης, το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη χρονική απόκριση γι' αυτό και ονομάζεται FIR σύστημα. (FIR: Finite Impulse Response)

Τέλος ονομάζεται και σύστημα κινώμενου μέσου όρου (MA: Moving Average).

Περίπτωση 2:  $b_k = 0 \rightarrow H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{N-k}} \quad \alpha_0 \equiv 1$

Η  $H(z)$  έχει  $N$  πόλους και ένα μηδενικό πολλαπλότητας  $N$  στην αρχή των αξόνων  $z=0$ .

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα με όλο-πόλους (all-pole system).

Η ύπαρξη των πόλων οδηγεί σε μια απόκριση των συστήματος άπειρης διάρκειας γι' αυτό και ονομάζεται IIR σύστημα (IIR: Infinite Impulse Response)

Περίπτωση 3:  $\alpha_k \neq 0, b_k \neq 0 \rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}}$

Πρόκειται για τη γενική περίπτωση. Η  $H(z)$  έχει  $N$  πόλους και  $M$  μηδενικά. Οι πόλοι και τα μηδενικά στο  $z=0$  και  $z=\infty$  δεν προετερώνονται.

Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα πόλων-μηδενικών (pole-zero system).

Λόγω της ύπαρξης των πόλων, το σύστημα αυτό είναι IIR.



ΕΡΩΤΗΣΗ: Γιατί η συνάρτηση μεταφοράς να είναι εκφρασμένη ως  $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)}}$  ;  
 Διότι, γιατί δε πρέπει  $\alpha_0 = 1$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όλε ξεκινάμε από τη συνάρτηση (εταφοράς)  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad (1)$

(Σημείωση: Το εύρος των όρων των αλφαικών είναι  $M-1$  και  $N-1$  και όχι  $M$  και  $N$ , δεν έχει εκφίση σταθεράς).

Παράγουμε τον παρονομαστή της (1). Τον έχω γράψει ως  $1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}$ .  
 Το έχω αυτό για να φέρω να υπολογίσω την εξίσωση διαφορών του συστήματος, ως εξής:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k} Y(z)$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k y(n-k)$$

Είναι φανερό ότι η φωνάδα στον παρονομαστή δε βοηθάει για να βρω εύκολα το  $Y(z)$  και εν συνεχεία το  $y(n)$ .

→ Εάν η συνάρτηση  $H(z)$  δεν είναι εκφρασμένη έτσι, αλλά γενικά ως λόγος δύο πολυωνύμων, π.χ.  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}}$ , τότε φέρω

να μου φέρω στη μορφή της (1), διααιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το  $d_0$ .

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} c_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} d_k z^{-k}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-(M-1)}}{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)}} = \langle \text{διαίρω με } d_0 \rangle =$$

$$= \frac{\frac{c_0}{d_0} + \frac{c_1}{d_0} z^{-1} + \frac{c_2}{d_0} z^{-2} + \dots + \frac{c_{M-1}}{d_0} z^{-(M-1)}}{1 + \frac{d_1}{d_0} z^{-1} + \dots + \frac{d_{N-1}}{d_0} z^{-(N-1)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k z^{-k}} \quad \text{όπου} \quad b_k = \frac{c_k}{d_0} \quad \text{και} \quad \alpha_k = \frac{d_k}{d_0}$$

Άσκηση Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Λύση

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} + \frac{1}{2}}{e^{j\omega} - \frac{1}{2}} = \frac{\cos\omega + j\sin\omega + \frac{1}{2}}{\cos\omega + j\sin\omega - \frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2} + \cos\omega) + j\sin\omega}{(-\frac{1}{2} + \cos\omega) + j\sin\omega} =$$

$$= \frac{C e^{ja}}{D e^{j\beta}} = \frac{C}{D} e^{j(a-\beta)} \quad \text{όπου}$$

$$C = \sqrt{(\frac{1}{2} + \cos\omega)^2 + \sin^2\omega} = \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\omega + \underbrace{\cos^2\omega + \sin^2\omega}_1} = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\omega}$$

$$D = \sqrt{(-\frac{1}{2} + \cos\omega)^2 + \sin^2\omega} = \sqrt{\frac{1}{4} - \cos\omega + \underbrace{\cos^2\omega + \sin^2\omega}_1} = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

$$a = \tan^{-1} \frac{\sin\omega}{\frac{1}{2} + \cos\omega}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sin\omega}{-\frac{1}{2} + \cos\omega}$$

Για να προσδιορίσουμε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, υπολογίζουμε αυτό για κάποιες κριτικές συχνότητες, όπως για  $\omega=0$ ,  $\omega=\frac{\pi}{2}$ ,  $\omega=\pi$ .

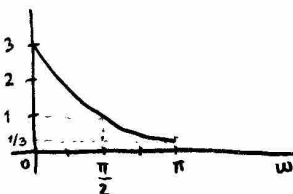
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{C}{D} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + \cos\omega}{\frac{5}{4} - \cos\omega}}$$

$$\text{Για } \omega=0 \rightarrow |H(e^{j0})| = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + 1}{\frac{5}{4} - 1}} = \sqrt{\frac{9}{1}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Για } \omega=\frac{\pi}{2} \rightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + 0}{\frac{5}{4} - 0}} = 1$$

$$\text{Για } \omega=\pi \rightarrow |H(e^{j\pi})| = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{5}{4} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$|H(e^{j\omega})|$



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος  $H(z) = \frac{0.2}{1-0.8z^{-1}}$

ΛΥΣΗ Α' τρόπος:  $H(z) = \frac{0.2z}{z-0.8} \rightarrow$  μηδενικό στο  $z=0$  και πόλος  $z=0.8$

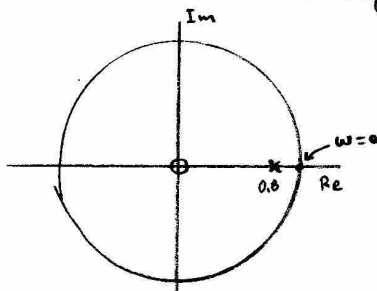
$$|H(e^{j\omega})| = 0.2 \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega}-0.8|} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos \omega}} \quad \leftarrow \text{μέτρο}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \omega - \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{\cos \omega - 0.8} \quad \leftarrow \text{φάση}$$

Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης δίνονται στο πρώτο και τρίτο σχήμα παραπάνω. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο του μέτρου εμφανίζεται στη συχνότητα  $\omega=0$ , δηλαδή στο σημείο εκείνο του φωνοδιαίω κύχλου όπου βρίσκεται πλησιέστερα ο πόλος.

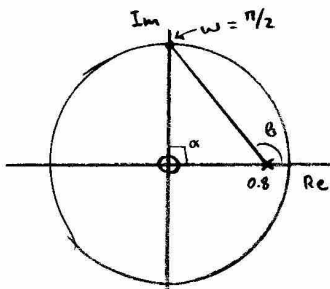
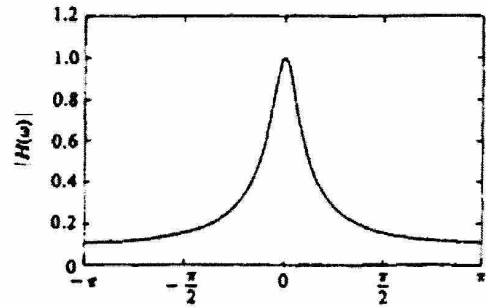
Η απόκριση μέτρου σε dB (decibels) υπολογίζεται από τη σχέση  $|H(e^{j\omega})|_{dB} = 20 \log_{10}(0.2) + 20 \log_{10}|e^{j\omega}| - 20 \log_{10}|e^{j\omega}-0.8|$  και δείχνεται στο δεύτερο κυματογράφο του σχήματος.

Β' τρόπος: Γραφικός ή γεωμετρικός υπολογισμός



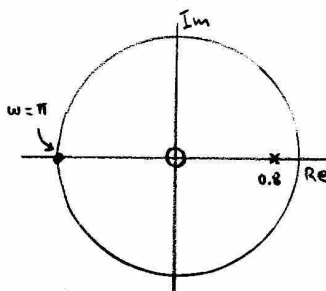
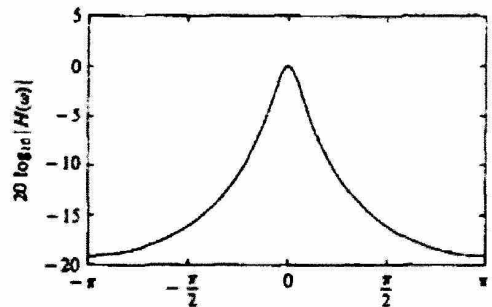
$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 0.2 \frac{1}{0.2} = 1$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$



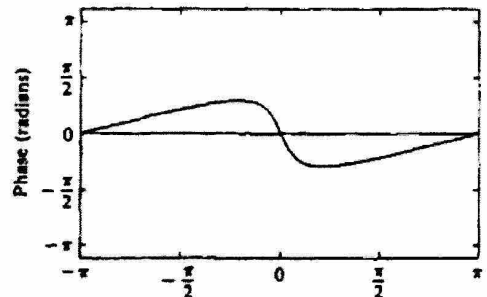
$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/2} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{1+0.8^2}} = 0.15$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \alpha - \beta = \dots \text{μικρότερο του μηδένος}$$



$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0.2 \frac{1}{1.8} = 0.11$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = 0^\circ$$



Συμπίεση: Το κέρδος του συστήματος έχει επιλεγεί να είναι 0.2, δηλαδή  $1-0.8$ , όπου 0.8 είναι ο πόλος του συστήματος, ώστε η απόκριση συχνότητας αυτή να είναι 1 για  $\omega=0$ .

Αναλυτικοί οι ηαίτες υπολογισού τέρεου και φάσης

$$\begin{aligned} H(z) = 0.2 \frac{z}{z-0.8} &\rightarrow H(e^{j\omega}) = 0.2 \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.8} = 0.2 \frac{e^{j\omega}}{\cos\omega + j\sin\omega - 0.8} = \\ &= 0.2 \frac{e^{j\omega}}{(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= 0.2 \frac{|e^{j\omega}|}{|(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega|} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{(\cos\omega - 0.8)^2 + \sin^2\omega}} = \\ &= 0.2 \frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega + 0.8^2 - 2 \cdot 0.8 \cos\omega + \sin^2\omega}} = 0.2 \frac{1}{\sqrt{1 + 0.64 - 1.6 \cos\omega}} = \\ &= \frac{0.2}{\sqrt{1.64 - 1.6 \cos\omega}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) &= \angle \text{Αριθμητή} - \angle \text{Παρονομαστή} = \langle \text{από την (1) είναι } \rangle \\ &= \angle 0.2 e^{j\omega} - \angle (\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega = \\ &= \omega - \tan^{-1} \frac{\sin\omega}{\cos\omega - 0.8} \end{aligned}$$

Εστω ότι έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό  $x + jy$ . Όταν θέλουμε να βρούμε τη φάση αυτού του αριθμού μας ενδιαφέρουν τα πρόσημα των  $x$  και  $y$ . Γι' αυτό αντί για  $\arctan(y/x)$  χρησιμοποιούμε το  $\text{atan2}(y,x)$ .

Ισχύει ότι:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Στη δική μας περίπτωση ο μιγαδικός αριθμός είναι  $(\cos\omega - 0.8) + j\sin\omega$ .

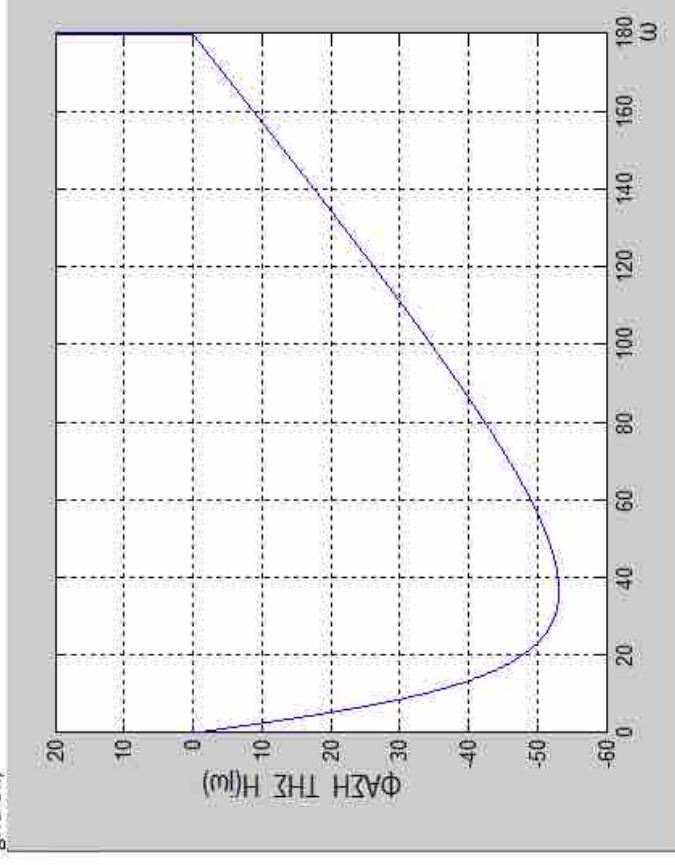
Δηλαδή  $x = \cos\omega - 0.8$  και  $y = \sin\omega$

Είναι  $H(j\omega) = \omega - \text{atan2}(\sin\omega / (\cos\omega - 0.8))$

Με τον κώδικα MATLAB δεξιά παίρνουμε το διάγραμμα φάσης του μιγαδικού μας αριθμού.

Κώδικας MATLAB

```
w = 0:0.0001:180;
phase_H = w - atan2(sind(w),(cosd(w) - 0.8) ) * 180/pi ;
plot(w,phase_H) ;
axis([0 180 -60 20]);
grid on;
```



Παράδειγμα

Το σύστημα  $H_1(z) = (1-a) \frac{1}{1-az^{-1}}$  έχει ένα μηδενικό στο  $z=0$  και έναν πόλο στο  $z=a$ . Ο παράγοντας κλιμάκωσης  $(1-a)$  διαφορώνει το συνολικό κέρδος του συστήματος ώστε να είναι 1 για  $\omega=0$ .

Οι αποκρίσεις φέδρου και φάσης του συστήματος  $H_1(z)$  για  $\alpha=0.9$  φαίνονται στο σχήμα.

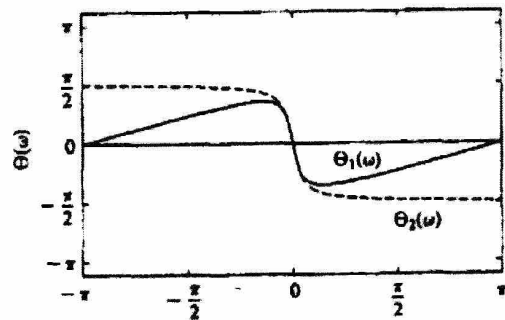
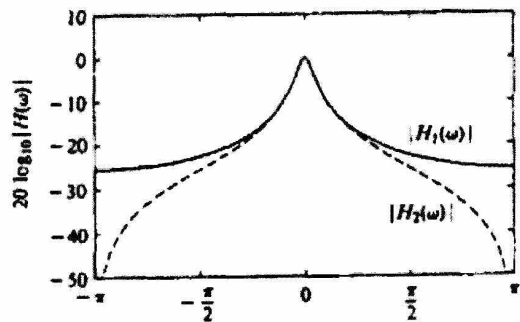
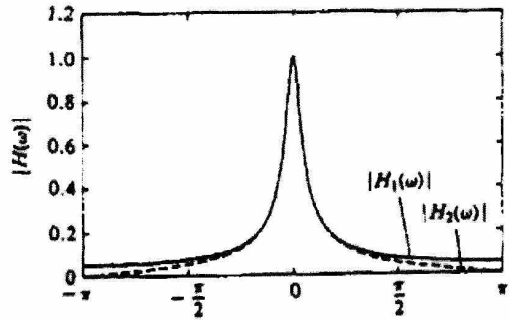
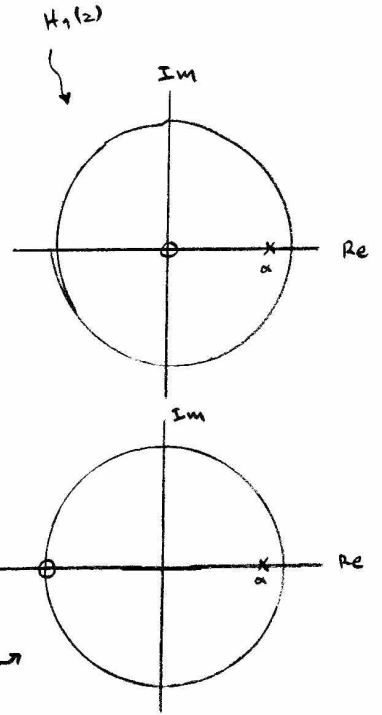
Η μετατόπιση του μηδενικού στο  $z=-1$  συμβάλλει στην επιπλέον εξαθρόνιση του σήματος στις υψηλές συχνότητες ( $\omega=\pi$ ). Η νέα συνάρτηση μεταφοράς γίνεται

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Οι αποκρίσεις συχνότητας της  $H_2(z)$  δείχνονται στο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές.

Παρατηρήστε ότι ο παράγοντας κλιμάκωσης της  $H_2(z)$  έχει γίνει τώρα  $\frac{1-a}{2}$  ώστε και πάλι το κέρδος να είναι ίσο με τη μονάδα για  $\omega=0$ .

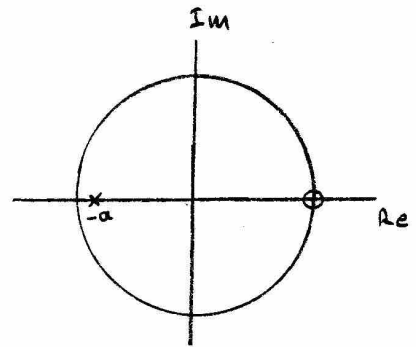
Τα φίλτρα και στις δύο περιπτώσεις είναι βαθυερατά (lowpass).



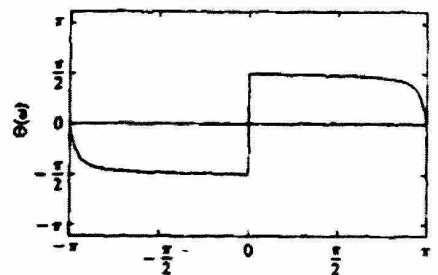
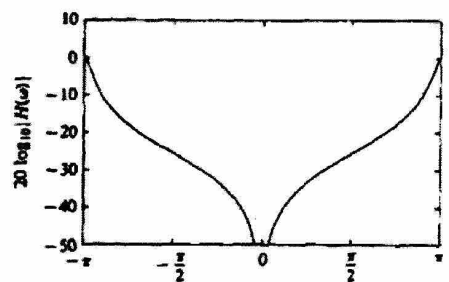
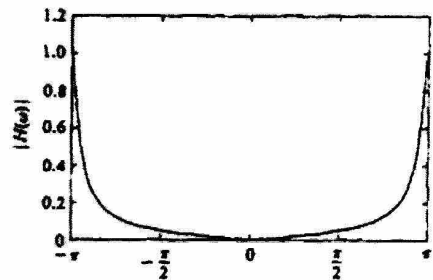
Παράδειγμα (συνέχεια)

Η συνάρτηση  $H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$  έχει προκύψει

από τον καταπριβό των πόλων και μηδενικών της  $H_2(z)$  γύρω από τον άξονα των πραγματικών στο επίπεδο-z,



Σχεδιάζοντας τις γραμμικές παραστάσεις για  $a=0.9$  της απόκρισης συχνότητας παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα υψηλεράτο (high pass) φίλτρο.



ΑΣΚΗΣΗ Ένα βιθυπερατό φίλτρο με δύο πόλους έχει συνάρτηση μεταφοράς

$H(z) = \frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$ , Να υπολογιστούν οι τιμές  $b_0$  και  $p$  ώστε η απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  να ικανοποιεί τις συνθήκες:  $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$ ,  $|H(e^{j\omega})|^2|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ Για  $\omega=0$  έχουμε:  $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \Rightarrow b_0 = (1-p)^2$

$$\begin{aligned} \text{Για } \omega = \frac{\pi}{4} \text{ έχουμε: } H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{4}} &= H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \frac{\overbrace{(1-p)^2}^{b_0}}{(1-p e^{-j\frac{\pi}{4}})^2} = \\ &= \frac{(1-p)^2}{(1-p \cos \frac{\pi}{4} + j p \sin \frac{\pi}{4})^2} = \\ &= \frac{(1-p)^2}{(1-p/\sqrt{2} + j p/\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

Με βάση το δεδομένο ότι  $|H(e^{j\frac{\pi}{4}})|^2 = \frac{1}{2}$  βρίσκουμε:

$$\frac{(1-p)^4}{[(1-p/\sqrt{2})^2 + p^2/2]^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1+p^2 - \sqrt{2}p \Rightarrow p = 0.32$$

Άρα

$$H(z) = \frac{0.46}{(1-0.32z^{-1})^2}$$

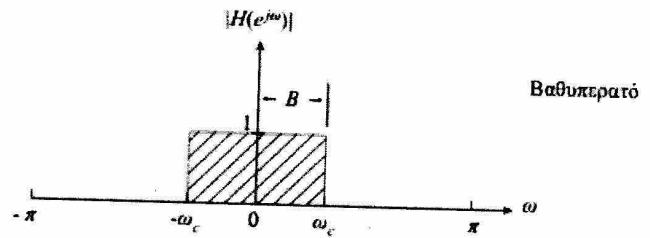


## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ-ΣΕ-ΥΨΗΠΕΡΑΤΟ

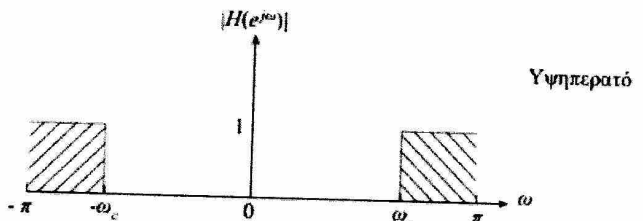
Έστω  $h_{lp}(n)$  η κρουστική απόκριση ενός πρωτότυπου βαθυπερατού φίλτρου.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η απόκριση συχνότητας ενός υψηπερατού φίλτρου είναι ίδια με εκείνη του βαθυπερατού, αλλά μετατοπισμένη κατά  $\pi$  ακτινίδια.

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$



Με βάση τις ιδιότητες, μετατόπιση στη συχνότητα κατά  $\pi$  ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό της κρουστικής απόκρισης  $h_{lp}$  επί  $e^{j\pi n}$ , δηλαδή



$$h_{hp}(n) = e^{j\pi n} h_{lp}(n) =$$

$$= (e^{j\pi})^n h_{lp}(n) =$$

$$= (-1)^n h_{lp}(n) \quad \text{ισοδύναμα} \quad h_{lp}(n) = (-1)^n h_{hp}(n) \leftarrow \text{μετασχηματισμός από highpass σε lowpass}$$

Άρα, η κρουστική απόκριση του υψηπερατού φίλτρου προκύπτει από εκείνη του βαθυπερατού, αλλάζοντας το πρόσημο των συντελεστών  $h_{lp}(n)$  που αντιστοιχούν σε περιττά δείκτη.

Στην περίπτωση που το βαθυπερατό φίλτρο περιγράφεται μέσω της εξίσωσης διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

δηλαδή η απόκριση συχνότητας είναι

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

τότε η απόκριση συχνότητας του αντίστοιχου υψηπερατού προκύπτει με αντικατάσταση του  $\omega$  με  $\omega - \pi$

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k e^{-j\omega k}}$$

οπότε η εξίσωση διαφορών του υψηπερατού είναι

$$y(n) = \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y(n-k)$$

δηλαδή αλλάζει το πρόσημο των συντελεστών που αντιστοιχούν σε περιττά κωδικοποίηση.

Παράδειγμα Να μετατραπεί το βιβλιονικό φίλτρο με εξίσωση διαφορών

$$y(n) = 0.1x(n) + 0.9y(n-1)$$

σε υψηλεράτο.

Λύση

Η εξίσωση διαφορών του υψηλεράτου προκύπτει από την αντίστοιχη του βιβλιονικού με αλλαγή του προσήμου των συντελεστών που αντιστοιχούν σε περριτές καθυστερήσεις. Άρα  $y(n) = 0.1x(n) - 0.9y(n-1)$

Αναλυτικά για την αίσωση αυτή έχουμε:

| Βιβλιονικό  | Υψηλεράτο   |
|---|---|
| $y(n) = 0.1x(n) + 0.9y(n-1)$  | $y(n) = 0.1x(n) - 0.9y(n-1)$  |
| $H(z) = \frac{0.1}{1 - 0.9z^{-1}}$  | $H(z) = \frac{0.1}{1 + 0.9z^{-1}}$  |
|   |   |
| $\omega=0 \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=0} = \frac{0.1}{0.1} = 1$   | $\omega=0 \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=0} = 0.1 \frac{1}{1+0.9} = 0.053$                                 |
| $\omega=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=\frac{\pi}{2}} = 0.1 \frac{1}{\sqrt{1+0.81}} = 0.074$ | $\omega=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=\frac{\pi}{2}} = 0.1 \frac{1}{\sqrt{1+0.81}} = 0.074$ |
| $\omega=\pi \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=\pi} = 0.1 \frac{1}{1+0.9} = 0.053$                             | $\omega=\pi \rightsquigarrow  H(e^{j\omega}) _{\omega=\pi} = 0.1 \frac{1}{0.1} = 1$                                   |
|   |   |

## Παράδειγμα σχεδιασμού φίλτρου εγκοπής (notch filter)

Να σχεδιαστεί φίλτρο το οποίο να αποκόπη τη συχνότητα των 50 Hz.  
Η συχνότητα δειγματοληψίας του συστήματος είναι 400 Hz.

Λύση

Η συχνότητα  $\omega_0$  την οποία θέλουμε να κλαψίψουμε υπολογίζεται από τη σχέση  $\omega = \Omega T$ .

$$\omega_0 = \Omega T = 2\pi F_0 \cdot \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_0}{F_s} = 2\pi \frac{50 \text{ Hz}}{400 \text{ Hz}} = \frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς για να μηδενίσουμε τη συγκεκριμένη συχνότητα, τοποθετούμε ένα μηδενικό (και το αντίστοιχο συζυγές του) πάνω στον μοναδιαίο κύκλο στη γωνία  $\omega_0$ , δηλαδή

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

Η συνάρτηση συστήματος (συνάρτηση μεταφοράς) του FIR φίλτρου που προκύπτει είναι (\*)

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 (1 - e^{j\omega_0} z^{-1}) (1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) = \\ &= b_0 (1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned}$$

Το φίλτρο και η φάση του φίλτρου αυτού φαίνεται στο πρώτο σχήμα της επόμενης σελίδας. Παρατηρούμε ότι η απόκριση φίλτρου παρουσιάζει μεγάλο εύρος συχνοτήτων γύρω από την επιθυμητή συχνότητα  $\omega_0$  που θέλουμε να αποκόψουμε. Για να βελτιώσουμε τα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας, τοποθετούμε έναν πόλο (και τον συζυγί του) πολύ κοντά στο υπάρχον μηδενικό. Πρακτικά, οι πόλοι πρέπει πάντα να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (δηλ.  $r < 1$ ) ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές. Το μέτρο των συζυγών μιγαδικών πόλων είναι

$$r_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$$

οπότε η συνάρτηση του συστήματος γίνεται πάλι:

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Οι απόκρισης συχνότητας (μέτρο και φάση) του συστήματος για  $b_0=1$ ,  $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $r=0.85$  και  $r=0.95$  φαίνονται στο δεύτερο και τρίτο σχήμα της επόμενης σελίδας.

Παρατηρούμε ότι η απόκριση βελτιώνεται (γίνεται πιο απότομη, δηλαδή φτάνεται το (-)ροί γωνία) συχνοτήτων που αποκόπηται και) καθώς ο πόλος πλησιάζει προς τον μοναδιαίο κύκλο.

Σημείωση: Οι συνάρτησης μεταφοράς για  $r=0.85$  και  $r=0.95$  είναι αντίστοιχα:

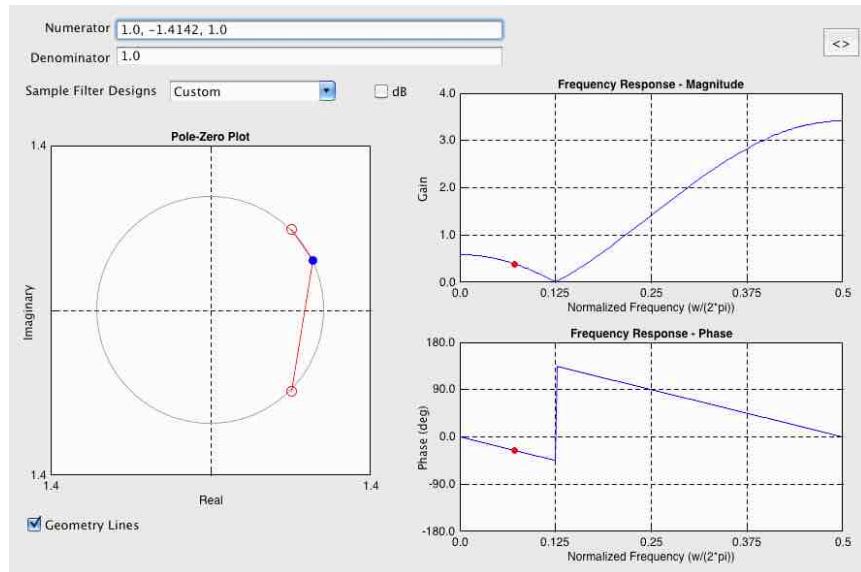
$$H(z) = \frac{1 - 1.4142 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.2021 z^{-1} + 0.7225 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1 - 1.4142 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.3435 z^{-1} + 0.9025 z^{-2}}$$

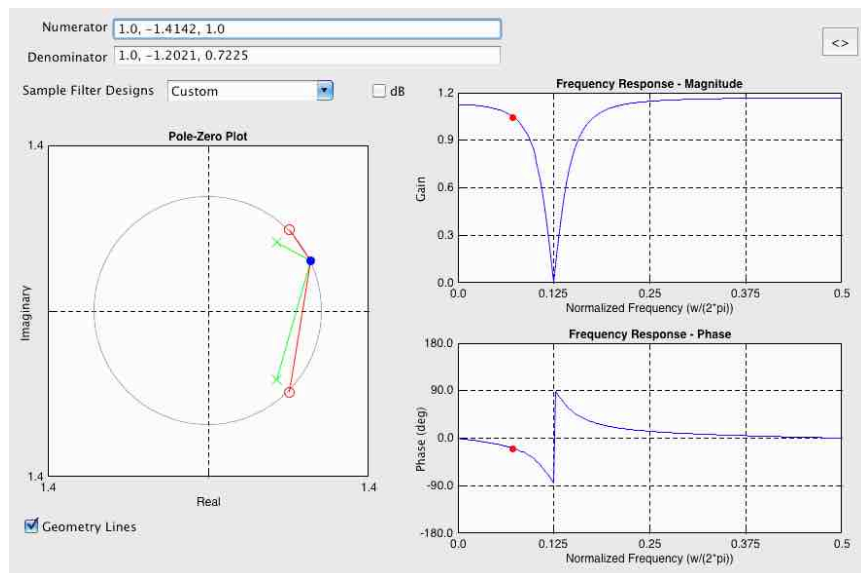
(\*) Θα μπορούσαμε να εixaφτ γράψει:  $H(z) = b_0 (z - z_1)(z - z_2) = b_0 (z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0}) = b_0 \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{z^{-2}}$

Ο διπλός πόλος στο  $z=0$  δεν αλλάζει τη μορφή της απόκρισης συχνότητας.

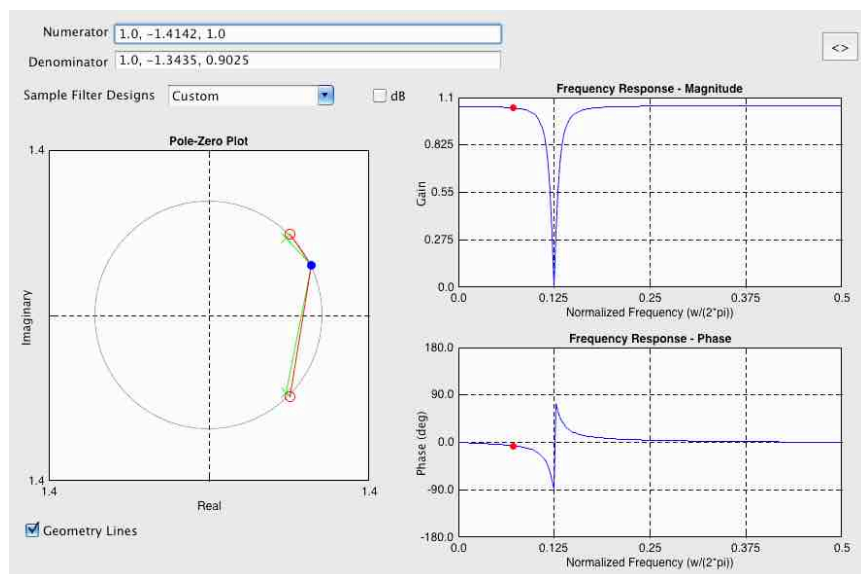
Φίλτρο εγκοπής (notch) με ένα μόνο μηδενικό (και το συζυγές του) στη συχνότητα  $\omega = \pi/4$



Φίλτρο εγκοπής (notch) με μηδενικό και πόλο σε απόσταση  $r=0.85$  (και τα συζυγή τους) στη συχνότητα  $\omega = \pi/4$



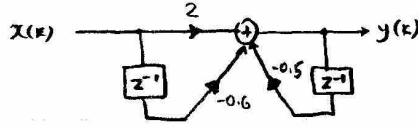
Φίλτρο εγκοπής (notch) με μηδενικό και πόλο σε απόσταση  $r=0.95$  (και τα συζυγή τους) στη συχνότητα  $\omega = \pi/4$



ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ & ΜΗ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

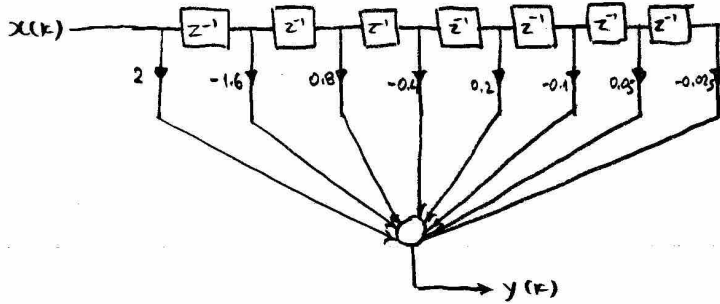
Παράδειγμα  
Αναδρομικός  
Προσχηματισμός

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \rightarrow y(k) = 2x(k) - 0.6x(k-1) - 0.5y(k-1)$$



Παράδειγμα  
Μη-Αναδρομικός  
Προσχηματισμός

$$H(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \dots$$



↑  
Το αποτέλεσμα αυτό  
προέκυψε μετά από  
έξαρση (long  
division)

Οι συντελεστές δεν  
είναι ίδιοι από την  
κρουστική απόκριση  
(impulse response)  
του συστήματος.

Παρατηρείται ότι αυτοί είναι άπειροι,  
γι' αυτό και τα φίλτρα αυτά ονομάζονται  
Απόκριση Κρουστική Άπειρη ή  
(Infinite Impulse Response - IIR)

ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιάσετε ψηφιακό βιβλιογραφικό φίλτρο 1ης τάξης Butterworth με συχνότητα αποκοπής 30 Hz. Δίνεται ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.

ΛΥΣΗ Μέθοδος διγραπτικού μετασχηματισμού

Δίνεται  $F_c = 30 \text{ Hz}$  και  $F_s = 150 \text{ Hz}$

Βήμα 1 → Υπολογισμός επιθυμητής ψηφιακής κυκλικής συχνότητας  $\omega_c$

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{30}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση της παραμόρφωσης <sup>συχνότητας</sup> που θα προκύψει λόγω διγραπτικού μετασχηματισμού

$$\Omega_c' = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{2\pi}{10} = \tan \frac{\pi}{5} = 0,7265 \approx 0,73$$

Βήμα 3 → Αναλογικός μετασχ. συχνότητας από βιβλιογραφικό σε βιβλιογραφικό

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega_c'} s} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s = \frac{s}{0,73}} = \frac{1}{\frac{s}{0,73} + 1} = \frac{0,73}{s + 0,73}$$

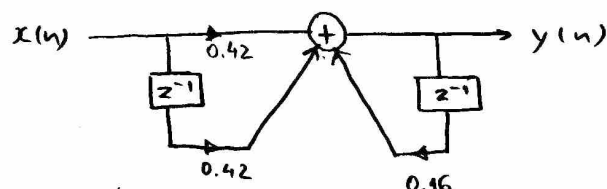
Βήμα 4 → Διγραπτικός μετασχηματισμός

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,73}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{0,73(z+1)}{z-1 + 0,73(z+1)} = \frac{0,73(z+1)}{1,73z - 0,27} = \frac{0,42(z+1)}{z - 0,16} = \frac{0,42(1+z^{-1})}{1 - 0,16z^{-1}}$$

Από την  $H(z) = Y(z)/X(z)$  και τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $z$  προκύπτει η εξίσωση διαφορών του φίλτρου

$$y(n] = 0,42 x[n] + 0,42 x[n-1] + 0,16 y[n-1]$$

και από αυτήν η δομή πραγματοποιήσεως



Σημείωση Καθολικά οι σχέσεις του διγραμμικού μετασχηματισμού είναι οι εξής:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}, \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{όπου } T = \frac{1}{F_s} \text{ η περίοδος δειγματοληψίας}$$

Όπως μπορούμε να δούμε παρακάτω, ο παράγοντας  $\frac{2}{T}$  αλληλοεξουδεκώνεται και αυτός είναι ο λόγος που δεν τον συμπεριλάβαμε στα προηγούμενα.

Βήμα 1 → Υπολογισμός ψηφιακής κυλιικής συχνότητας  $\omega_c$

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2 → Αντιστάθμιση παραμόρφωσης

$$\Omega_c' = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_c}{2} = 2 \cdot F_s \tan \frac{\omega_c}{2} = 2 \cdot 150 \tan \frac{2\pi}{10} = 217.95 \text{ rad/sec}$$

Βήμα 3 → Αναλογικός μετασχ. συχνότητας LP → LP

$$H_{LP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega_c'} s = \frac{1}{217.95} s} = \frac{1}{\frac{s}{217.95} + 1} = \frac{217.95}{s + 217.95}$$

Βήμα 4 → Διγραμμικός μετασχηματισμός

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 300 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{217.95}{300 \frac{z-1}{z+1} + 217.95} = \langle \text{διαίρει αριθρ. } \rightarrow \text{παράν. } f_c 300 \rangle =$$

$$= \frac{0.73}{\frac{z-1}{z+1} + 0.73} = \dots = \frac{0.42(z+1)}{z-0.16} = \frac{0.42(1+z^{-1})}{1-0.16z^{-1}}$$

Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν διαφορετικό, η συνάρτηση μεταφοράς είναι η ίδια.

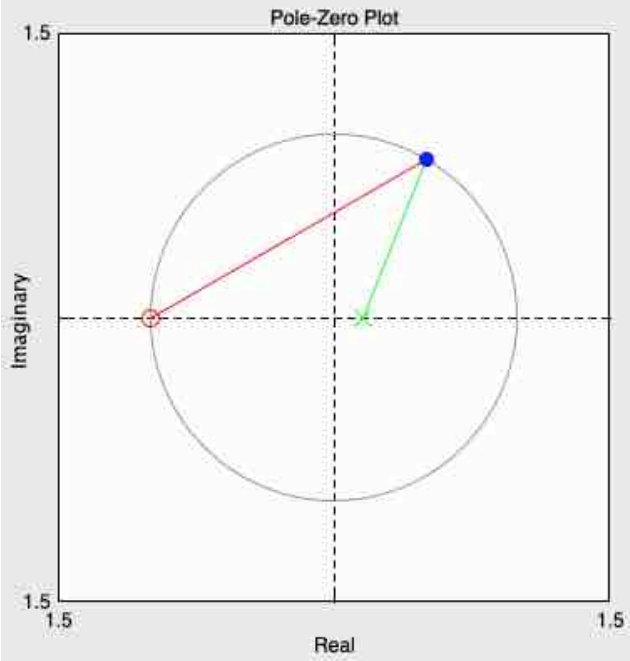
Numerator

Denominator

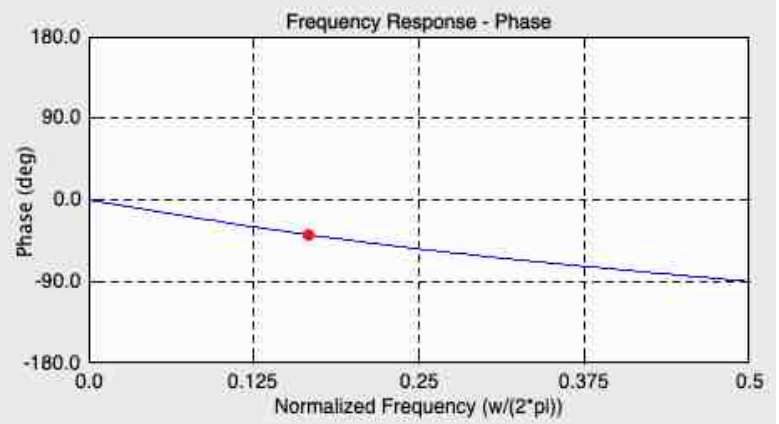
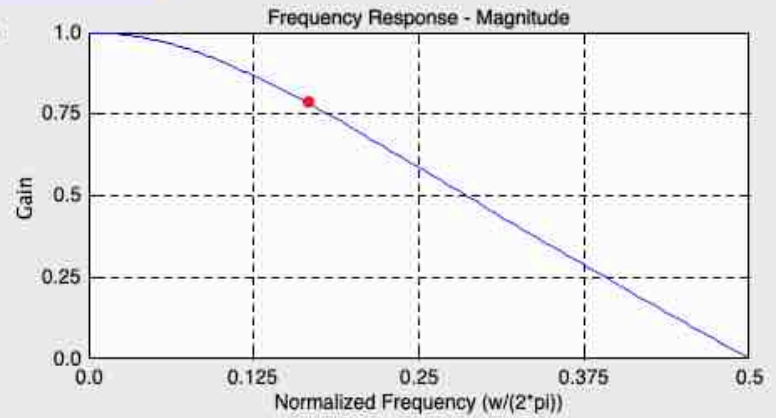


Sample Filter Designs

dB



Geometry Lines





ΑΣΚΗΣΗ Να σχεδιάσετε ψηφιακό υψιπερατό φίλτρο της τάξης Butterworth με συχνότητα κλιμακώσης 30 Hz για διαγαταολυψία συχνότητας 150Hz. Η σχεδίαση να βασιστεί στον διγραμμικό μετασχηματισμό.

ΛΥΣΗ  $F_c = 30 \text{ Hz}$ ,  $F_s = 150 \text{ Hz}$

Βήμα 1  $\rightarrow$  Υπολογισμός επιθυμητής ψηφιακής συχνότητας  $\omega_c$

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{30}{150} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Βήμα 2  $\rightarrow$  Αντιθέση της παραμόρφωσης που δε προέβει λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού

$$\Omega_c' = \tan \frac{\omega_c}{2} = \tan \frac{2\pi}{10} = \tan \frac{\pi}{5} = 0.7265 \approx 0.73$$

Βήμα 3  $\rightarrow$  Ανάλυση μετασχηματισμού και μεταφορά στο υψιπερατό

$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c \Omega_c'}{s}} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s = \frac{0.73}{s}} = \frac{1}{\frac{0.73}{s} + 1} = \frac{s}{s+0.73}$$

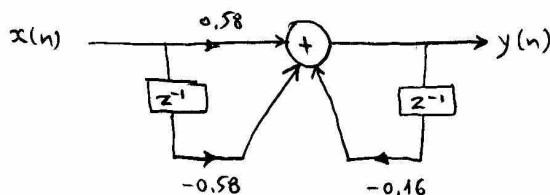
Βήμα 4  $\rightarrow$  Διγραμμικός μετασχηματισμός

$$H(z) = H_{HP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{s}{s+0.73} \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 0.73} = \frac{z-1}{1.73z - 0.27} = \frac{0.58(1-z^{-1})}{1 - 0.16z^{-1}}$$

Η εξίσωση διαφορών προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό z της  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$y(n) = 0.58 x(n) - 0.58 x(n-1] + 0.16 y(n-1)$$

και η δομή προγραμματισμού είναι:



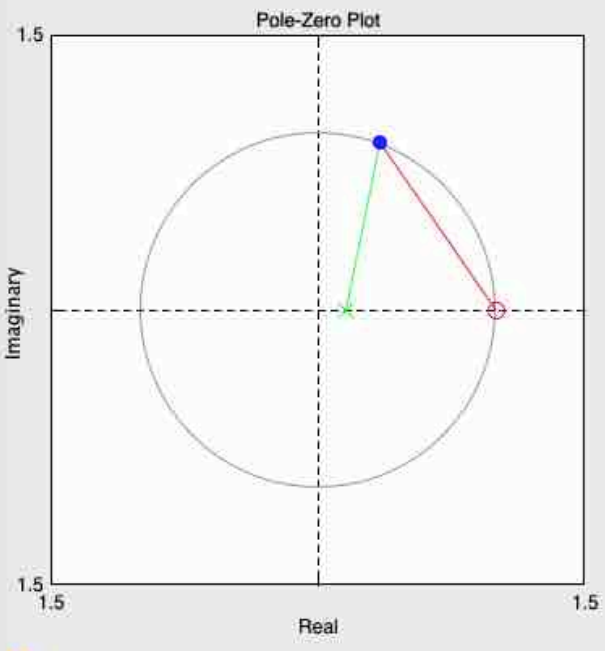
Numerator

Denominator

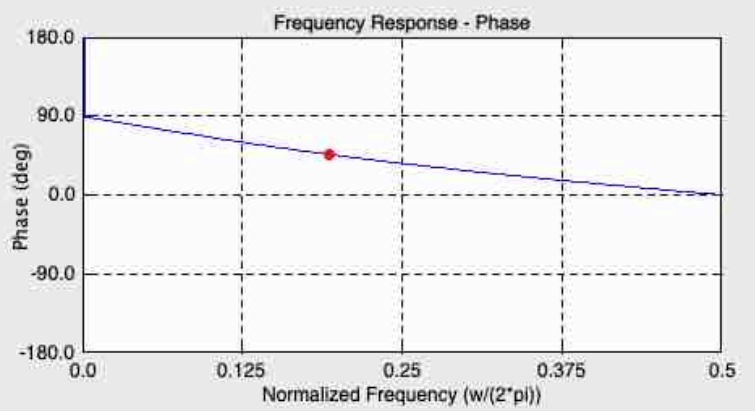
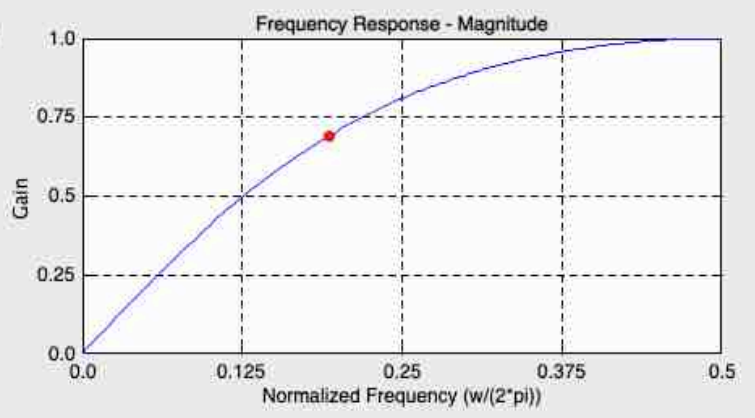


Sample Filter Designs

dB



Geometry Lines



## Finite Wordlength Effects

### • Difference Equations

Consider the ideal first order difference equation:

$$y(n) = \alpha x(n) + by(n-1)$$

In general, coefficients  $\alpha, b$  cannot be represented exactly with finite precision arithmetic. Furthermore, even if  $\alpha, b$  can be exactly represented, the state  $y(n-1)$  can NEVER be exactly represented for all discrete time instants  $n$  (unless  $b=0$ ).

To demonstrate this latter point, suppose that  $\alpha, b, x(n)$  and the initial state  $y(0)$  are all 8 bit fractions. Then,  $y(1)$  will in general have a 16 bit fractional part,  $y(2)$  will have a 24 bit fractional part, etc. Hence, given any available wordlength, there will be a value of  $n$  for which  $y(n)$  cannot be exactly represented.

## Quantization Error

The nonlinear quantization operation will sometimes generate (nontrivial) periodic solutions known as overflow oscillations or limit cycles.

- Overflow oscillations occur when the saturation arithmetic characteristic of the quantizer is invoked; otherwise any nontrivial periodic solution is referred to as limit cycle.
- Overflow oscillations influence the MSB, whereas limit cycles generally affect only the LSB of the states. Thus, if overflow occurs, it can cause much more severe signal distortion.

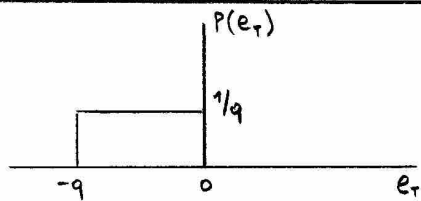
Floating point arithmetic usually has sufficient dynamic range to prevent the occurrence of overflow oscillations. In fact, the prevention of overflow is the main reason for using floating point arithmetic, and not for improving small scale accuracy!

However, limit cycles can also exist in floating point implementations and their amplitude can be large.

## Quantization Error Statistics

Let  $e$  be the difference between the exact number and the number represented in the ADC and in the processing unit by a finite word length. If  $q = 2^{-N}$  is the least significant bit, statistically,  $e$  may get any value in the interval  $[0, q]$ . We assume that  $e$  may be modelled as white noise, uniformly distributed along the interval  $[0, q]$ , and that there is no correlation between the various sources of errors.

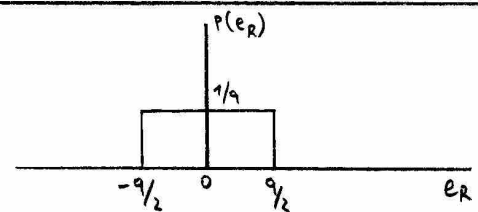
### Truncation Error Statistics



$$\text{Mean: } \bar{e}_T = E\{e_T\} = -\frac{q}{2}$$

$$\text{Variance: } \sigma_{e_T}^2 = E\{e_T^2\} = \int_{-q}^0 \frac{1}{q} (e - \bar{e})^2 de = \frac{q^2}{12}$$

### Roundoff Error Statistics



$$\bar{e}_R = E\{e_R\} = 0$$

$$\sigma_{e_R}^2 = E\{e_R^2\} = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} e^2 de = \frac{q^2}{12}$$

$P(\cdot)$  is the probability density function (error distribution)

Proof:

$$\begin{aligned} \sigma_{e_T}^2 &= \int_{-q}^0 \frac{1}{q} (e - \bar{e})^2 de = \frac{1}{q} \int_{-q}^0 \left(e + \frac{q}{2}\right)^2 de = \\ &= \frac{1}{q} \left[ \int_{-q}^0 e^2 de + \frac{q^2}{4} \int_{-q}^0 de + \int_{-q}^0 2e \frac{q}{2} de \right] = \\ &= \frac{1}{q} \left[ \frac{e^3}{3} \Big|_{-q}^0 + \frac{q^2}{4} e \Big|_{-q}^0 + q \frac{e^2}{2} \Big|_{-q}^0 \right] = \\ &= \frac{1}{q} \left[ \left(0 + \frac{q^3}{3}\right) + \frac{q^2}{4} (0 + q) + q \left(0 - \frac{q^2}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{q} \left[ \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{4} q - \frac{q^3}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{q} q^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{q^2}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e_R}^2 &= \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} e^2 de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{1}{q} \frac{e^3}{3} \Big|_{-q/2}^{q/2} = \\ &= \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{q}{2}\right)^3 - \left(-\frac{q}{2}\right)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{3q} \left( \frac{q^3}{8} + \frac{q^3}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{3q} \cdot \frac{2q^3}{8} = \\ &= \frac{q^2}{12} \end{aligned}$$

## ◦ ADC and Multiplication Errors

- Parallel realisation has a lower multiplication noise amplification, as compared to direct realisation.

## ◦ Coefficient Errors

- Parallel and cascade realisations are less sensitive than direct realisation.

- As a general rule, it is best NOT to use the direct realisation for finite wordlength.

## ◦ Other Issues

- Wordlength and sampling rate are interdependent, and the selection of a max sampling interval and a min wordlength is an iterative process.
- Cost is directly related to wordlength and sampling rate.

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΟΡΙΑΣΩΝ ΚΥΚΛΩΝ (LIMIT CYCLES)

Παράδειγμα: Έστω το  $10$  m τρέξιμο φίλτρο  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+0.9z^{-1}}$

Για κραυετική είσοδο  $10$  m χρονική στιγμή  $n=1$   
και αρχική συνθήκη  $y(0)=0$ , έχουμε:

$$y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$$

Η τόνιμη κατάσταση για τίνος δείξας άπειρης ακρίβειας είναι:

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(1-z)}{z+0.9} = 0$$

Στον επόμενο πίνακα δίνεται η είσοδος μετά από στραγγίλευση ή κκοκοπή για διαφορετική χρονική στιγμή  $n$ :

| $n$ | $x(n)$ | $y(n)$ | στραγγίλ.<br>$y(n)$ | $y(n)$ | κκοκοπή<br>$y(n)$ | $y(n)$ |
|-----|--------|--------|---------------------|--------|-------------------|--------|
| 0   | 0      | 0      | 0                   | 0      | 0                 |        |
| 1   | 10     | 10     | 10                  | 10     | 10                |        |
| 2   | 0      | -9     | -9                  | -9     | -9                |        |
| 3   | 0      | 8.1    | 8                   | 8.1    | 8                 |        |
| 4   | 0      | -7.2   | -7                  | -7.2   | -8                |        |
| 5   | 0      | 6.3    | 6                   | 7.2    | 7                 |        |
| 6   | 0      | -5.4   | -5                  | -6.3   | -7                |        |
| 7   | 0      | 4.5    | 5                   | 6.3    | 6                 |        |
| 8   | 0      | -4.5   | -5                  | -5.4   | -6                |        |
|     |        |        | :                   | 5.4    | 5                 |        |

Παρατηρείτε ότι η στραγγίλευση ή η κκοκοπή τίνος ταλαντώνεται γύρω στον οριακό κύκλο  $\pm 5$ .

|                      |      |    |
|----------------------|------|----|
| Η τιμή κκοκοπή       | -4.5 | -5 |
| συγκλίνει στο σωστό  | 4.5  | 4  |
| αποτέλεσμα που είναι | -3.6 | -4 |
| τη δίν.              | 3.6  | 3  |
|                      | -2.7 | -3 |
|                      | 2.7  | 2  |
|                      | -1.8 | -2 |
|                      | 1.8  | 1  |
|                      | -0.9 | -1 |
|                      | 0.9  | 0  |
|                      | 0    | 0  |
|                      | 0    | 0  |
|                      | :    | :  |