ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Α2 - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER 2Δ & 3Δ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HARTLEY
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023-2024

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER 2-ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ορισμοί

$$f(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} F(\Omega_x,\Omega_y)$$

Ευθύς:

$$F(\Omega_x,\Omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-j(\Omega_x x + \Omega_y y)}\, dx\, dy$$

Αντίστροφος:

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega_x,\Omega_y)\, e^{j(\Omega_x x + \Omega_y y)}\, d\Omega_x\, d\Omega_y$$

Ιδιότητες

Γραμμικότητα: Αν $f(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} F(\Omega_x,\Omega_y)$, $g(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} G(\Omega_x,\Omega_y)$

τότε $\alpha f(x,y) + b\, g(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} \alpha F(\Omega_x,\Omega_y) + b\, G(\Omega_x,\Omega_y)$

Κλιμάκωση: Αν $f(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} F(\Omega_x,\Omega_y)$

τότε $f(\alpha x, b y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} \frac{1}{|\alpha b|} F\left(\frac{\Omega_x}{\alpha}, \frac{\Omega_y}{b}\right)$

Ολίσθηση στον χώρο:

$$f(x-x_0, y-y_0) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} e^{-j(\Omega_x x_0 + \Omega_y y_0)}\, F(\Omega_x,\Omega_y)$$

Ολίσθηση στη συχνότητα:

$$e^{j(\Omega_1 x + \Omega_2 y)} f(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} F(\Omega_x - \Omega_1, \Omega_y - \Omega_2)$$

Συνέλιξη:

$$f(x,y) ** g(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} F(\Omega_x,\Omega_y)\cdot G(\Omega_x,\Omega_y)$$

Γινόμενο:

$$f(x,y)\cdot g(x,y) \xleftrightarrow{2D\text{-}F} \frac{1}{(2\pi)^2} F(\Omega_x,\Omega_y) ** G(\Omega_x,\Omega_y)$$

Ανεξαρτησία: Αν $f_1(x) \xleftrightarrow{F} F_1(\Omega_x)$, $f_2(y) \xleftrightarrow{F} F_2(\Omega_y)$

τότε $f_1(x)\, f_2(y) \xleftrightarrow{2D-F} F_1(\Omega_x) \cdot F_2(\Omega_y)$

Τύπος Rayleigh: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 \, dx\, dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega_x,\Omega_y)|^2 \, d\Omega_x \, d\Omega_y$

Θεώρημα περιστροφής: Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ περιστραφεί στο επίπεδο (x,y) κατά γωνία θ, τότε και ο 2D μετασχηματισμός Fourier περιστρέφεται στο επίπεδο (Ω_x, Ω_y) κατά την ίδια γωνία θ.

$$f(x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) \xleftrightarrow{2D-F} F(\Omega_x\cos\theta - \Omega_y\sin\theta,\ \Omega_x\sin\theta + \Omega_y\cos\theta)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER 3-ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ορισμοί $\quad f(x,y,z) \xleftrightarrow{3D-F} F(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$

Ευθύς: $$F(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\, e^{-j(\Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z)} \, dx\, dy\, dz$$

Αντίστροφος: $$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)\, e^{j(\Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z)} \, d\Omega_x\, d\Omega_y\, d\Omega_z$$

DTFT 2-ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω το 2-διαστάσεων διακριτού χρόνου σήμα $x(m,n)$, όπου m,n διακριτές μεταβλητές. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου για το σήμα αυτό, ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, e^{-j(\omega_m m + \omega_n n)} \tag{1}$$

όπου ω_m, ω_n οι κυκλικές συχνότητες κατά μήκος των m, n αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός της σχέσης (1) μπορεί να γίνει ως δύο διαδοχικοί μονοδιάστατοι μετασχηματισμοί Fourier, πρώτα κατά m και μετά κατά n.

Απόδειξη:

$$(1) \rightsquigarrow X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, e^{-j(\omega_m m + \omega_n n)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, e^{-j\omega_m m} \right]}_{X(e^{j\omega_m}, n)} e^{-j\omega_n n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega_m}, n)\, e^{-j\omega_n n} \tag{2}$$

όπου $$X(e^{j\omega_m}, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, e^{-j\omega_m m} \tag{3}$$

Ο αντίστροφος DTFT 2-διαστάσεων ισούται με

$$x(m,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n})\, e^{j\omega_m m}\, e^{j\omega_n n}\, d\omega_m\, d\omega_n \tag{4}$$

Απόδειξη της σχέσης (4):

Από τη σχέση (3) μπορούμε να υπολογίσουμε το σήμα $x(m,n)$ με βάση τον μονοδιάστατο αντίστροφο μετασχηματισμό του $X(e^{j\omega_m},n)$:

$$x(m,n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_m},n)\, e^{j\omega_m m}\, d\omega_m \tag{5}$$

Αλλά από τη σχέση (2) το $X(e^{j\omega_m},n)$ μπορεί να προκύψει ως αντίστροφος μονοδιάστατος μετασχηματισμός του $X(e^{j\omega_m},e^{j\omega_n})$:

$$X(e^{j\omega_m},n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_m},e^{j\omega_n})\, e^{j\omega_n n}\, d\omega_n \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην (5) προκύπτει η (4).

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $x(m,n) = x_1(m)\, x_2(n)$. Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(m,n)$, όταν γνωρίζουμε ότι ο DTFT του μονοδιάστατου σήματος $x_1(m)$ είναι $X_1(e^{j\omega_m})$ και εκείνος του $x_2(n)$ είναι $X_2(e^{j\omega_n})$.

ΛΥΣΗ

$$X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, e^{-j(\omega_m m + \omega_n n)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, x_2(n)\, e^{-j\omega_m m}\, e^{-j\omega_n n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\, e^{-j\omega_m m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\, e^{-j\omega_n n} =$$

$$= X_1(e^{j\omega_m}) \cdot X_2(e^{j\omega_n})$$

Εφαρμογή (1) Έστω $x(m,n) = \delta(m-1)\,\delta(n+4)$. Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα θα έχουμε ότι

$$X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = e^{-j\omega_m} \cdot e^{j4\omega_n}$$

αφού $\delta(m-1) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega_m}$ και $\delta(n+4) \xleftrightarrow{F} e^{j\omega_n 4}$

(2) Έστω $x(m,n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u(n-2)\, u(-m)$. Η σχέση αυτή γράφεται ως

$$x(m,n) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)}_{x_2(n)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-m} u(-m)}_{x_1(m)}$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega_n 2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_n}}$$

$$x_1(m) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega_m}}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = \left[\frac{e^{-j2\omega_n}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_n}}\right] \left[\frac{1}{4}\, \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega_m}}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(m,n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(2\pi m/3)\, u(n)$.

ΛΥΣΗ Το δισδιάστατο σήμα $x(m,n)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων σημάτων:

$$x(m,n) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)}_{x_2(n)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3} m\right)}_{x_1(m)} \qquad (1)$$

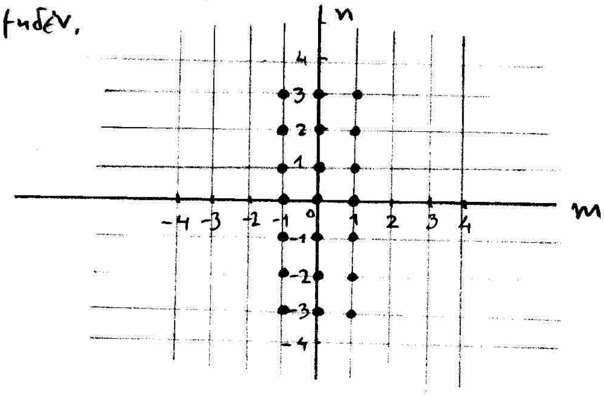
$$F\{x_2(n)\} = F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_n}} \qquad (2)$$

$$F\{x_1(m)\} = F\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}m\right)\right\} = \pi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_m - \frac{2\pi}{3} - 2k\pi\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_m + \frac{2\pi}{3} - 2k\pi\right)\right] \qquad (3)$$

Άρα ο DTFT $X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n})$ του σήματος $x(m,n)$ ισούται με το γινόμενο των (2) και (3).

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(m,n)=\begin{cases}1, & -2<m<2 \wedge -4<n<4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

ΛΥΣΗ Το σήμα $x(m,n)$ έχει τιμή 1 στα έντονα σημεία του πλέγματος. Στα υπόλοιπα σημεία είναι μηδέν.



Το σήμα $x(m,n)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο διαφορών κρουστικών.

$$x(m,n)=\underbrace{\left[u(m+1)-u(m-2)\right]}_{x_1(m)}\underbrace{\left[u(n+3)-u(n-4)\right]}_{x_2(n)} \qquad (1)$$

$$x_1(m) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\left(\frac{3\omega_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_m}{2}\right)} \qquad x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\left(\frac{7\omega_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_n}{2}\right)}$$

Τελικά

$$X(e^{j\omega_m},e^{j\omega_n})=\left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_m}{2}\right)}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{7\omega_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_n}{2}\right)}\right]$$

<u>Σημείωση:</u> Θυμηθείτε ότι ο DTFT του σήματος $g(n)=\begin{cases}1, & -M\le n\le M\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

ισούται με $G(e^{j\omega})=\dfrac{\sin\left(\frac{2M+1}{2}\right)\omega}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x(m,n) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}m + \frac{\pi}{3}n\right)$

ΛΥΣΗ Για το μονοδιάστατο σήμα $g(n) = e^{j\omega_0 n}$ γνωρίζουμε ότι ο DTFT ισούται με

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \qquad (1)$$

Το δεδομένο σήμα $x(m,n)$ αναλύεται ως εξής:

$$x(m,n) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}m + \frac{\pi}{3}n\right) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{5}m + \frac{\pi}{3}n\right)} - e^{-j\left(\frac{2\pi}{5}m + \frac{\pi}{3}n\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{5}m}\, e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{2\pi}{5}m}\, e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right]$$

$$e^{j\frac{2\pi}{5}m} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_m - \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right)$$

$$e^{j\frac{\pi}{3}n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_n - \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right)$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{5}m} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_m + \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right)$$

$$e^{-j\frac{\pi}{3}n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_n + \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right)$$

Τελικά ο DTFT του σήματος $x(m,n)$ ισούται με:

$$X(e^{j\omega_m}, e^{j\omega_n}) = \frac{2\pi^2}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega_m - \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) \delta\left(\omega_n - \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right) - \delta\left(\omega_m + \frac{2\pi}{5} - 2\pi k\right) \delta\left(\omega_n + \frac{\pi}{3} - 2\pi l\right)\right]$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HARTLEY

Ορισμοί

$$f(t) \xleftrightarrow{H} F_H(\Omega)$$

Ευθύς:
$$F_H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{cas}(\Omega t)\, dt$$

Αντίστροφος:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(\Omega)\, \mathrm{cas}(\Omega t)\, d\Omega$$

όπου $\mathrm{cas}(\Omega t) = \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t)$

- Ο μετασχηματισμός αυτός προτάθηκε από τον Hartley το 1942. Πρόκειται για έναν πραγματικό μετασχηματισμό (όχι μιγαδικό), ο οποίος διαφέρει από τον μετασχηματισμό Fourier κατά τη μιγαδική μονάδα j από τον συντελεστή του $\sin(\Omega t)$.

- Έστω $F_H(\Omega) = F_{He}(\Omega) + F_{Ho}(\Omega)$

όπου $F_{He}(\Omega)$, $F_{Ho}(\Omega)$ το άρτιο και περιττό μέλος του μετασχ. Hartley.

Άρα

$$F_{He} = \frac{F_H(\Omega) + F_H(-\Omega)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\Omega t)\, dt = Re\{F(\Omega)\}$$

$$F_{Ho} = \frac{F_H(\Omega) - F_H(-\Omega)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\Omega t)\, dt = -Im\{F(\Omega)\}$$

όπου $F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\cos\Omega t - j \sin\Omega t\right) dt$ ο μετασχ. Fourier του $f(t)$.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$F(\Omega) = F_{He}(\Omega) - j\, F_{Ho}(\Omega)$$

$$F_H(\Omega) = Re\{F(\Omega)\} - Im\{F(\Omega)\}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hartley του σήματος $f(t) = \delta(t-t_0)$.

ΛΥΣΗ
$$F_H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \text{cas}(\Omega t)\ dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ \text{cas}(\Omega t)\ dt =$$
$$= \text{cas}(\Omega t_0)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hartley του σήματος $f(t) = e^{-t}u(t)$

ΛΥΣΗ Γνωρίζουμε ότι ο ΜF του σήματος $f(t)$ είναι:
$$F(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega} = \frac{(1-j\Omega)}{(1+j\Omega)(1-j\Omega)} = \underbrace{\frac{1}{1+\Omega^2}}_{Re\{F(\Omega)\}} + j\underbrace{\frac{-\Omega}{1+\Omega^2}}_{Im\{F(\Omega)\}}$$

είδαμε ότι
$$F_H(\Omega) = Re\{F(\Omega)\} - Im\{F(\Omega)\} =$$
$$= \frac{1}{1+\Omega^2} + \frac{\Omega}{1+\Omega^2} =$$
$$= \frac{1+\Omega}{1+\Omega^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hartley του τετραγωνικού παλμού $p(t)$ εύρους τ, δηλ. $p(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

$$P_H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \mathrm{cas}(\Omega t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{cas}(\Omega t)\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (\cos \Omega t + \sin \Omega t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos \Omega t\, dt + \underbrace{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sin \Omega t\, dt}_{0} =$$

$$= \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\Omega}\left[\sin \frac{\Omega\tau}{2} - \sin \frac{-\Omega\tau}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Omega}\left[\sin \frac{\Omega\tau}{2} + \sin \frac{\Omega\tau}{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} = \frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega}{2}} = \tau \frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}} = \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2\pi}\right)$$

όπου $\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα αυτό είναι ίδιο με εκείνο του ΜF της $p(t)$.
Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το φανταστικό μέρος του ΜF της $p(t)$ είναι 0 (μηδέν) και άρα ο μετασχ. Hartley θα ισούται με:

$$P_H(\Omega) = \mathrm{Re}\{F(\Omega)\} - \underbrace{\mathrm{Im}\{F(\Omega)\}}_{0} = \mathrm{Re}\{F(\Omega)\}$$

Αυτό ισχύει για κάθε άρτια συνάρτηση, αφού ο μετασχ. Fourier αυτής θα είναι πραγματικός.

Ορισμένες απλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Hartley

- Γραμμικότητα: $\alpha f_1(t) + b f_2(t) \xleftrightarrow{H} \alpha F_{H1}(\Omega) + b F_{H2}(\Omega)$

- Κλιμάκωση στο χρόνο: $f(\alpha t) \xleftrightarrow{H} \frac{1}{|\alpha|} F_H\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$

- Ολίσθηση στο χρόνο: $f(t-t_0) \xleftrightarrow{H} \cos\Omega t_0 \, F_H(\Omega) + \sin\Omega t_0 \, F_H(-\Omega)$

- Διαμόρφωση: $f(t) \cos\Omega_0 t \xleftrightarrow{H} \frac{1}{2}\left[F_H(\Omega-\Omega_0) + F_H(\Omega+\Omega_0)\right]$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HILBERT

(Hilbert Transform or Transformer)

- Ορισμός: $H\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\, \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\, \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau}\, d\tau$

  - Πρόκειται για τη συνέλιξη του σήματος $x(t)$ με το σήμα $1/\pi t$. Δηλαδή πρόκειται για την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $1/\pi t$.

  - Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Hilbert είναι ένα σήμα στον χρόνο (όχι στη συχνότητα), γι' αυτό και συνήθως το συμβολίζουμε ως $\hat{x}(t)$, δηλ. $\hat{x}(t) = H\{x(t)\}$. Για τον ίδιο λόγο τον αναφέρουμε και ως μετασχηματιστή Hilbert (Hilbert transformer).

  - Η συνάρτηση $1/\pi t$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t=0$. Αυτός είναι ο λόγος που στον ορισμό της συνέλιξης χρησιμοποιούμε την Cauchy principal value (p.v.).

- Αντίστροφος μετασχ. Hilbert: $x(t) = -\hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} + c$, όπου c σταθερά

- Ζεύγη μετασχ. Hilbert

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$	$\alpha_1 \hat{x}_1(t) + \alpha_2 \hat{x}_2(t)$
$x(t-t_0)$	$\hat{x}(t-t_0)$
$x(\alpha t)$, $\alpha \neq 0$	$\text{sgn}(\alpha)\, \hat{x}(\alpha t)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$\frac{d}{dt} \hat{x}(t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
e^{jt}	$-j e^{jt}$
e^{-jt}	$j e^{-jt}$
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\text{rect}(t)$	$\frac{1}{\pi} \ln \left\| (2t+1)/(2t-1) \right\|$
$\text{sinc}(t)$	$\frac{\pi t}{2} \text{sinc}^2(t/2) = \sin(\frac{\pi t}{2})\, \text{sinc}(\frac{t}{2})$

• Συνέλιξη: $H\{x_1(t) * x_2(t)\} = \hat{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$

Απόδειξη: $H\{x_1(t) * x_2(t)\} = [x_1(t) * x_2(t)] * \frac{1}{\pi t} =$

$$= \underbrace{\left[x_1(t) * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\hat{x}_1(t)} * x_2(t) =$$

$$= x_1(t) * \underbrace{\left[x_2(t) * \frac{1}{\pi t}\right]}_{\hat{x}_2(t)}$$

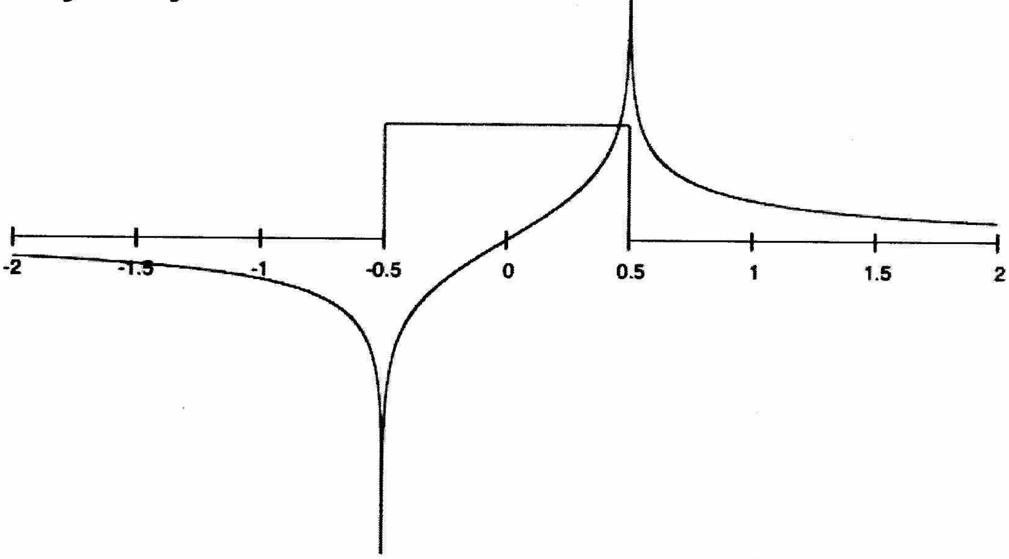
• Μετασχ. Hilbert σταθερού σήματος: $x(t) = c \xrightarrow{H} \hat{x}(t) = \hat{c} = 0$

Λόγω γραμμικότητας: $H\{x(t) + c\} = \hat{x}(t) + \hat{c} = \hat{x}(t)$

Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Hilbert "χάνει" την όποια σταθερή μετάθεση (dc offset) του σήματος.

• Ο μετασχ. Hilbert του τετραγωνικού παλμού δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.

$H\{rect(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{2t+1}{2t-1}\right|$



- Ο μετασχ. Hilbert στον χώρο Fourier

  – Ο μετασχ. Fourier του σήματος $1/\pi t$ ισούται με

$$-j\,\mathrm{sgn}(\Omega) = \begin{cases} -j & \text{εάν } \Omega>0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega=0 \\ j & \text{εάν } \Omega<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega>0 \\ 0 & \text{εάν } \Omega=0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{εάν } \Omega<0 \end{cases} = e^{-j\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\Omega)} \quad \text{για } \Omega\neq 0$$

  – Εάν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

  τότε $\hat{x}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,X(\Omega) = \hat{X}(\Omega)$

Απόδειξη: $F\{\hat{x}(t)\} = F\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\} = -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\cdot X(\Omega)$

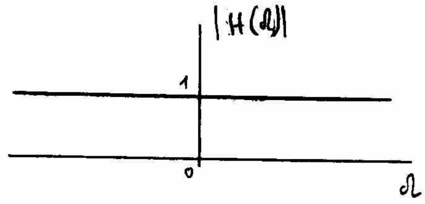
  – Η σχέση

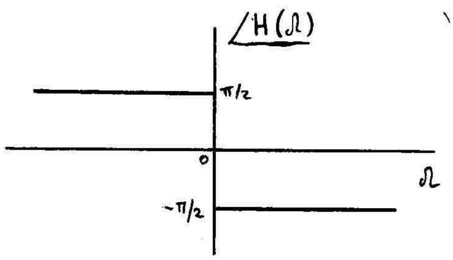
$$\hat{X}(\Omega) = \underbrace{-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)}_{H(\Omega)} \cdot X(\Omega)$$

Είναι πολύ βασική και ουσιαστικά καθιστά τον μετασχ. Hilbert πιο κατανοητό στον χώρο των συχνοτήτων απ' ότι στον χώρο του χρόνου.

Ο μετασχ. Hilbert δεν αλλάζει το μέτρο του $X(\Omega)$, αλλά μόνον τη φάση.

All pass filter





Για τις θετικές συχνότητες, οι τιμές του μετασχ. Fourier πολλαπλασιάζονται επί $-j$ (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά $-\pi/2$), ενώ για τις αρνητικές συχνότητες, οι τιμές του μετασχ. Fourier πολ/ζονται επί j (το οποίο ισοδυναμεί με αλλαγή φάσης κατά $\pi/2$).

Με άλλα λόγια ο μετασχ. Hilbert ουσιαστικά προκαλεί την ανταλλαγή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της $X(\Omega)$, με ταυτόχρονη αλλαγή προσήμου στο ένα από αυτά. Αναλυτικά:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = R(\Omega) + j\,I(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \hat{X}(\Omega) &= -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,X(\Omega) = \\ &= -j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\left[R(\Omega) + j\,I(\Omega)\right] = \\ &= \mathrm{sgn}(\Omega)\left[I(\Omega) - j\,R(\Omega)\right] \end{aligned}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

Έστω $x(t)$ ένα σήμα ενέργειας. Αφού $|\hat{X}(\Omega)| = |X(\Omega)|$, συνεπάγεται ότι τα $\hat{X}(\Omega)$ και $X(\Omega)$ έχουν την ίδια φασματική πυκνότητα ενέργειας. Με άλλα λόγια, εάν το εύρος των συχνοτήτων του $X(\Omega)$ περιορίζεται στα B Hz, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το $\hat{X}(\Omega)$.

Το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει ακριβώς την ίδια ενέργεια με το σήμα $x(t)$.

- Ορθογωνιότητα

Εάν το $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα ενέργειας, τότε τα σήματα $x(t)$ και $\hat{x}(t)$ είναι ορθογώνια.

Απόδειξη:
$$\langle x(t), \hat{x}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \hat{x}^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, \hat{X}(-\Omega)\, d\Omega =$$

Θεώρημα Rayleigh

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, \hat{X}^*(\Omega)\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, [-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\, X(\Omega)]^*\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\,\mathrm{sgn}(\Omega)\, |X(\Omega)|^2\, d\Omega =$$

$$= 0$$

αφού $|X(\Omega)|^2$ άρτια συνάρτηση του Ω, η $\mathrm{sgn}(\Omega)|X(\Omega)|^2$ είναι περιττή συνάρτηση του Ω, και συνεπώς η τιμή του ολοκληρώματος είναι μηδέν.

- $H\{\hat{x}(t)\} = -x(t)$ δηλ. $H\{H\{x(t)\}\} = -x(t)$ ή $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$

Απόδειξη:

$$F\{\hat{\hat{x}}(t)\} = [-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)]^2 X(\Omega) = -X(\Omega)$$

Άρα
$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hilbert του σήματος $x(t) = \frac{1}{t}$.

ΛΥΣΗ

$$H\{\delta(t)\} = \delta(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi t}$$

Λαμβάνοντας τον μετασχ. Hilbert και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης έχουμε:

$$H\{H\{\delta(t)\}\} = H\{\frac{1}{\pi t}\} \Rightarrow$$

$$-\delta(t) = H\{\frac{1}{\pi t}\} \Rightarrow$$

$$-\delta(t) = \frac{1}{\pi} H\{\frac{1}{t}\} \Rightarrow$$

$$H\{\frac{1}{t}\} = -\pi\, \delta(t)$$

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο μετασχ. Hilbert του σήματος $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ για $\Omega_0 > 0$.

ΛΥΣΗ $$H\{x(t)\} \triangleq \hat{x}(t) = \cos(\Omega_0 t) * \frac{1}{\pi t}$$

Λαμβάνοντας τον μετασχ. Fourier και των δύο μελών έχουμε:

$$F\{\hat{x}(t)\} = F\{\cos(\Omega_0 t) * \frac{1}{\pi t}\} \Rightarrow$$

$$\hat{X}(\Omega) = F\{\cos(\Omega_0 t)\} \cdot F\{\frac{1}{\pi t}\} = \langle \text{Βλ. σημείωση για υπολογισμό } F\{\cos\Omega_0 t\} \rangle =$$

$$= \pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)] \cdot [-j\,\mathrm{sgn}(\Omega)] =$$

$$= -j\pi\,\mathrm{sgn}(\Omega)\,[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)] =$$

$$= \frac{\pi}{j}[\mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \mathrm{sgn}(\Omega)\,\delta(\Omega+\Omega_0)] =$$

$$= \frac{\pi}{j}[\mathrm{sgn}(\Omega_0)\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \mathrm{sgn}(-\Omega_0)\,\delta(\Omega+\Omega_0)] =$$

$$= \frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)]$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών:

$$F^{-1}\{\hat{X}(\Omega)\} = F^{-1}\{\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0) - \delta(\Omega+\Omega_0)]\} \Rightarrow$$

$$\hat{x}(t) = \sin(\Omega_0 t)$$

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Hilbert επιφέρει αλλαγή φάσης 90°, οπότε το συνημίτονο γίνεται ημίτονο.

Σημείωση 1: $$F\{\cos(\Omega_0 t)\} = F\{\frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t})\} =$$

$$= \frac{1}{2}[F\{e^{j\Omega_0 t}\} + F\{e^{-j\Omega_0 t}\}] =$$

$$= \frac{1}{2}[2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0) + 2\pi\,\delta(\Omega+\Omega_0)] =$$

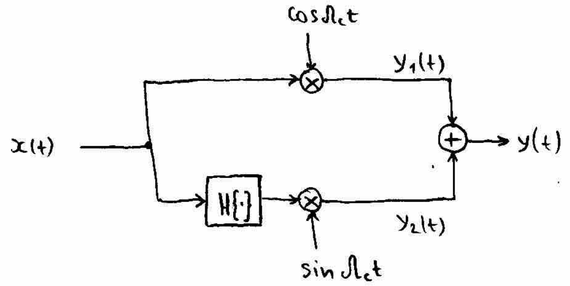
$$= \pi[\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)]$$

Σημείωση 2: Ο μετασχ. Hilbert του σήματος $x(t) = \sin\Omega_0 t$ προκύπτει εύκολα, ως εξής:

$H\{\sin\Omega_0 t\} = H\{H\{\cos\Omega_0 t\}\} = -\cos\Omega_0 t$ όπου έγινε χρήση των

$\sin\Omega_0 t = H\{\cos\Omega_0 t\}$ και $H\{H\{x(t)\}\} = -x(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος του σχήματος για $x(t)=\cos\Omega_x t$. Με $H\{\cdot\}$ συμβολίζεται ο μετασχηματιστής Hilbert.



ΛΥΣΗ $y_1(t) = x(t)\cdot\cos\Omega_c t = \cos\Omega_x t\cdot\cos\Omega_c t = \langle$ λόγω τριγων. ταυτότητας $\cos\alpha\cdot\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-b)+\cos(\alpha+b)\right]\rangle=$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c-\Omega_x)t}_{A}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c+\Omega_x)t}_{B} \qquad (1)$$

$y_2(t) = H\{x(t)\}\cdot\sin\Omega_c t = H\{\cos\Omega_x t\}\cdot\sin\Omega_c t =$

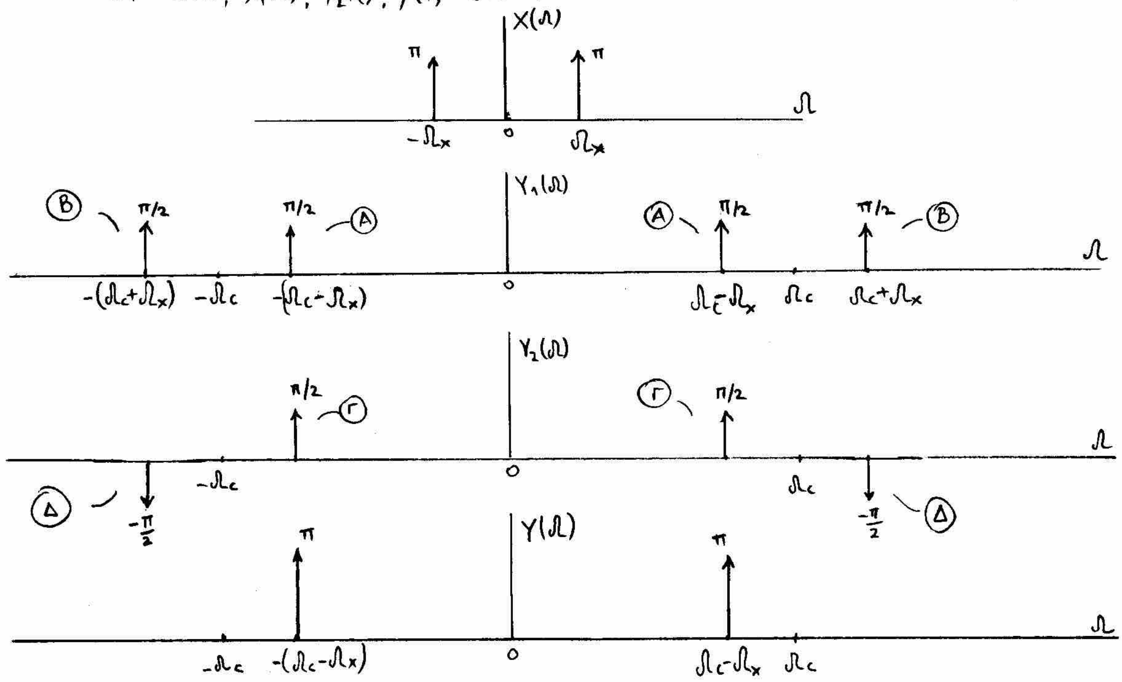
$= \sin\Omega_x t\cdot\sin\Omega_c t = \langle$ λόγω τριγων. ταυτότητας $\sin\alpha\cdot\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-b)-\cos(\alpha+b)\right]\rangle=$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c-\Omega_x)t}_{\Gamma}-\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega_c+\Omega_x)t}_{\Delta} \qquad (2)$$

Άρα

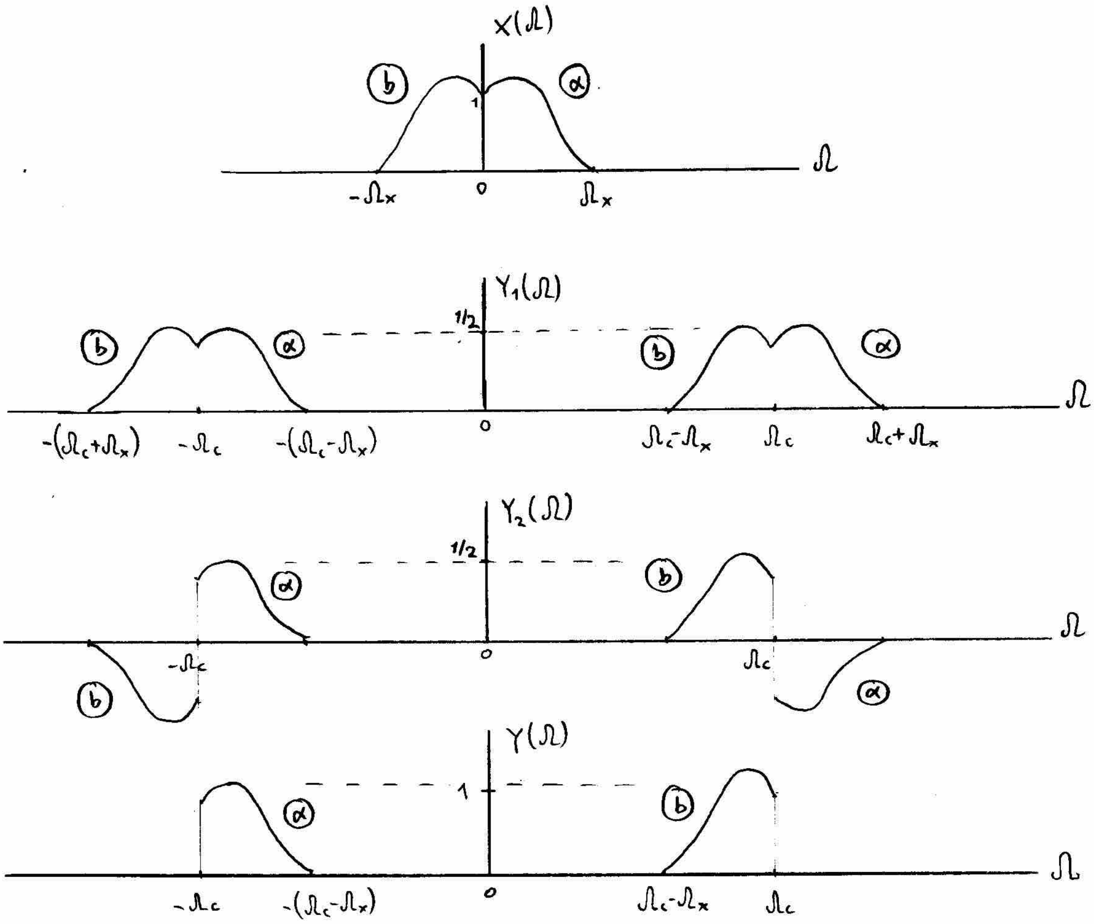
$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=\cos(\Omega_c-\Omega_x)t \qquad (3)$$

Οι $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y(t)$ στο πεδίο συχνότητας δείχνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



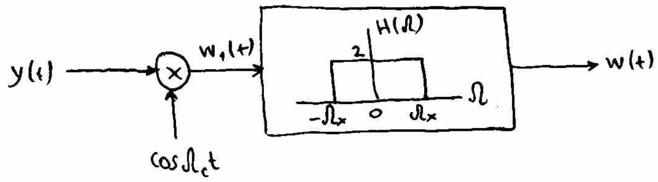
Σημείωση 1: Το σύστημα αυτό ονομάζεται "σύστημα μονόπλευρης διαμόρφωσης πλάτους" (single-sided amplitude modulation system) και πλεονεκτεί έναντι του αντίστοιχου αμφίπλευρου συστήματος ως προς το ότι απαιτεί λιγότερη ενέργεια για την μετάδοση, γι' αυτό συχνά χρησιμοποιείται σε φορητούς πομπούς AM (Amplitude Modulation).

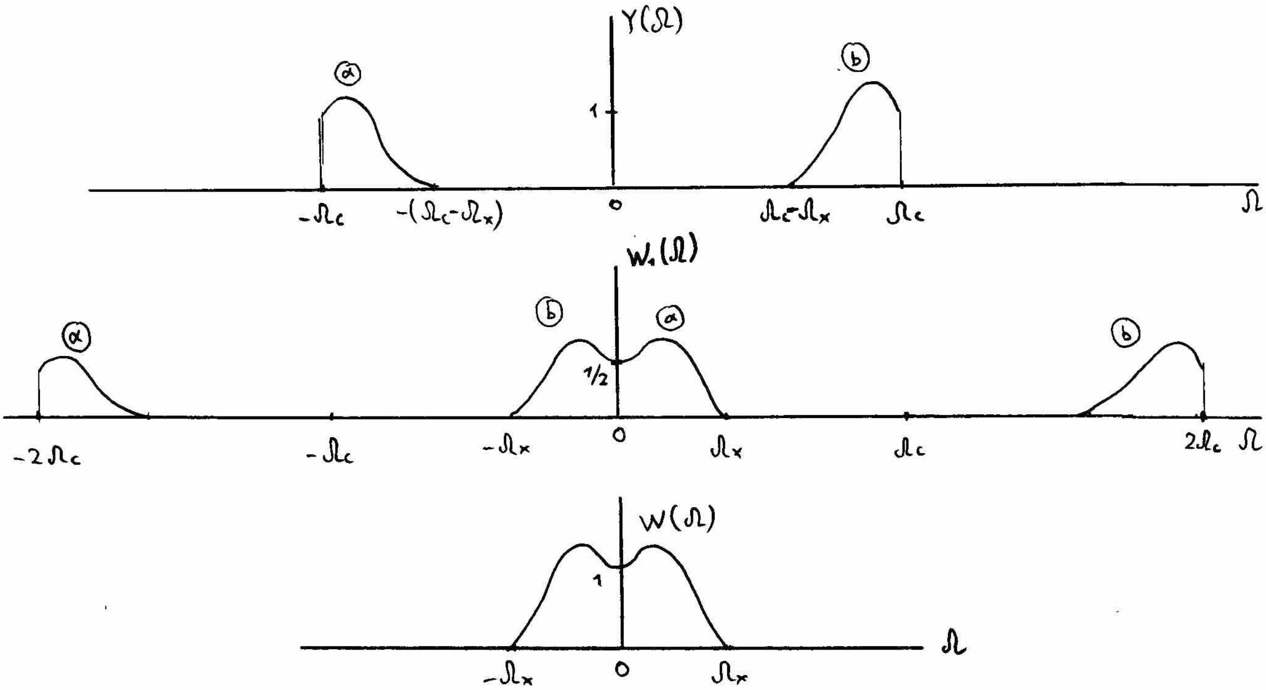
Σημείωση 2: Στη γενική περίπτωση που το σήμα εισόδου $x(t)$ είναι οποιοδήποτε πραγματικό εύρους συχνοτήτων Ω_x, τα φάσματα των $x(t), y_1(t), y_2(t), y(t)$ θα είναι ως ακολούθως:



Σημείωση 3: Ο μετασχ. Hilbert βρίσκει εφαρμογή στα συστήματα επικοινωνίας και στην επεξεργασία σήματος, όπως για παράδειγμα στη δημιουργία σημάτων μονόπλευρης διαμόρφωσης, στην επεξεργασία σημάτων radar, στην επεξεργασία ομιλίας, κ.ά.

Σημείωση 4: Το σύστημα αποδιαμόρφωσης (demodulation) του διαμορφωτή πλάτους μονής πλευράς, δείχνεται στο σχήμα, όπως και τα φάσματα των αντίστοιχων σημάτων.





ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο ΜF του σήματος $\frac{1}{\pi t}$.

ΛΥΣΗ Για τον υπολογισμό αυτό βασιζόμαστε στην ιδιότητα του δυϊσμού (duality property) του ΜF η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Εάν} \quad x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$$

$$\text{Τότε} \quad y(t) = X(t) \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi\, x(-\Omega)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα αυτή στο σήμα προσήμου (signum) και έχουμε:

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

$$y(t) = X(t) = \frac{2}{jt} \xleftrightarrow{F} Y(\Omega) = 2\pi\, x(-\Omega) = 2\pi\, \mathrm{sgn}(-\Omega)$$

Άρα

$$\frac{2}{jt} \xleftrightarrow{F} 2\pi\, \mathrm{sgn}(-\Omega) = -2\pi\, \mathrm{sgn}(\Omega)$$

ή

$$\frac{\cancel{j}}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{j}t} \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi}\left[-2\pi\, \mathrm{sgn}(\Omega)\right]$$

Τελικά

$$\frac{1}{\pi t} \xleftrightarrow{F} -j\, \mathrm{sgn}(\Omega)$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι:

$$F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\, \mathrm{sgn}(\Omega)$$

Σημείωση: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\frac{1}{\pi t}$ μας χρειάζεται για την κατανόηση του μετασχ. Hilbert.