ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α. ΣΚΟΔΡΑΣ

WEBCAST

ΖΩΝΤΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 23.10.2020 ΩΡΑ 12:00-13:00

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT
(Hilbert Transform / Transformer)

$$\boxed{H\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\, \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\, \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau}\, d\tau}$$

- Πρόκειται για τη συνέλιξη του σήματος $x(t)$ με το σήμα $1/\pi t$. Δηλαδή πρόκειται για την απόκριση ενός <u>ΓΧΑ</u> συστήματος με κρουστική απόκριση $1/\pi t$.

- Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Hilbert είναι ένα σήμα στον <u>χρόνο</u> (όχι στη συχνότητα), γι' αυτό και συνήθως το συμβολίζουμε ως $\hat{x}(t)$, δηλ. $\hat{x}(t) = H\{x(t)\}$. Για τον ίδιο λόγο τον αναφέρουμε και ως μετασχηματιστή Hilbert (Hilbert transformer).

- Η συνάρτηση $1/\pi t$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t=0$. Αυτός είναι ο λόγος που στον ορισμό της συνέλιξης χρησιμοποιήσαμε την Cauchy principal value (p.v.).

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ $\boxed{x(t) = -\hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} + c}$ όπου c σταθερά

ΣΥΝΗΘΗ ΖΕΥΓΗ

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, $\alpha_1 \alpha_2 \in \mathbb{C}$	$\alpha_1 \hat{x}_1(t) + \alpha_2 \hat{x}_2(t)$
$x(t-t_0)$	$\hat{x}(t-t_0)$
$x(\alpha t)$, $\alpha \neq 0$	$\mathrm{sgn}(\alpha)\,\hat{x}(\alpha t)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
e^{jt}	$-j e^{jt}$
e^{-jt}	$j e^{-jt}$
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\|(2t+1)/(2t-1)\right\|$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\frac{\pi t}{2}\mathrm{sinc}^2(t/2) = \sin(\frac{\pi t}{2})\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2})$

- Συνέλιξη: $\boxed{H\{x_1(t) * x_2(t)\} = \hat{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)}$

Απόδειξη:

$$H\{x_1(t) * x_2(t)\} = [x_1(t) * x_2(t)] * \frac{1}{\pi t} =$$

$$= \underbrace{\left[x_1(t) * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\hat{x}_1(t)} * x_2(t) =$$

$$= x_1(t) * \underbrace{\left[x_2(t) * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\hat{x}_2(t)}$$

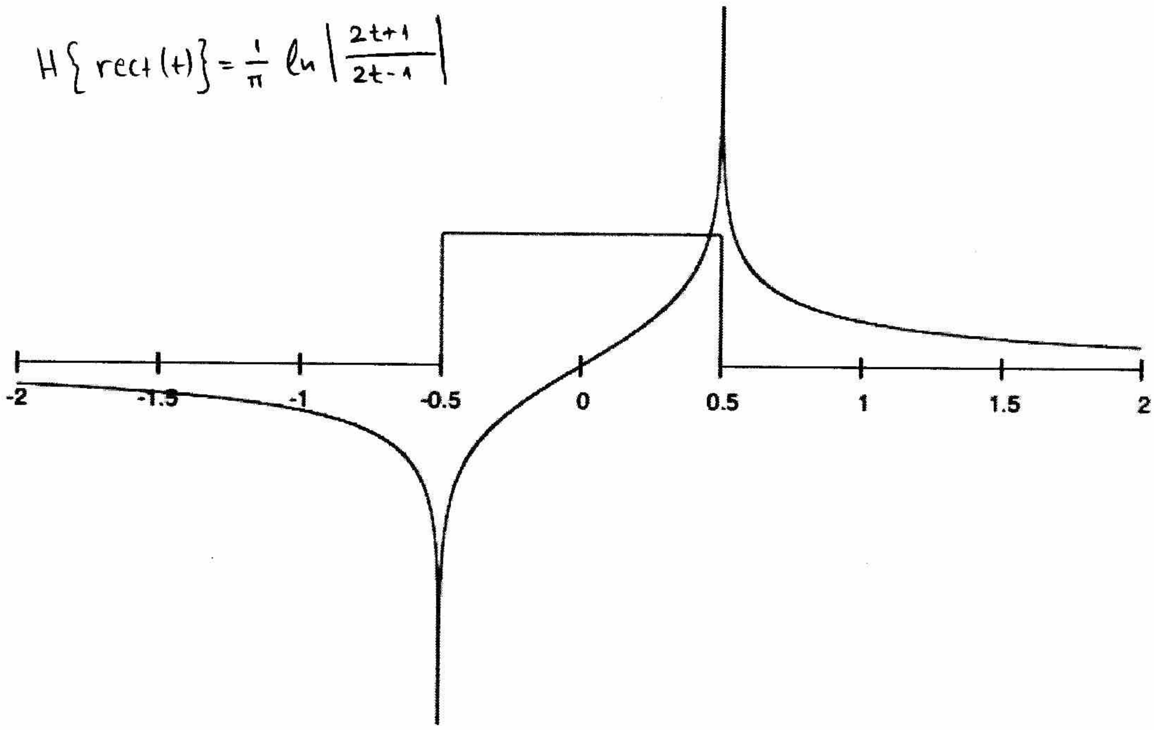
• Μετασχ. Hilbert σταθερού σήματος: $x(t) = c \xrightarrow{H} \hat{x}(t) = \hat{c} = 0$

Λόγω γραμμικότητας: $H\{x(t) + c\} = \hat{x}(t) + \hat{c} = \hat{x}(t)$

Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Hilbert "χάνει" την όποια σταθερή μετάθεση (dc offset) του σήματος.

• Ο μετασχ. Hilbert του τετραγωνικού παλμού δείχνεται στο παρακάτω σχήμα

$$H\{\mathrm{rect}(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{2t+1}{2t-1}\right|$$



- Ο μετασχ. Hilbert στον χώρο Fourier

  – Ο μετασχ. Fourier του σήματος $1/\pi t$ ισούται με

$$\boxed{-j\,\mathrm{sgn}(\Omega) = \begin{cases} -j & \text{εάν } \Omega>0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega=0 \\ j & \text{εάν } \Omega>0 \end{cases}} = \boxed{\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega>0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega=0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega<0 \end{cases}} = \boxed{e^{-j\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\Omega)} \quad \text{για } \Omega\neq 0}$$

  – Εάν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

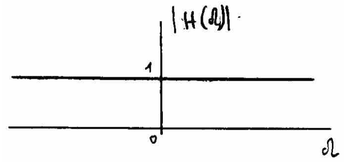
  τότε $\hat{x}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,X(\Omega) = \hat{X}(\Omega)$

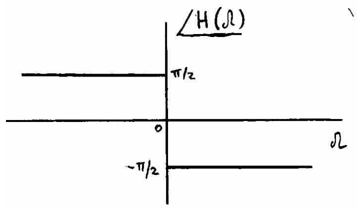
  Απόδειξη: $F\{\hat{x}(t)\} = F\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\} = -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\cdot X(\Omega)$

  – Η σχέση $\boxed{\hat{X}(\Omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\cdot X(\Omega)}$

$$\boxed{\hat{X}(\Omega) = \underbrace{-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)}_{H(\Omega)} \cdot X(\Omega)}$$

Ο μετασχ. Hilbert δεν αλλάζει το μέτρο του $X(\Omega)$, αλλά μόνον τη φάση.





Για τις θετικές συχνότητες, οι τιμές του μετασχ. Fourier πολλαπλασιάζονται επί $-j$ (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά $-\pi/2$), ενώ για τις αρνητικές συχνότητες, οι τιμές του μετασχ. Fourier πολ/ζονται επί j (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά $\pi/2$).

Με άλλα λόγια ο μετασχ. Hilbert ουσιαστικά προκαλεί την ανταλλαγή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της $X(\Omega)$, με ταυτόχρονη αλλαγή προσήμου στο ένα από αυτά.

- Ενέργεια Φασματικής Πυκνότητας

Έστω $x(t)$ ένα σήμα ενέργειας. Αφού $|\hat{X}(\Omega)| = |X(\Omega)|$, συνεπάγεται ότι τα $\hat{X}(\Omega)$ και $X(\Omega)$ έχουν την ίδια ενέργεια φασματικής πυκνότητας. Με άλλα λόγια, εάν το εύρος των συχνοτήτων του $X(\Omega)$ περιορίζεται στα B Hz, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το $\hat{X}(\Omega)$.

Το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει ακριβώς την ίδια ενέργεια με το σήμα $x(t)$

- $H\left\{\hat{x}(t)\right\} = -x(t)$ δηλ. $H\{H\{x(t)\}\} = -x(t)$ ή $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$

Απόδειξη:

$$F\left\{\hat{\hat{x}}(t)\right\} = \left[-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\right]^2 X(\Omega) = -X(\Omega)$$

Άρα

$$\boxed{\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)}$$

- **Ορθογωνιότητα**

Εάν το $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα ενέργειας, τότε τα σήματα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$ είναι ορθογώνια.

Απόδειξη:

$$\langle x(t), \hat{x}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\hat{x}^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\,\hat{X}(-\Omega)\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\,\hat{X}^*(\Omega)\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\left[-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,X(\Omega)\right]^* d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,|X(\Omega)|^2\,d\Omega =$$

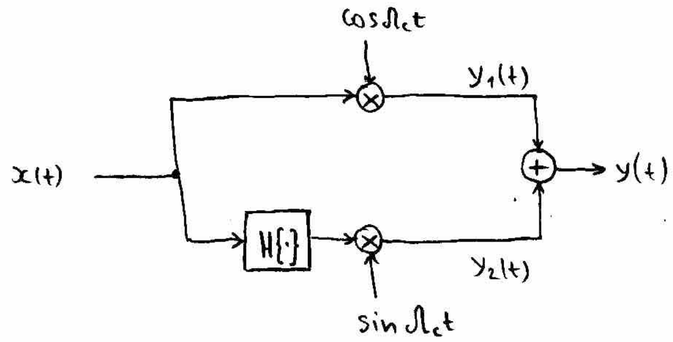
$$= 0$$

αφού $|X(\Omega)|^2$ άρτια συνάρτηση του Ω, η $\mathrm{sgn}(\Omega)|X(\Omega)|^2$ είναι περιττή συνάρτηση του Ω, και συνεπώς η τιμή του ολοκληρώματος είναι μηδέν.

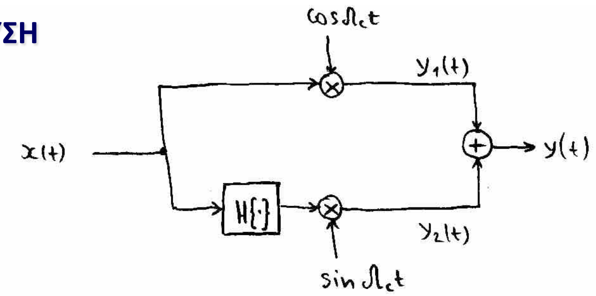
ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος του σχήματος για $x(t)=\cos\Omega_x t$

Με $H\{\cdot\}$ συμβολίζεται ο μετασχηματιστής Hilbert.



ΛΥΣΗ



$y_1(t) = x(t)\cdot\cos\Omega_c t = \cos\Omega_x t\cdot\cos\Omega_c t = \langle$ λόγω τριγων. ταυτότητας $\cos\alpha\cdot\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-b)+\cos(\alpha+b)\right]\rangle =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c-\Omega_x)t}_{Ⓐ} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c+\Omega_x)t}_{Ⓑ} \qquad (1)$$

$y_2(t) = H\{x(t)\}\cdot\sin\Omega_c t = H\{\cos\Omega_x t\}\cdot\sin\Omega_c t =$

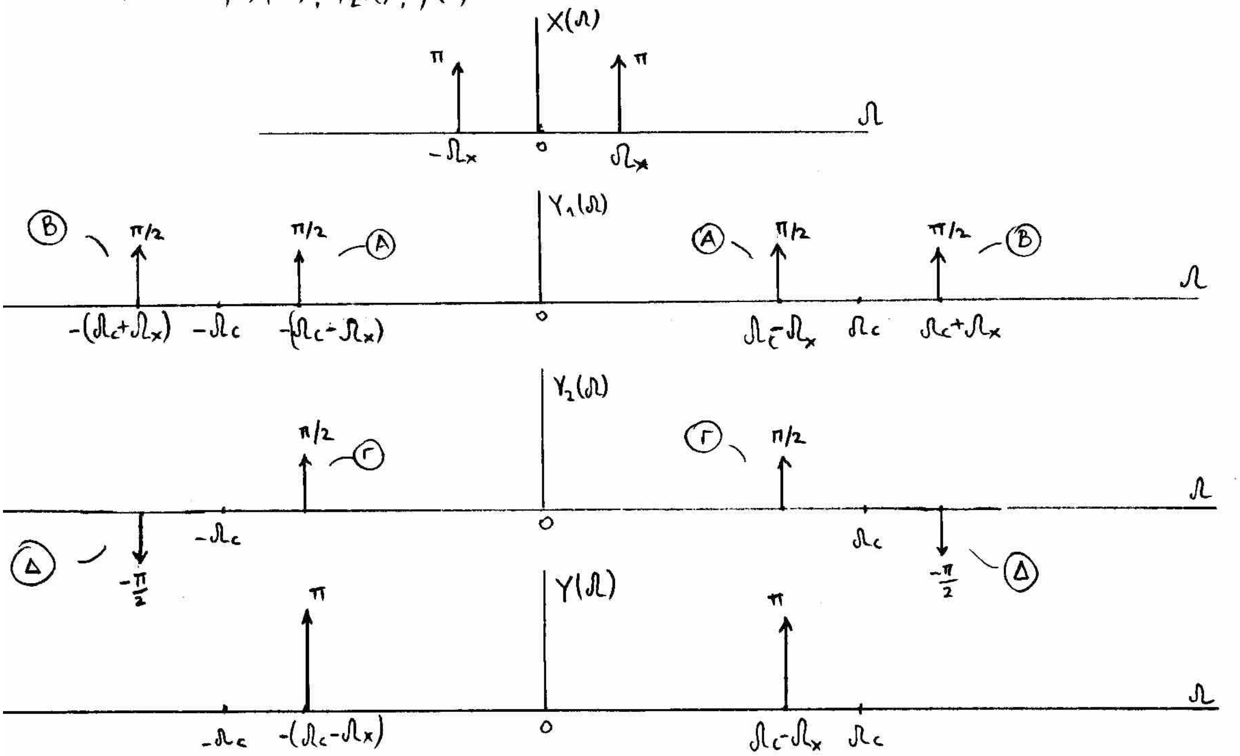
$= \sin\Omega_x t\cdot\sin\Omega_c t = \langle$ λόγω τριγων. ταυτότητας $\sin\alpha\cdot\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-b)-\cos(\alpha+b)\right]\rangle =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c-\Omega_x)}_{Ⓖ} - \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c+\Omega_x)}_{Ⓓ} \qquad (2)$$

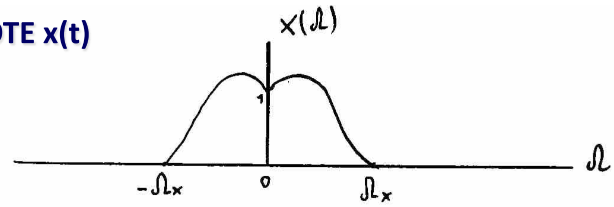
Άρα

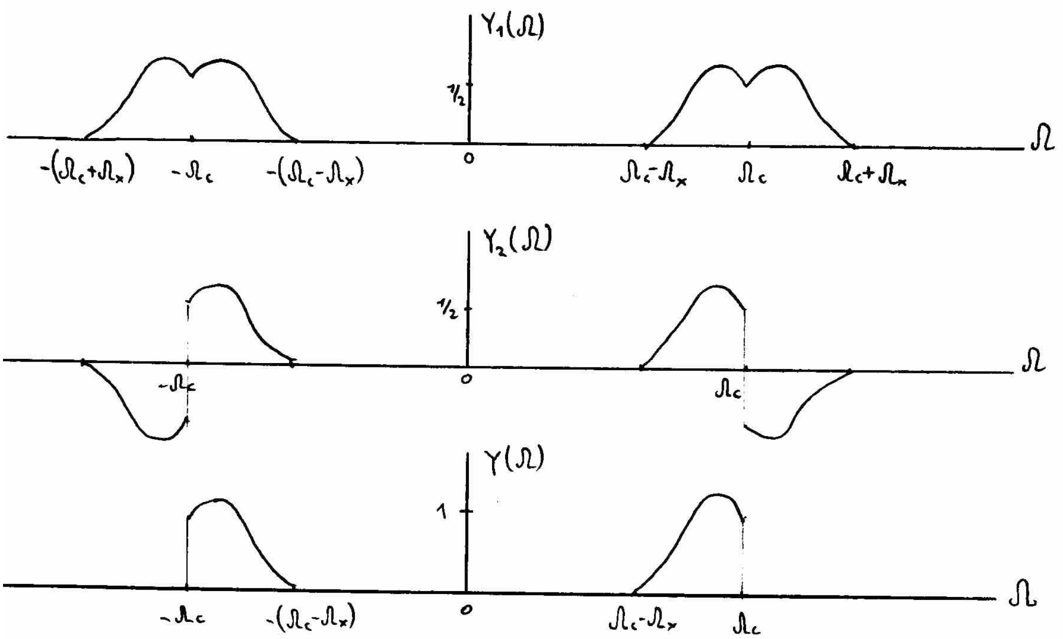
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \cos(\Omega_c-\Omega_x)t \qquad (3)$$

Οι x(t), $y_1(t)$, $y_2(t)$, y(t) στο πεδίο συχνότητας δείχνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

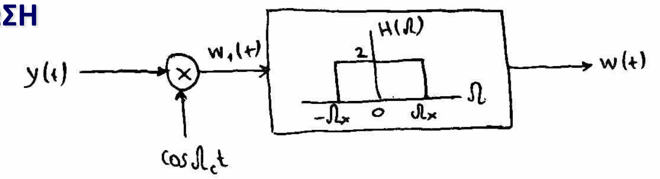


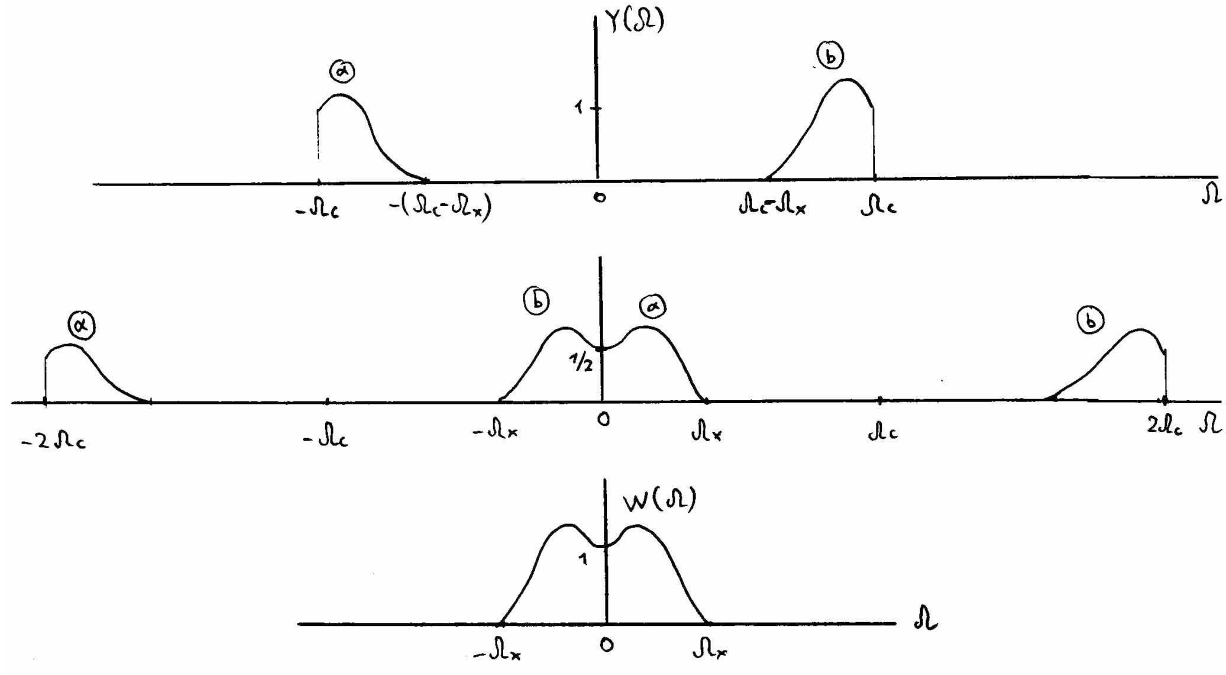
ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ x(t)

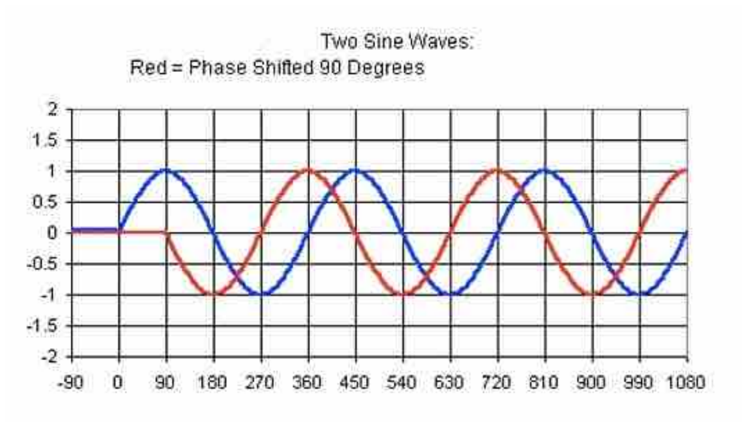




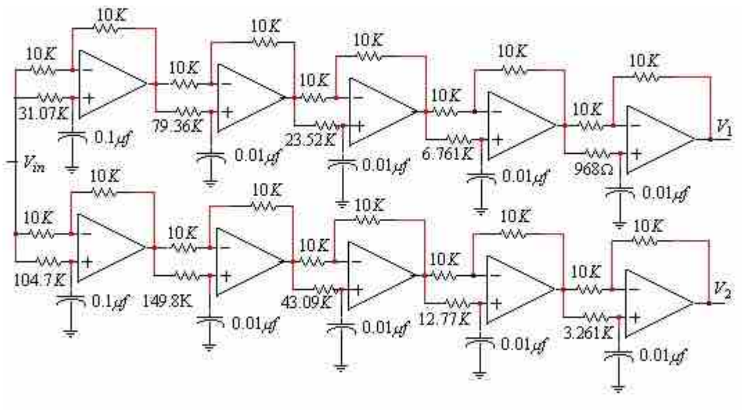
ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ







Example of a 90 degree active phase splitter



Example of a 90-degree passive phase splitter