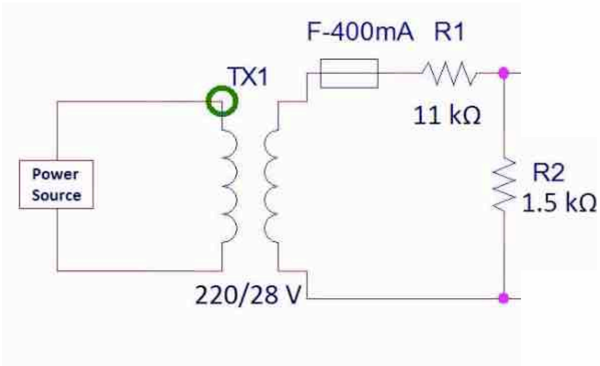
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

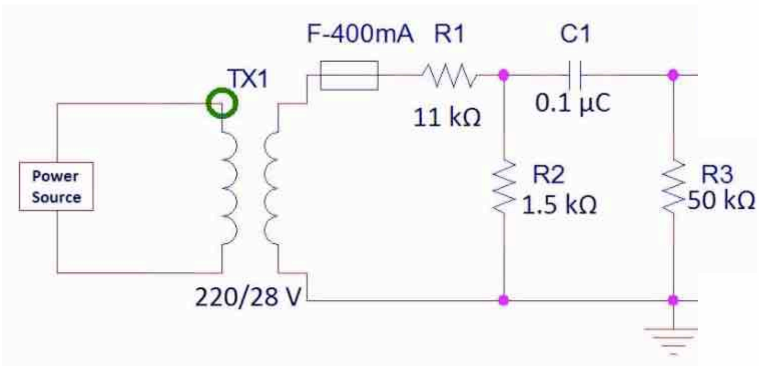
ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

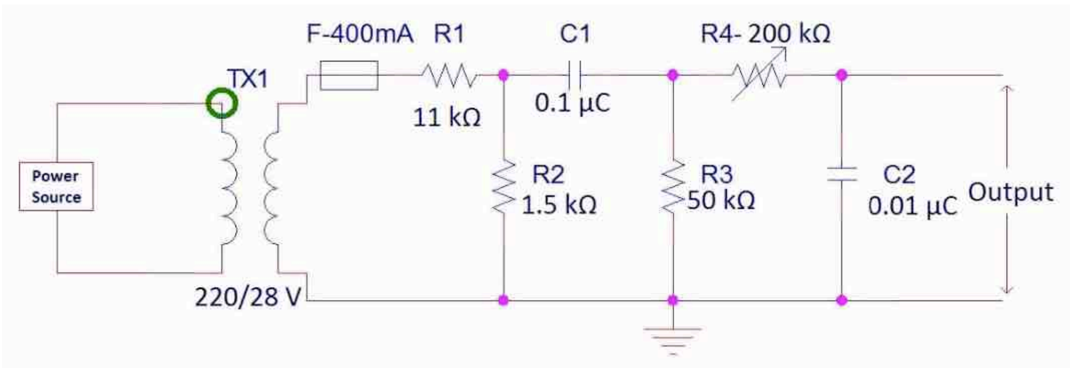
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

skodras@upatras.gr
www.ece.upatras.gr/skodras

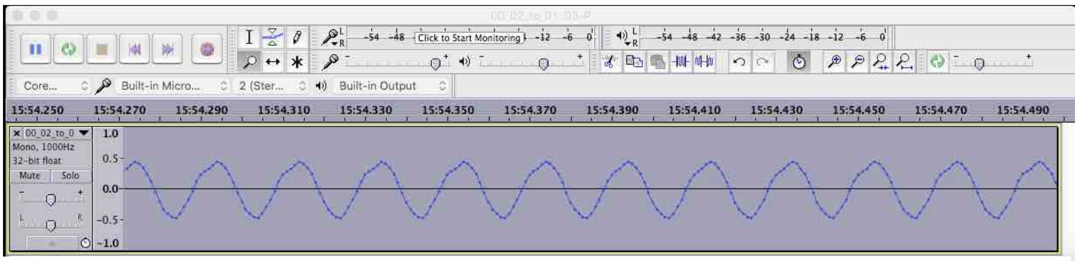
ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 19.11.2021 - ΩΡΑ 11:00-13:00


F-400mA
R1
TX1
11 kΩ
Power Source
R2
1.5 kΩ
220/28 V

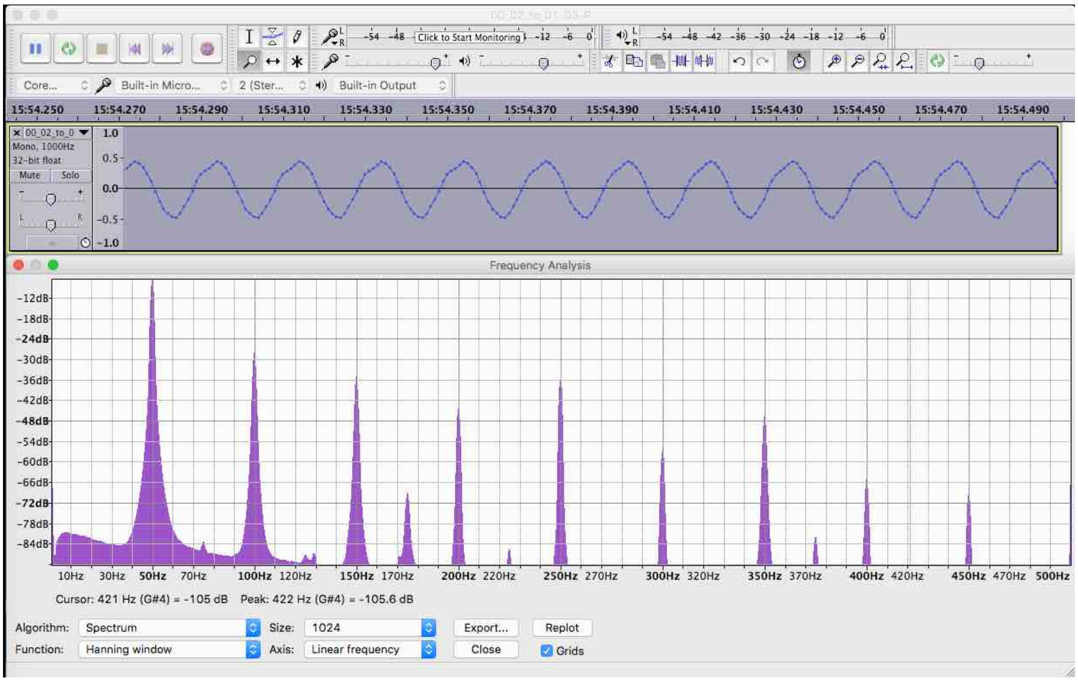

F-400mA
R1
C1
TX1
11 kΩ
0.1 µC
Power Source
R2
1.5 kΩ
R3
50 kΩ
220/28 V



ΣΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

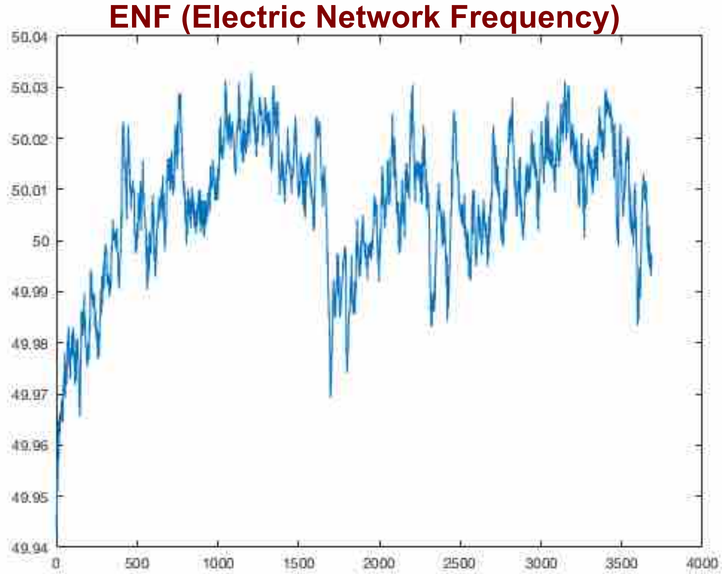


ΣΗΜΑ & ΦΑΣΜΑ



ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

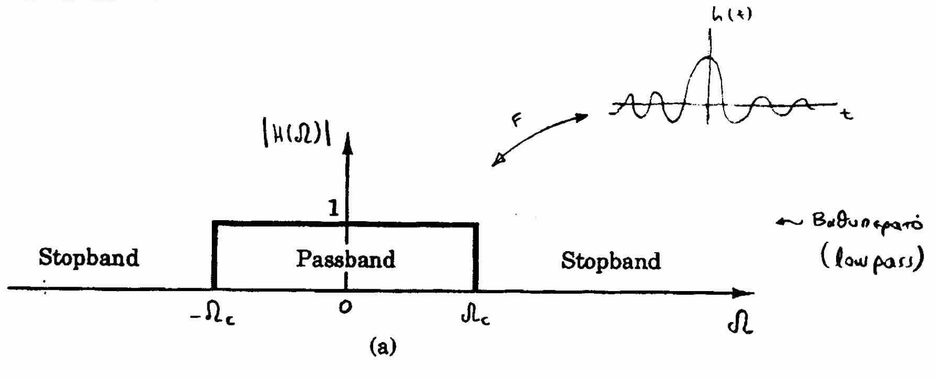
ENF (Electric Network Frequency)



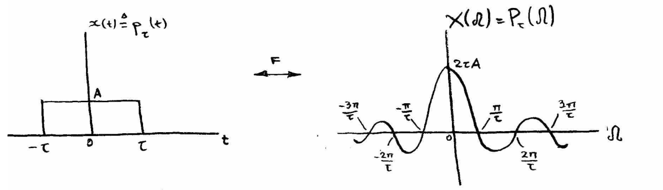
ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

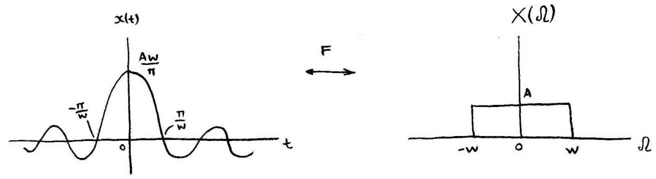
ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



ΧΡΟΝΟΣ | ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



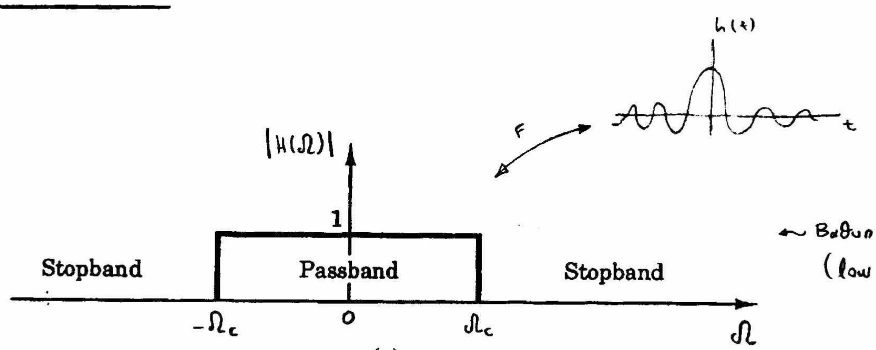
$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \qquad P_\tau(\Omega) = 2\tau A \frac{\sin \Omega\tau}{\Omega\tau} = 2A\frac{\sin \Omega\tau}{\Omega}$$



$$x(t) = \frac{Aw}{\pi}\frac{\sin wt}{\cancel{w}t} = A\frac{\sin wt}{\pi t} \qquad X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < w \\ 0 & |\Omega| > w \end{cases}$$

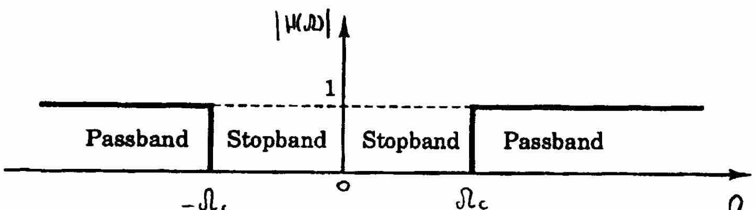
ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ



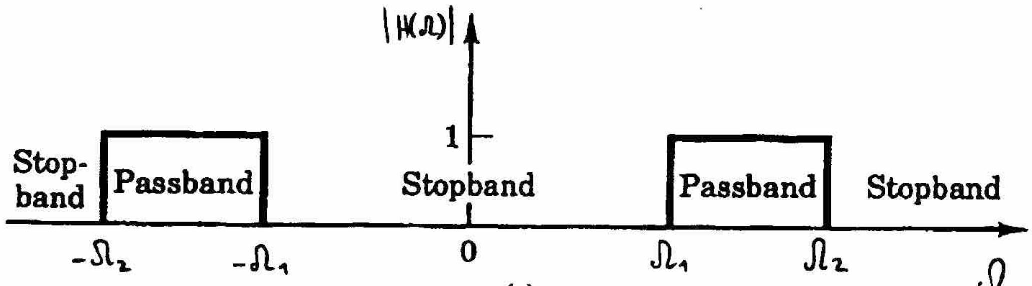
(a)

← Βαθυπερατό (low pass)



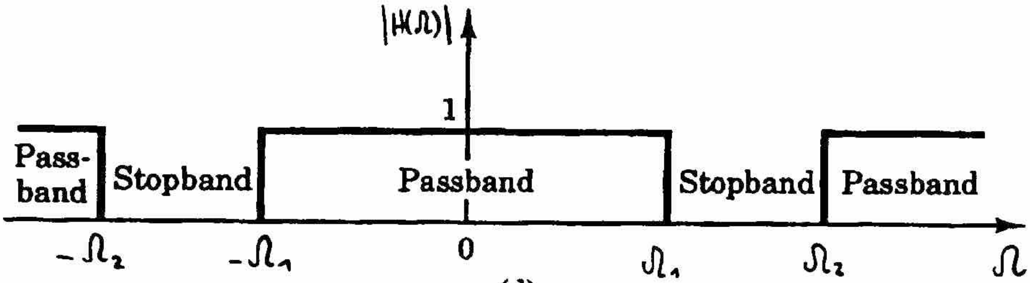
(b)

← Υψιπερατό (high pass)



(c)

← Ζωνοπερατό (band pass)



(d)

← Απόρριψης Ζώνης (band stop)

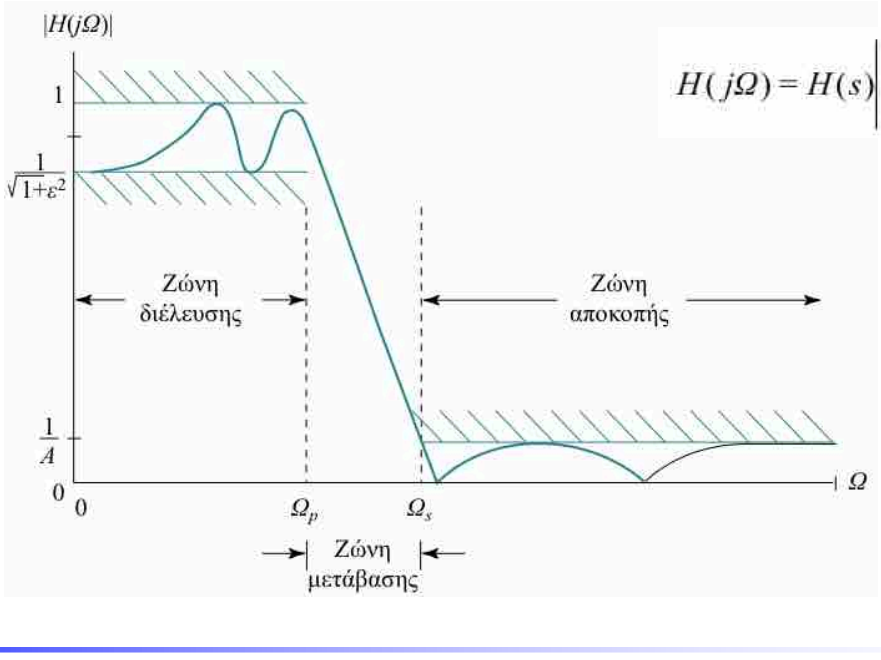
Τα ιδανικά φίλτρα είναι είναι μη αιτιατά αφού η κρουστική τους απόκριση $h(t)$ είναι μη μηδενική για $t<0$.

Τα φυσικά (πραγματοποιήσιμα) φίλτρα πρέπει να είναι αιτιατά. Για να προσεγγίσουμε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των ιδανικών (μη αιτιατών) φίλτρων, τα σχεδιάζουμε έτσι ώστε η κρουστική απόκριση των φυσικών φίλτρων να είναι ίδια με την κρουστική απόκριση των ιδανικών, αλλά καθυστερημένη στον χρόνο. Αυτή η καθυστέρηση στον χρόνο έχει ως αποτέλεσμα την αρνητική φάση στην απόκριση συχνότητας του φυσικού φίλτρου.

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

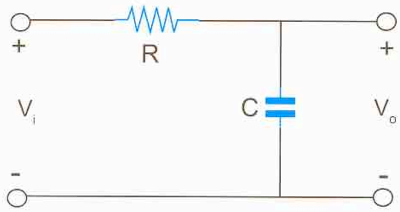
ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

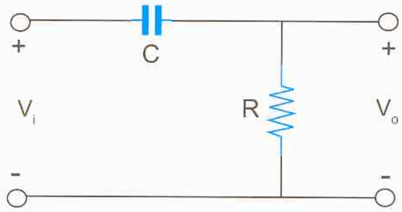


$$H(j\Omega) = H(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1ης τάξης (1 στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας)

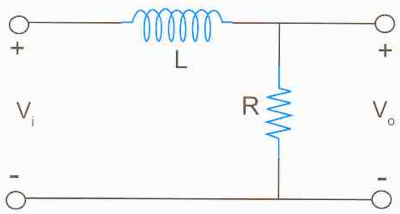


Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως



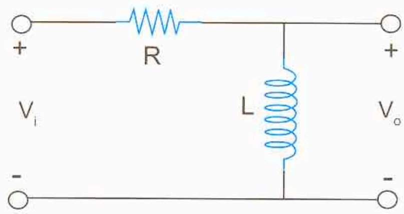
Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως

Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1ης τάξης (1 στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας)



Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως

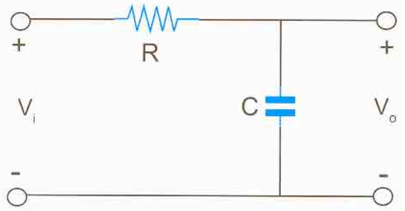
(γ)



Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως

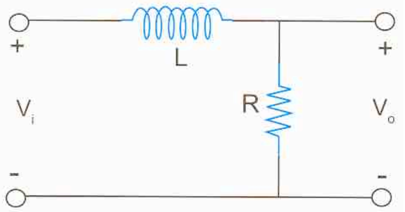
(δ)

Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1ης τάξης (1 στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας)



Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως

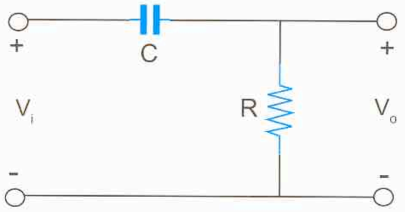
(α)



Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως

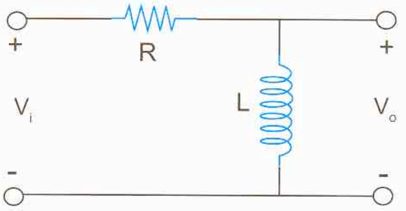
(γ)

Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1ης τάξης (1 στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας)



Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως

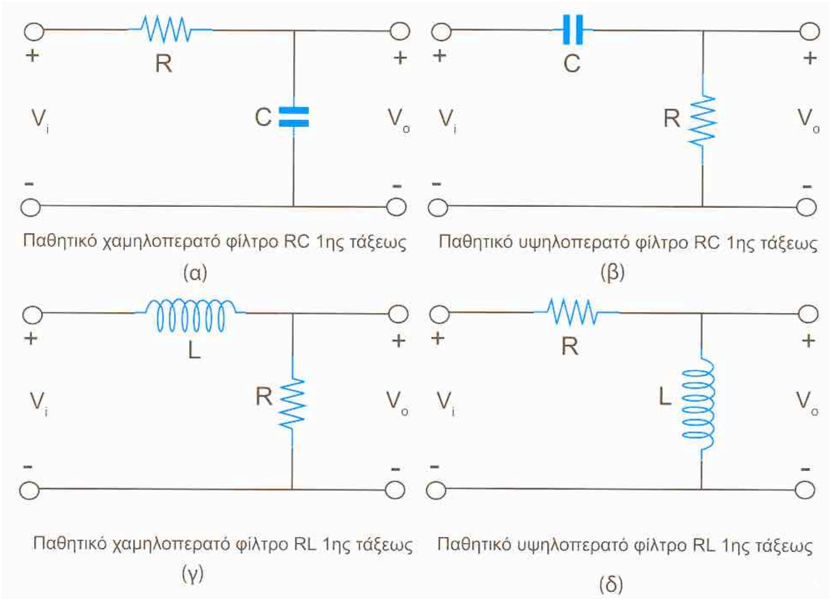
(β)



Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως

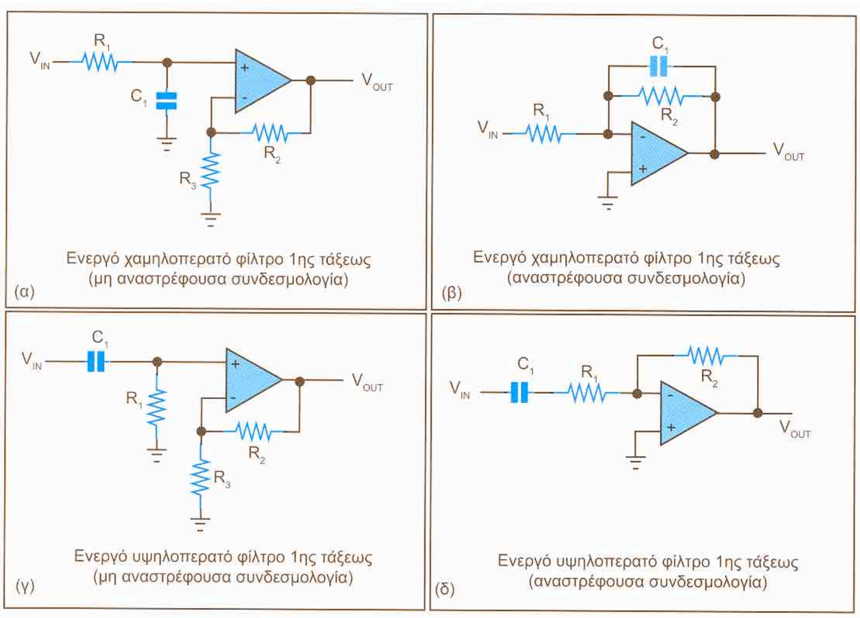
(δ)

Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 1ης τάξης (1 στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας)



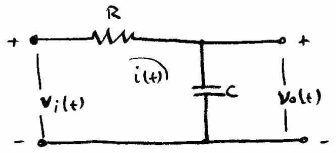
Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως (α)
Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RC 1ης τάξεως (β)
Παθητικό χαμηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως (γ)
Παθητικό υψηλοπερατό φίλτρο RL 1ης τάξεως (δ)

Παραδείγματα αναλογικών ενεργών φίλτρων 1ης τάξης



(α) Ενεργό χαμηλοπερατό φίλτρο 1ης τάξεως (μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία)
(β) Ενεργό χαμηλοπερατό φίλτρο 1ης τάξεως (αναστρέφουσα συνδεσμολογία)
(γ) Ενεργό υψηλοπερατό φίλτρο 1ης τάξεως (μη αναστρέφουσα συνδεσμολογία)
(δ) Ενεργό υψηλοπερατό φίλτρο 1ης τάξεως (αναστρέφουσα συνδεσμολογία)

RC ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ



$$\left.\begin{aligned} v_i(t) &= i(t)\,R + v_o(t) \\ i(t) &= C\,\frac{dv_o(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad v_i(t) = RC\,\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

Λαμβάνοντας τον μετασχ. Fourier και στα δύο μέλη

$$V_i(\Omega) = RC\,j\Omega\,V_o(\Omega) + V_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+j\Omega RC} \Rightarrow H(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega RC}$$

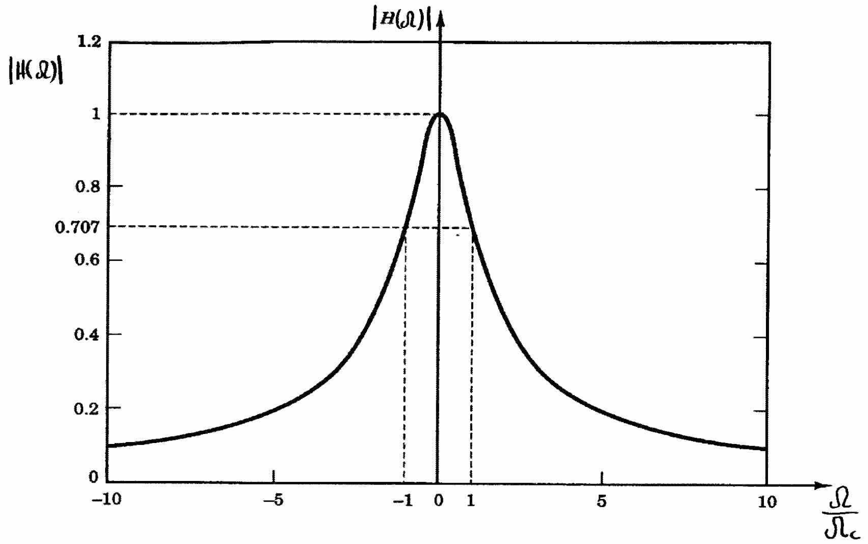
Αντικαθιστώντας $\Omega_c = \frac{1}{RC}$ η $H(\Omega)$ γίνεται:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1+j\frac{\Omega}{\Omega_c}} = |H(\Omega)|\,e^{j\phi(\Omega)}$$

όπου $|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}}$

$$\angle H(\Omega) = \phi(\Omega) = -\tan^{-1}(\Omega/\Omega_c)$$

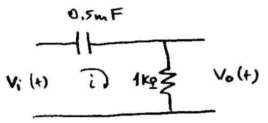
Η συχνότητα Ω_c ονομάζεται συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency) ή συχνότητα μισής ισχύος (half-power frequency), αφού $|H(\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $|H(\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$



ΑΣΚΗΣΗ Για το κύκλωμα του σχήματος:

α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας.

Για τι είδους φίλτρο πρόκειται;



ΛΥΣΗ

α. $$\left.\begin{aligned} V_i(t) &= V_c(t) + V_o(t) \\ i(t) &= C\frac{dV_c(t)}{dt} \\ V_o(t) &= R\,i(t) \end{aligned}\right\} \quad V_i(t) = V_c(t) + RC\frac{dV_c(t)}{dt} \Rightarrow \langle MF \rangle \Rightarrow$$

$$V_i(\Omega) = V_c(\Omega) + RC\,j\Omega\,V_c(\Omega) \Rightarrow$$

$$V_i(\Omega) = (1 + jRC\Omega)\,V_c(\Omega) \Rightarrow \qquad (1')$$

$$\frac{V_c(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \qquad (1)$$

Αλλά

$$V_i(t) = V_c(t) + V_o(t) \xrightarrow{MF} V_i(\Omega) = V_c(\Omega) + V_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$V_c(\Omega) = V_i(\Omega) - V_o(\Omega) \qquad (2)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{V_i(\Omega) - V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} = \frac{jRC\Omega}{1+jRC\Omega} \qquad (3)$$

Αλλά

$$v_i(t) = v_c(t) + v_o(t) \xrightarrow{MF} V_i(\Omega) = V_c(\Omega) + V_o(\Omega) \Rightarrow$$

$$V_c(\Omega) = V_i(\Omega) - V_o(\Omega) \qquad (2)$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{V_i(\Omega) - V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$\frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1+jRC\Omega} = \frac{jRC\Omega}{1+jRC\Omega} \qquad (3)$$

Σημείωση: Στη σχέση (3) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και ως εξής:

$$v_o(t) = R\,i(t) = RC\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\xrightarrow{F} V_o(\Omega) = RC\,j\Omega\,V_c(\Omega) \qquad (2')$$

Από την (1') έχουμε:

$$V_i(\Omega) = (1+jRC\Omega)V_c(\Omega) \qquad (3)'$$

Από τις (2'), (3'):

$$H(\Omega) = \frac{V_o(\Omega)}{V_i(\Omega)} = \frac{jRC\Omega}{1+jRC\Omega} \qquad (3)$$

Για $R = 1\,k\Omega$ και $C = 0.5\,mF \rightarrow RC = 1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}$ η σχέση (3) γίνεται:

$$H(\Omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\Omega} = \frac{j\Omega}{2+j\Omega} \qquad (4)$$

Για να βρούμε την αποκοπή συχνότητας θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο $|H(\Omega)|$ για διαφορετικές συχνότητες.

$$|H(\Omega)| = \left| 1 - \frac{1}{1+j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{\cancel{1} + j\frac{1}{2}\Omega - \cancel{1}}{1+j\frac{1}{2}\Omega} \right| = \left| \frac{j\Omega}{2+j\Omega} \right| =$$

$$= \frac{|j\Omega|}{|2+j\Omega|} = \frac{\sqrt{\Omega^2}}{\sqrt{4+\Omega^2}} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{4+\Omega^2}} \qquad (5)$$

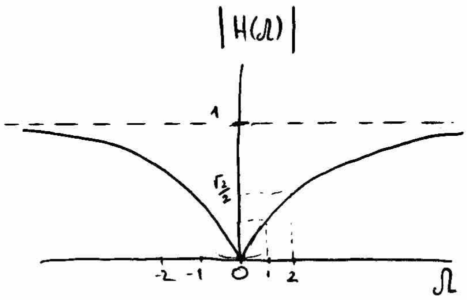
$$|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |H(\Omega)|_{\Omega=-1}$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=2} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |H(\Omega)|_{\Omega=-2}$$

$$\vdots$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega\to\infty} = \lim_{\Omega\to\infty}\sqrt{\frac{\Omega^2}{4+\Omega^2}} = \lim_{\Omega\to\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\Omega^2}+1}} = \sqrt{\frac{1}{0+1}} = 1$$



$$|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$$

$$|H(\Omega)|_{\Omega=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |H(\Omega)|_{\Omega=-1}$$

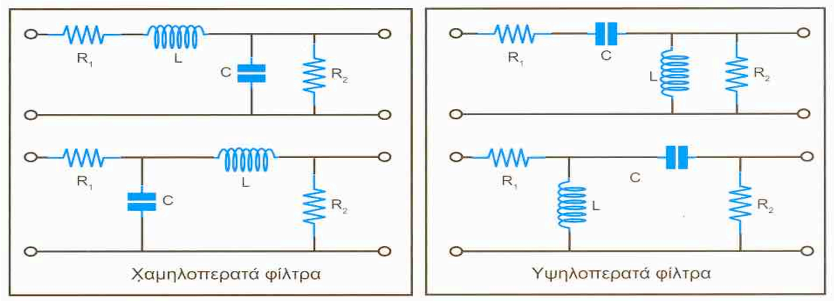
$$|H(\Omega)|_{\Omega=2} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = |H(\Omega)|_{\Omega=-2}$$

$$\vdots$$

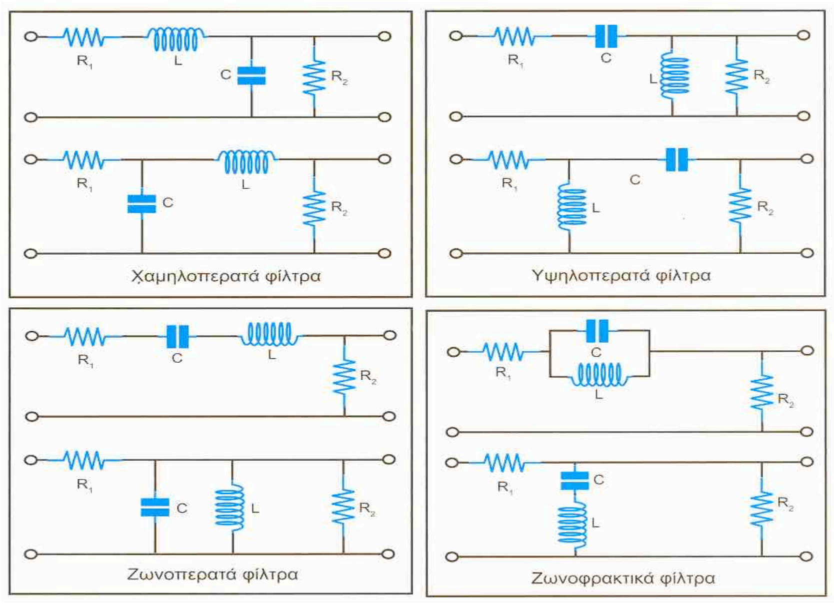
$$|H(\Omega)|_{\Omega\to\infty} = \lim_{\Omega\to\infty}\sqrt{\frac{\Omega^2}{4+\Omega^2}} = \lim_{\Omega\to\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\Omega^2}+1}} = \sqrt{\frac{1}{0+1}} = 1$$

Συνεπώς πρόκειται για ένα υψιπερατό (HP - High Pass) φίλτρο.

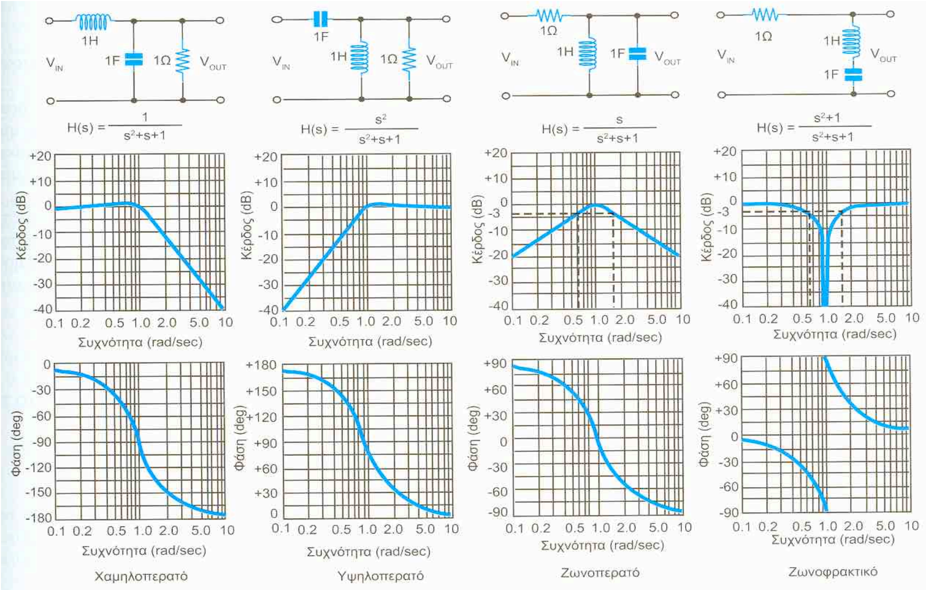
Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 2ης τάξης (2 στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας)



Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 2ης τάξης (2 στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας)



Παραδείγματα αναλογικών παθητικών φίλτρων 2ης τάξης (2 στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας)



ΦΙΛΤΡΑ

- Φίλτρα $\triangleq$ Συστήματα Επιλογής Συχνοτήτων
- Γιατί ΓΧΑ; → Δεν αλλάζουν τη συχνότητα, αλλά μόνον το πλάτος ή/και τη φάση.
- Ιδανικά φίλτρα → άπειρης διάρκειας κρουστική απόκριση → μη αιτιατά
- Πραγματοποιήσιμα αιτιατά και ευσταθή συστήματα ΓΧΑ:
  - ▸ H(s) → ρητή με πραγματικούς συντελεστές
  - ▸ Πόλοι της H(s) στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου
  - ▸ Βαθμός αριθμητή $\leq$ βαθμού παρονομαστή

- Τάξη φίλτρου $\rightarrow$ μεγαλύτερη δύναμη του s στον παρονομαστή της $H(s)$

$\Updownarrow$

πλήθος στοιχείων κυκλώματος με δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας, δηλαδή πηνίων και πυκνωτών

- $\Omega_c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$ της μέγιστης τιμής ή $\frac{1}{2}$ της μέγιστης ισχύος

$\Updownarrow$

$-3\,dB$ — Συχνότητα αποκοπής —

Τα πραγματικά φίλτρα προσπαθούν να προσεγγίσουν τα ιδανικά.

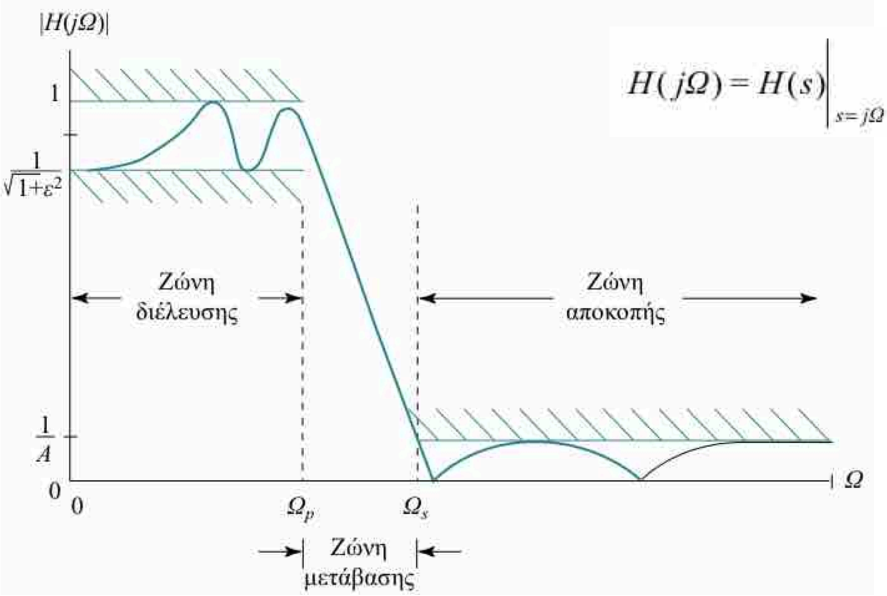
- Ορισμένα επιδιώκουν να προσεγγίσουν το πλάτος όσο το δυνατόν πιο καλά, αγνοώντας την απόκριση φάσης, όπως για παράδειγμα τα φίλτρα Butterworth, Chebyshev και ελλειπτικά. Τέτοια φίλτρα είναι κατάλληλα για ακουστικά σήματα (audio signals), αφού η ανθρώπινη ακοή δεν είναι ευαίσθητη στην ολίσθηση της φάσης των συνιστωσών του σήματος.
- Άλλα φίλτρα, όπως το φίλτρο Bessel, επιδιώκουν να προσεγγίσουν τη φάση κατά το δυνατόν καλύτερα, αγνοώντας την απόκριση μέτρου.
- Είναι αδύνατον να βελτιστοποιήσουμε μέτρο και φάση ταυτόχρονα, αφού η απόκριση φάσης ενός ευσταθούς αιτιατού φίλτρου με δεδομένη απόκριση μέτρου δεν μπορεί να επιλεγεί τυχαία, όπως και το αντίθετο.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΜΗ ΙΔΑΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

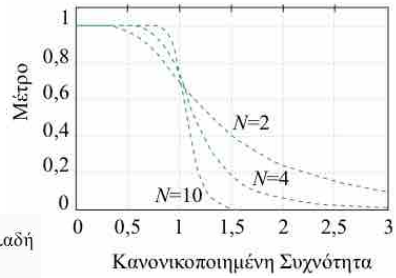
ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$H(j\Omega) = H(s)\Big|_{s=j\Omega}$$



ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Τα βαθυπερατά φίλτρα έχουν ΜΟΝΟ πόλους

$$\boxed{\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\left(1+\left(\Omega/\Omega_c\right)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2\left(\Omega/\Omega_p\right)^{2N}\right)^{1/2}}}$$



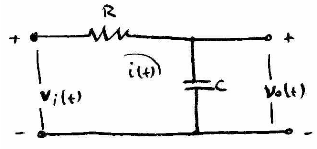
α. Για $\Omega = \Omega_c$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$, δηλαδή $\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ανεξάρτητα από την τιμή του N. Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Η τιμή αυτή εκφρασμένη σε decibels (dB) ισούται με –3, δηλαδή:

$$\left|H(j\Omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|H(j\Omega)\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3.0103 \cong -3\text{dB}.$$

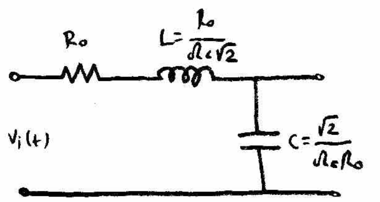
β. Για $\Omega = 0$ το μέτρο της απόκρισης ισούται με 1, δηλαδή με 0 dB, ανεξάρτητα από την τιμή του N.

γ. Επειδή η παράγωγος του μέτρου της απόκρισης είναι πάντοτε αρνητική για θετικές τιμές του Ω, συνεπάγεται ότι η απόκριση συχνότητας μειώνεται μονοτονικά καθώς το Ω αυξάνεται. Με άλλα λόγια $\left|H(j\Omega_2)\right| < \left|H(j\Omega_1)\right|$ για $0 \le \Omega_1 < \Omega_2$.

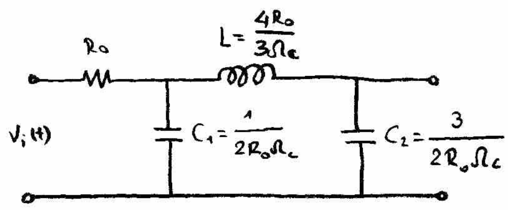
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΦΙΛΤΡΩΝ BUTTERWORTH



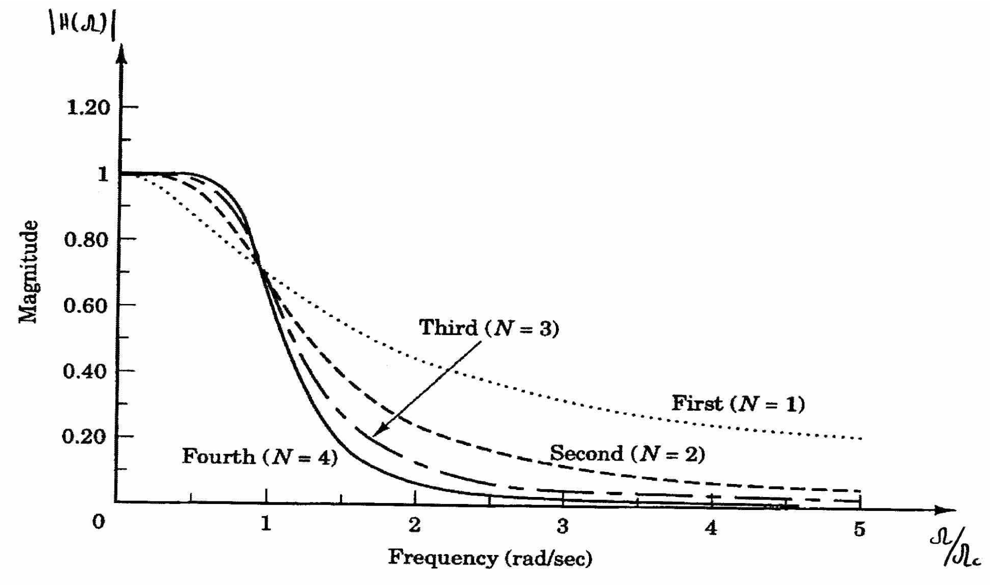
Το RC βαθυπερατό φίλτρο είναι ένα φίλτρο Butterworth 1ης τάξης.



Butterworth 2ης τάξης

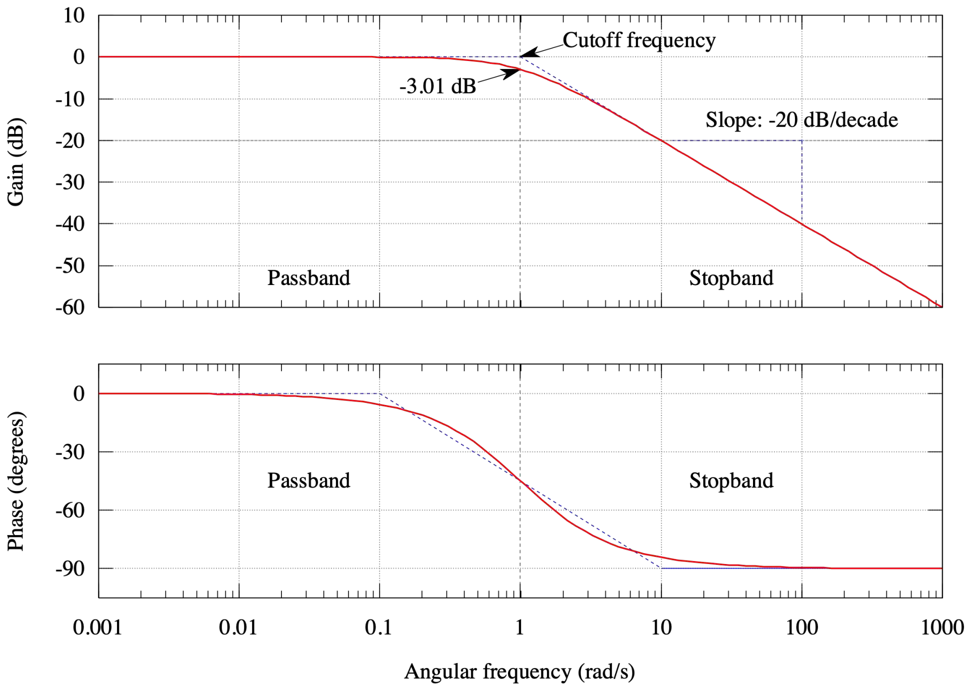


Butterworth 3ης τάξης



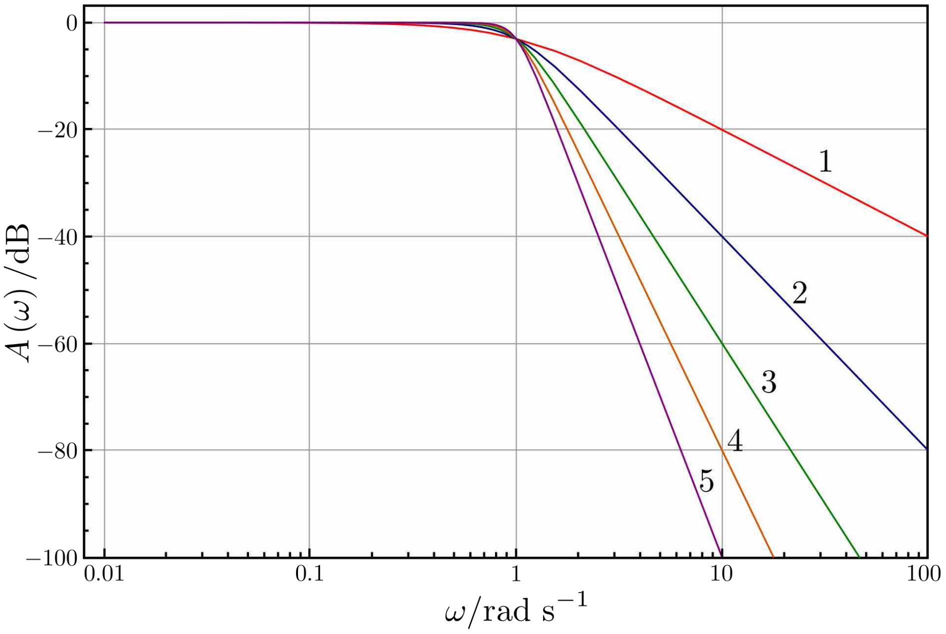
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Ζώνη διέλευσης κατά το δυνατόν επίπεδη (σταθερή) χωρίς κυμάτωση.
- Ζώνη μετάβασης μονοτονική με ρυθμό 6dB/οκτάβα (ή 20dB/δεκάδα) για κάθε πόλο
- Σχετικά καλή (ως προς τη γραμμικότητα) απόκριση φάσης.



https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH – ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΞΗ



https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Υπολογισμός της τάξης του φίλτρου

$$\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\left(1+\left(\Omega/\Omega_c\right)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2\left(\Omega/\Omega_p\right)^{2N}\right)^{1/2}}$$

$$\left|H(j\Omega_p)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\Omega_p/\Omega_c\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$\left|H(j\Omega_s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\Omega_s/\Omega_c\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

Λύνοντας ως προς Ν

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}\left[(A^2-1)/\varepsilon^2\right]}{\log_{10}\left(\Omega_s/\Omega_p\right)} = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)}$$

όπου ε = (Ωp / Ωc)^N

k = Ωp / Ωs παράμετρος επιλεκτικότητας (selectivity)

k1 = ε / (A^2 – 1)^(1/2) παράμετρος διακριτότητας (discrimination)

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Πόλοι

Αφού $H(s)H(-s)=\left|H(j\Omega)\right|^2$ για $s=j\Omega$, η εξίσωση (5.4) γράφεται ως:

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\left(-s^2/\Omega_c^2\right)^N}$$

Οι πόλοι της $H(s)H(-s)$ βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας Ω_c και σε σημεία που ισαπέχουν το ένα από το άλλο. Αυτό προκύπτει από την εξίσωση (5.7) με μηδενισμό του παρανομαστή της, δηλαδή:

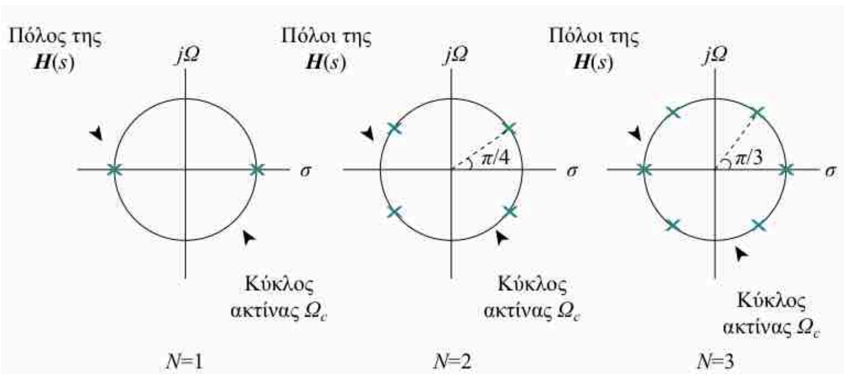
$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2}=(-1)^{1/N}=e^{j(2q+1)\pi/N}, \quad q=0,1,\ldots N-1$$

και συνεπώς

$$s_q=\Omega_c e^{j\pi/2}e^{j(2q+1)\pi/2N}, \quad q=0,1,\ldots N-1$$

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Τα πρότυπα (Ωc=1) βαθυπερατά φίλτρα για N = 1, 2, 3

$$H(s)=\frac{1}{s+1} \quad H(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \quad H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

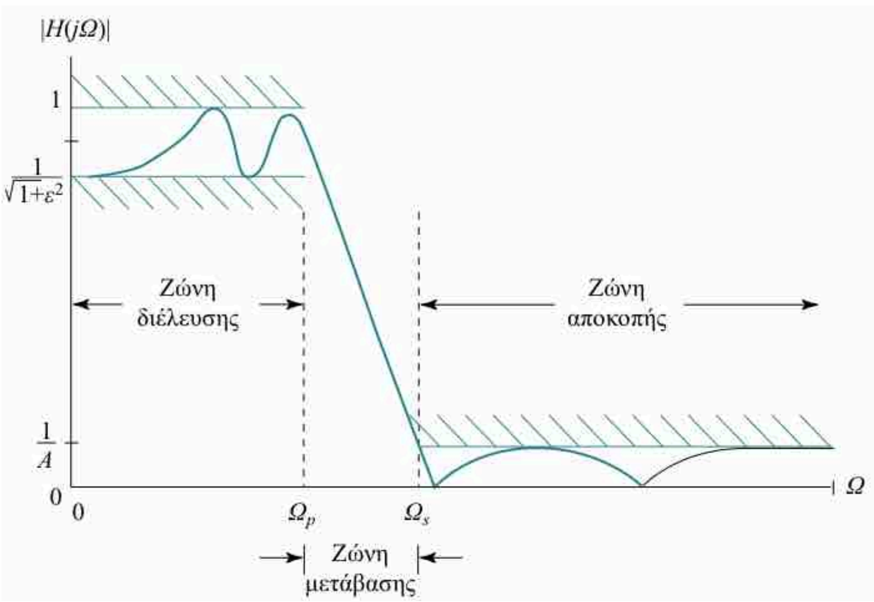


ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Τα πρότυπα (Ωc=1) βαθυπερατά φίλτρα για N = 1, … 10

N	Χαρακτηριστικό πολυώνυμο συνάρτησης μεταφοράς	Πόλος $s = \sigma \pm j\omega$
1	$s+1$	-1.0000
2	$s^2+1.414s+1$	$-0.7071 \pm 0.7071j$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$	-1.0000
		$-0.5000 \pm 0.8660j$
4	$(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)$	$-0.9239 \pm 0.3827j$
		$-0.3827 \pm 0.9239j$
5	$(s+1)(s^2+0.6810s+1)(s^2+1.6810+1)$	-1.0000
		$-0.8090 \pm 0.5878j$
		$-0.3090 \pm 0.9511j$
6	$(s^2+0.5176s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.9319s+1)$	$-0.9659 \pm 0.2588j$
		$-0.7071 \pm 0.7071j$
		$-0.2588 \pm 0.9659j$
7	$(s+1)(s^2+0.4450s+1)(s^2+1.2470s+1)(s^2+1.8019s+1)$	-1.0000
		$-0.9010 \pm 0.4339j$
		$-0.6235 \pm 0.7818j$
		$-0.2225 \pm 0.9749j$
8	$(s^2+0.3902s+1)(s^2+1.1111s+1)(s^2+1.6629s+1)(s^2+1.9616s+1)$	$-0.9808 \pm 0.1951j$
		$-0.8315 \pm 0.5556j$
		$-0.5556 \pm 0.8315j$
		$-0.1951 \pm 0.9808j$
9	$(s+1)(s^2+0.3473s+1)(s^2+s+1)(s^2+1.5321s+1)(s^2+1.8794s+1)$	-1.0000
		-0.9397 ± 0.3420
		$-0.7660 \pm 0.6428j$
		$-0.5000 \pm 0.8660j$
		$-0.1737 \pm 0.9848j$
10	$(s^2+0.3129s+1)(s^2+0.9080s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.7820s+1)(s^2+1.9754s+1)$	$-0.9877 \pm 0.1564j$
		$-0.8910 \pm 0.4540j$
		$-0.7071 \pm 0.7071j$
		$-0.4540 \pm 0.8910j$
		$-0.1564 \pm 0.9877j$

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Παράδειγμα

Υπολογίστε την τάξη ενός βαθυπερατού Butterworth φίλτρου το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 1 dB στο 1 kHz και 40 dB στα 5 kHz.



ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Παράδειγμα

Υπολογίστε την τάξη ενός βαθυπερατού Butterworth φίλτρου το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 1 dB στο 1 kHz και 40 dB στα 5 kHz.

Λύση

Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται και με βάση τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου (Σχήμα 5.1) έχουμε ότι:

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -1dB \text{, οπότε προκύπτει } \varepsilon^2 = 0{,}2589$$

$F_p = 1$ kHz, οπότε $\Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 1000$ rad/s

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{A^2}\right) = -40dB \text{, οπότε } A^2 = 10^4$$

$F_s = 5$ kHz, οπότε $\Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 5000$ rad/s.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (5.6) βρίσκουμε ότι:

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10}\left[\left(A^2-1\right)/\varepsilon^2\right]}{2\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\log_{10}(38621)}{2\log(5)} = 3{,}281$$

Αφού η τάξη του φίλτρου πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, στρογγυλεύουμε το αποτέλεσμα αυτό στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο, $N = 4$.

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Παράδειγμα

Υπολογίστε την τάξη και τους πόλους ενός βαθυπερατού φίλτρου Butterworth το οποίο παρουσιάζει εξασθένιση 3 dB στα 500 Hz και 40 dB στα 1000 Hz.

ΦΙΛΤΡΑ BUTTERWORTH: Παράδειγμα

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -3 \text{ dB}, \text{ οπότε προκύπτει ότι } \varepsilon^2 = 1.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα –3 dB αντιστοιχούν στη συχνότητα Ω_c, για την οποία ξέρουμε ότι το μέτρο της απόκρισης ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$F_p = 500 \text{ Hz, οπότε } \Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 500 \text{ rad/sec.}$$

Σημειώστε ότι στην προκειμένη περίπτωση $\Omega_p \equiv \Omega_c$.

$$10\log_{10}\left(\frac{1}{A^2}\right) = -40 \text{ dB}, \text{ οπότε } A^2 = 10^4$$

$$F_s = 1000 \text{ Hz, οπότε } \Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 1000 \text{ rad/sec.}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.6) υπολογίζουμε την τάξη του φίλτρου:

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10}\left[\left(A^2-1\right)/\varepsilon^2\right]}{2\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\log_{10}(10^4-1)}{2\log_{10}(2)} = 6,64$$

Άρα το φίλτρο το οποίο πληροί τις προδιαγραφές είναι έβδομης τάξης ($N = 7$).

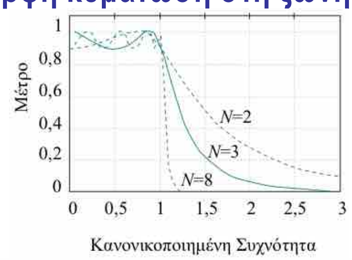
Οι πόλοι του φίλτρου υπολογίζονται από τη σχέση (5.9)

$$s_q = 1000\pi e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/14}, \quad q = 0,1,\ldots,6.$$

ΦΙΛΤΡΑ CHEBYSHEV

Chebyshev-I: Μόνο με πόλους & ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης

$$\boxed{\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\Omega/\Omega_p\right)\right)^{1/2}}}$$



όπου $T_N(x)$ πολυώνυμο Chebyshev τάξης N

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x), & |x|<1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}x), & |x|>1 \end{cases}$$

Σημε

ΦΙΛΤΡΟ CHEBYSCHEV I

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(v)}}$$

όπου $\varepsilon < 1$ και v η κανονικοποιημένη συχνότητα: $v = \frac{\Omega}{\Omega_c}$

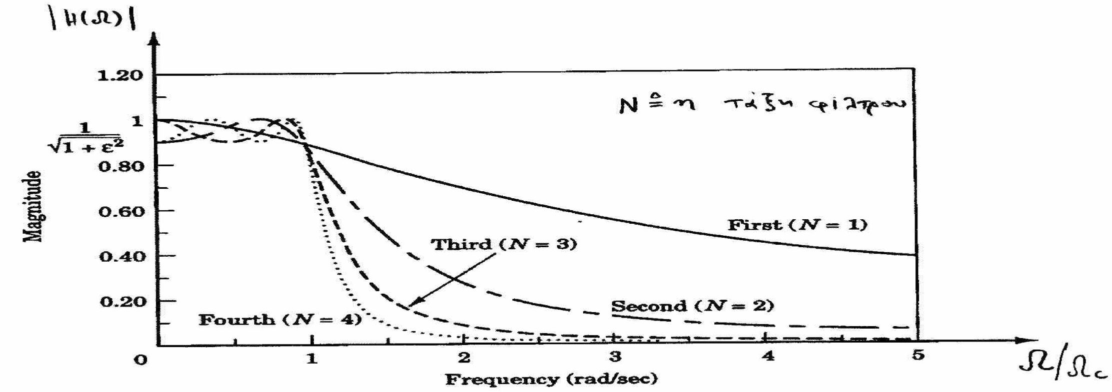
C_n είναι το πολυώνυμο Chebyschev τάξης n:

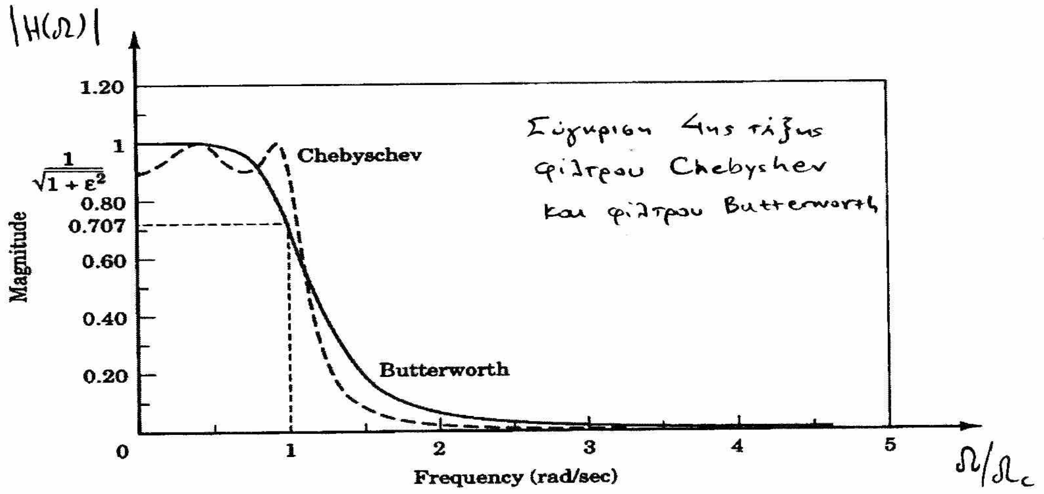
$$C_n = \cos(n \cos^{-1}(v))$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = v, \quad C_2 = 2v^2 - 1, \quad C_3 = 4v^3 - 3v, \ \ldots$$

Γενικά:

$$C_{n+1}(v) = 2v\, C_n(v) - C_{n-1}(v)$$





(b)

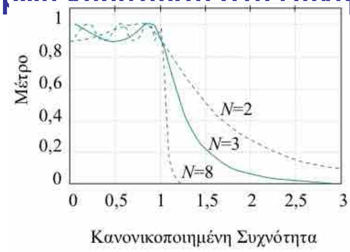
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- Τα φίλτρα Chebyschev τύπου I παρουσιάζουν κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, ενώ τα τύπου II παρουσιάζουν κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής.
- Είναι πιο απότομη ζώνη μετάβασης συγκρινόμενο με ίδιου βαθμού Butterworth.
- Ισχυρά μη-γραμμική απόκριση φάσης.

ΦΙΛΤΡΑ CHEBYSHEV

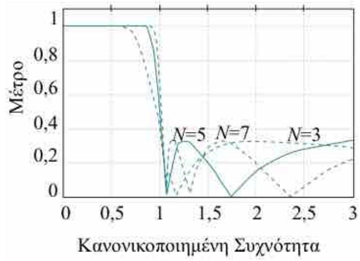
Chebyshev-I: Μόνο με πόλους & ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης

$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\Omega/\Omega_p\right)\right)^{1/2}}}$$



Chebyshev-II: Με πόλους και μηδενικά & ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής

$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2 \left[T_N^2\left(\Omega_s/\Omega_p\right)/T_N^2\left(\Omega_s/\Omega\right)\right]\right)^{1/2}}}$$



όπου $T_N(x)$ πολυώνυμο Chebyshev τάξης N

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x), & |x|<1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}x), & |x|>1 \end{cases}$$

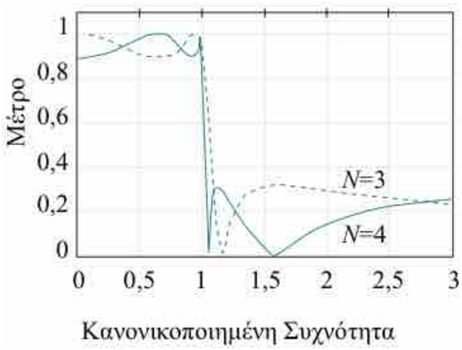
Σημείωση: Ισχυρά μη-γραμμική απόκριση φάσης

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Ελλειπτικά φίλτρα ή Cauer: Με πόλους και μηδενικά & ομοιόμορφη κυμάτωση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής

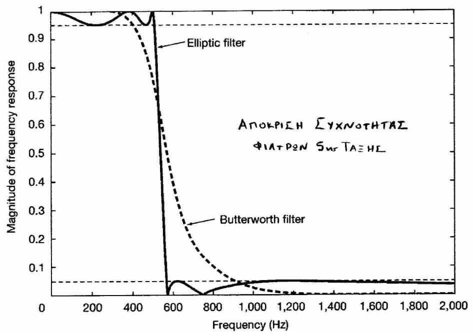
$$\boxed{|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1+\varepsilon^2 U_N^2\left(\Omega/\Omega_p\right)\right)^{1/2}}}$$

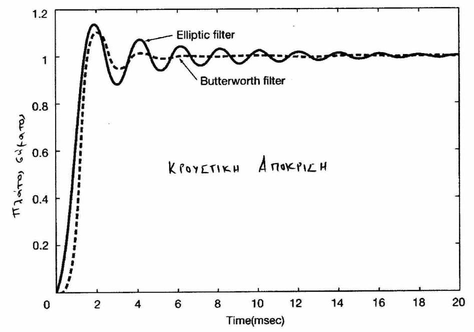
όπου $U_N(x)$ η Ιακωβιανή ελλειπτική συνάρτηση τάξης N



Σημείωση: Ισχυρά μη-γραμμική απόκριση φάσης

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ (συνέχεια)

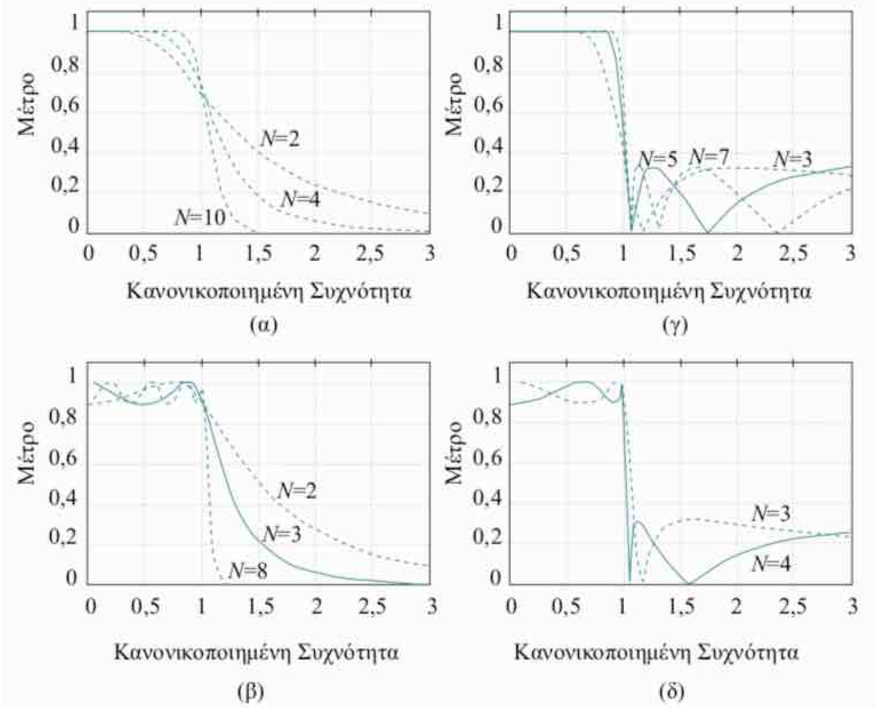




ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

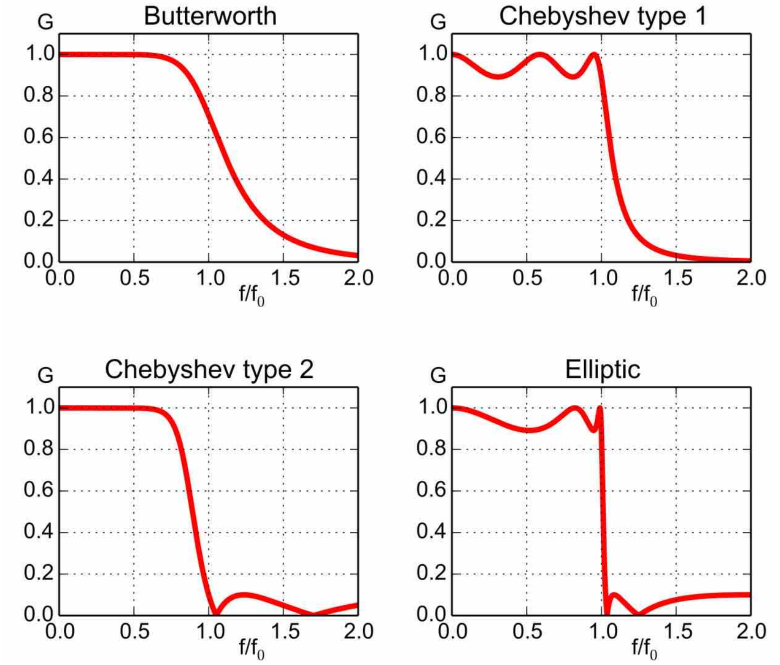
- Παρουσιάζει κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης, όσο και στη ζώνη αποκοπής.
- Έχει πιο απότομη (μικρού εύρους) ζώνη μετάβασης συγκρινόμενο με τα αντίστοιχα Butterworth και Chebyschev I / II.
- Ισχυρά μη-γραμμική απόκριση φάσης

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ



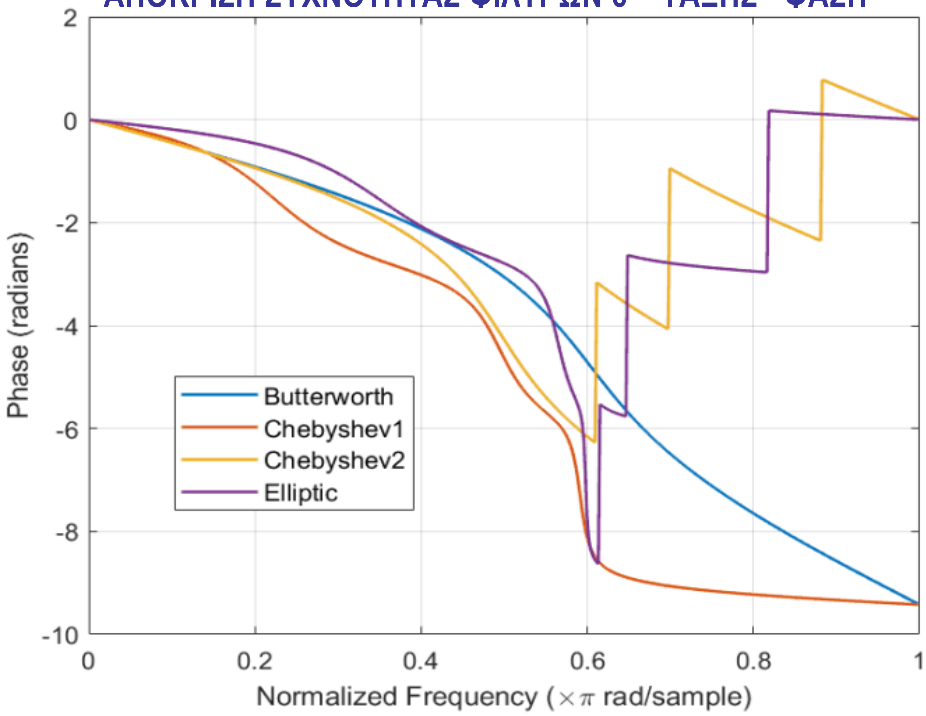
Απόκριση συχνότητας βαθυπερατών αναλογικών φίλτρων τύπου (α) Butterworth, (β) Chebyshev τύπου I, (γ) Chebyshev τύπου II και (δ) ελλειπτικού.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ 5ης ΤΑΞΗΣ

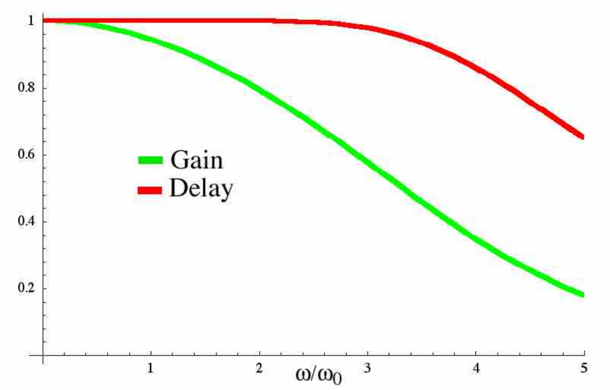


https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΦΙΛΤΡΩΝ 6ΗΣ ΤΑΞΗΣ - ΦΑΣΗ



ΦΙΛΤΡΑ BESSEL



$n=1;\quad s+1$

$n=2;\quad s^2+3s+3$

$n=3;\quad s^3+6s^2+15s+15$

$n=4;\quad s^4+10s^3+45s^2+105s+105$

$n=5;\quad s^5+15s^4+105s^3+420s^2+945s+945$

Κανονικοποιημένο φίλτρο 3ης τάξης

$$H(s)=\frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ – ΣΕ – ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

$$H_{LP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s}$$

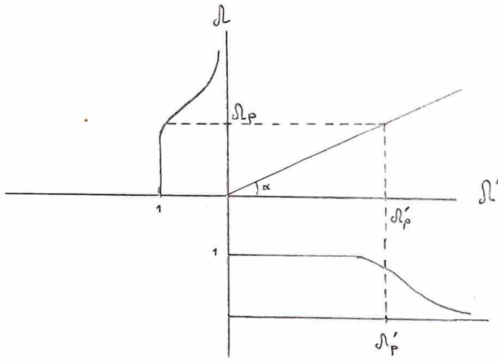
- ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ-ΣΕ-ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ (LOWPASS-TO-LOWPASS)

Εάν Ω_p είναι η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου και Ω'_p η αντίστοιχη συχνότητα του τελικού (επιθυμητού) βαθυπερατού φίλτρου, τότε εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$$

δηλαδή

$$H_{LP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s}$$



$$\Omega = \tan(\alpha)\cdot\Omega' \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p}\,\Omega' \quad \Rightarrow \text{<πολλαπλασιάζουμε με } j \text{ τα δύο μέλη>}$$

$$j\Omega = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p}\,j\Omega' \quad \Rightarrow \text{<για αναφορά συχνότητας } s=j\omega\text{>}$$

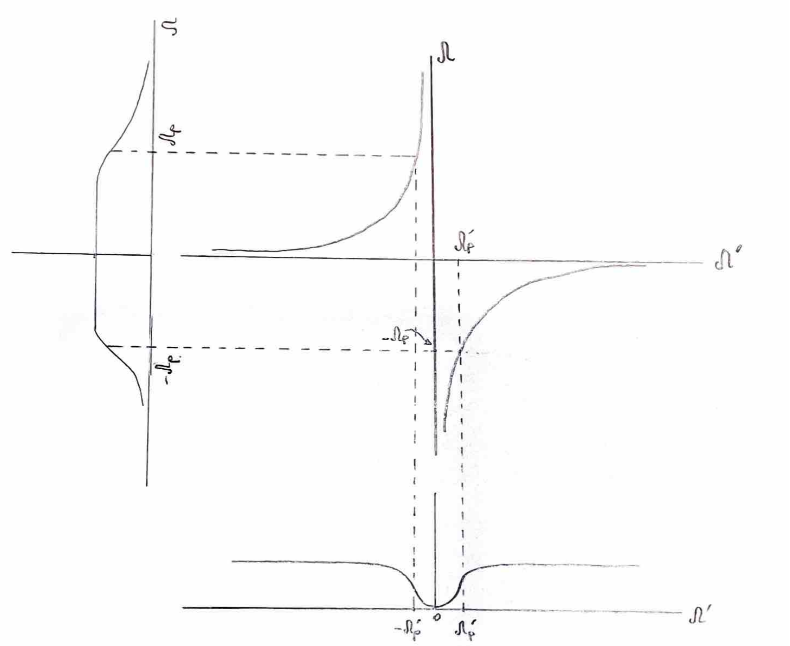
$$s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p}\,s' \quad \text{<δηλαδή όπου } s \text{ αντικαθιστούμε } \frac{\Omega_p}{\Omega'_p}\,s\text{>}$$

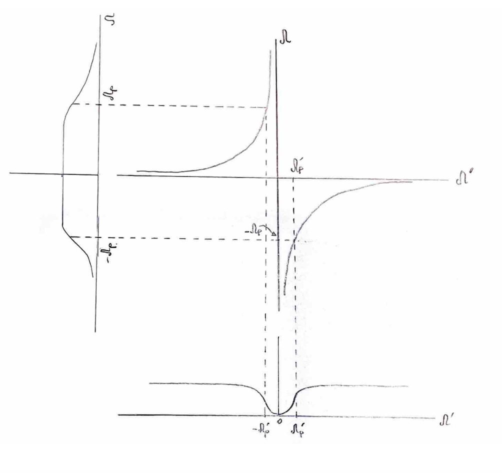
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ – ΣΕ – ΥΨΙΠΕΡΑΤΟ

$$H_{HP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\frac{\Omega_p\Omega'_p}{s}}$$

- ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ - ΣΕ - ΥΨΙΠΕΡΑΤΟ (LOWPASS - TO - HIGHPASS)





$$\Omega = \frac{(-\Omega_p)\,\Omega_p'}{\Omega'}$$ $\Rightarrow$ ⟨δεδομένου ότι $s=j\Omega$⟩

$$s = \frac{\Omega_p\,\Omega_p'}{s'}$$ ⟨δηλαδή όπου s αντικαθιστούμε $\frac{\Omega_p\,\Omega_p'}{s}$⟩

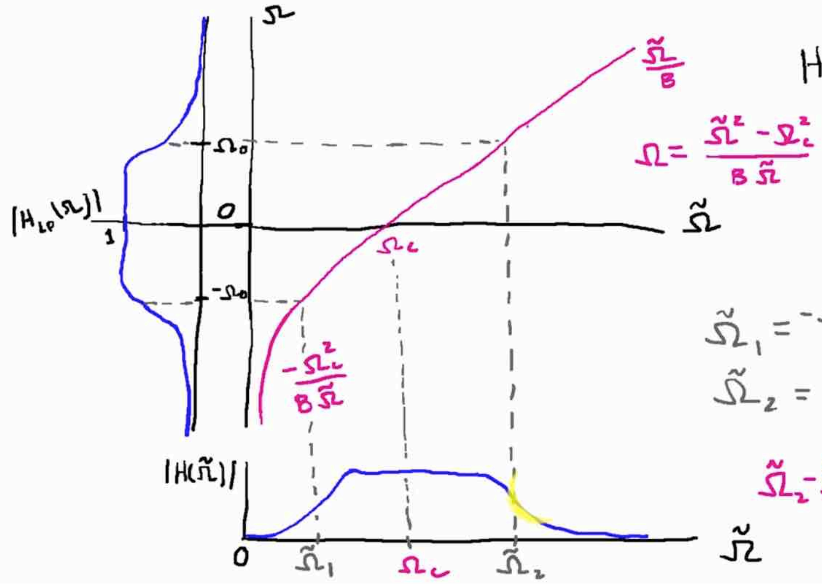
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ – ΣΕ – ΖΩΝΟΔΙΑΒΑΤΟ

$$H_{BP}(s) = H_p(s)\Big|_{s=\Omega_p \frac{s^2+\Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u-\Omega_l)}}$$

Lowpass to Band pass: $s = \frac{\tilde{s}^2+\Omega_c^2}{B\tilde{s}} \xRightarrow[s=j\Omega]{} \Omega = \frac{\tilde{\Omega}^2-\Omega_c^2}{B\tilde{\Omega}}$

$$H(\tilde{s}) = H_{LP}\left(\frac{\tilde{s}^2+\Omega_c}{B\tilde{s}}\right)$$



$$\tilde{\Omega}_1 = \frac{-\Omega_0 B + \sqrt{\Omega_0^2 B^2 + 4\Omega_c^2}}{2}$$

$$\tilde{\Omega}_2 = \frac{\Omega_0 B + \sqrt{\Omega_0^2 B^2 + 4\Omega_c^2}}{2}$$

$$\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1 = \Omega_0 B$$

B scales width

Πηγή: https://www.youtube.com/watch?v=saVzGlcm0Tg

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ – ΣΕ – ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΖΩΝΗΣ

$$H_{BS}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ-ΣΕ-ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

$$H_{LP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s}$$

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ-ΣΕ-ΥΨΙΠΕΡΑΤΟ

$$H_{HP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}}$$

ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ-ΣΕ-ΖΩΝΟΔΙΑΒΑΤΟ

$$H_{BP}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

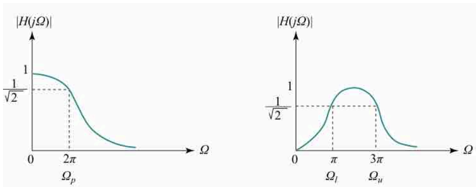
ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ-ΣΕ-ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΖΩΝΗΣ

$$H_{BS}(s) = H_p(s)\Big|_{s = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

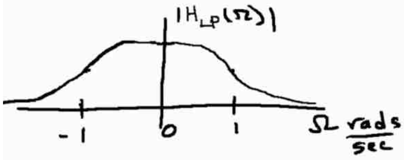
Να μετασχηματιστεί το πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \Omega_p/(s + \Omega_p)$, όπου $\Omega_p = 2\pi$ rad/s, σ' ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες στα όρια της ζώνης διέλευσης $\Omega_l = \pi$ rad/s και $\Omega_u = 3\pi$ rad/s.



$$s = \Omega_p \cdot \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} = 2\pi \frac{s^2 + 3\pi \cdot \pi}{s(3\pi - \pi)} = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}$$

$$H_{BP}(s) = H(s)\Big|_{s = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{s^2 + 3\pi^2}{s}\right) + 2\pi} = \frac{2\pi s}{s^2 + 2\pi s + 3\pi^2}$$

Example: convert $H_{LP}(s) = \frac{1}{s+1}$ to bandpass $H(s)$ with passband (½ power) from $10 \le |\tilde{\Omega}| \le 14$ rads/sec



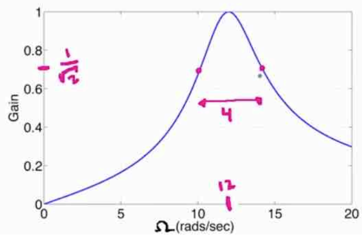
½ power bandwidth = 2 rads/sec

Desired ½ power bandwidth = 4 rads/sec ⟹ B = 4

Desired center frequency = 12 rads/sec ⟹ $\Omega_c = 12$

$$s = \frac{\tilde{s}^2 + \Omega_c^2}{B\tilde{s}} = \frac{\tilde{s}^2 + 144}{4\tilde{s}}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}\Big|_{s = \frac{\tilde{s}^2 + 144}{4\tilde{s}}} = \frac{4\tilde{s}}{\tilde{s}^2 + 4\tilde{s} + 144}$$



Πηγή: https://www.youtube.com/watch?v=saVzGlcm0Tg

ΠΗΓΕΣ

1. Α. Ι. Μάργαρη: "Σήματα & Συστήματα – Συνεχούς & Διακριτού Χρόνου", Εκδόσεις Τζιόλα, 2014
2. Α. Ν. Σκόδρας και Β. Αναστασόπουλος: "Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος και Εικόνας“, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2003
3. C. L. Phillips, J. M. Parr: “Signals, Systems and Transforms”, Prentice Hall, 1995
4. Barry Van Veen: “Frequency Transformations for Continous-Time Systems”, [online] https://www.youtube.com/watch?v=saVzGlcm0Tg
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_filter
6. …