



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Α1 - ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
(DFT – FFT)

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ

2023-2024

DFT

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DFT - DISCRETE FOURIER TRANSFORM)

ΟΡΙΣΜΟΙ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

← όπως f-ετακ. (DFT)

← αντίστροφος f-ετακ. (IDFT)

Ορίζοντας με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ την N -οστή ρίζα της μονάδας, οι παραπάνω σχέσεις εκφράζονται ως εξής:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

← DFT

← IDFT

- Οι ακολουθίες $x(n)$ και $X(k)$ είναι περιοδικές με περίοδο N (βλ. υποσημείωση)
- Οι συντελεστές $X(k)$ αποτελούν ομογενή δείγματα του $X(e^{j\omega})$ σε ισάπέχοντα κατά $\frac{2\pi}{N}$ βήματα στον άξονα των συχνοτήτων, δηλαδή $X(k)$ είναι η δυναμογραμμία του $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$.
- Για τον υπολογισμό κάθε σφηκτίου του DFT, ή αλλιώς για τον υπολογισμό κάθε συντελεστή $X(k)$, απαιτούνται N πολλαπλασιασμοί και $(N-1)$ ποσότητες πρόσθεσης. Συνεπώς, για τον υπολογισμό των N συντελεστών απαιτούνται συνολικά N^2 πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ ποσότητες πρόσθεσης. Σημειώνεται ότι για κάθε πολλαπλασιασμό απαιτούνται 4 πολλαπλασιασμοί και 2 ποσότητες πραγματικών αριθμών.
- Οι ορίσεις του DFT και IDFT N -βηθίων μπορούν να εκφραστούν και με τη βοήθεια πινάκων ως ακολούθως:

$$X_N = W_N x_N \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & \dots & \dots \\ W_N^{10} & W_N^{11} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)0} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$x_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N$$

Ο πίνακας W_N είναι συμμετρικός και ορθογώνιος (unitary).

Υποσημείωση: $x(n+N) = x(n)$ για όλα τα n
 $X(k+N) = X(k)$ για όλα τα k

• Ο DFT έχει προκύψει από τον DTFT (ο οποίος είναι συνεχής και περιοδικός με περίοδο 2π) με δειγματοληψία στη συχνότητα ανά $2\pi/N$. Αυτά τα ισοπέκοντα δείγματα συχνότητας $X(k) \equiv X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, $k=0,1,2,\dots,N-1$ αντιστοιχούν στο φάσμα ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $x_p(n)$ περιόδου N .

► Εάν η ακολουθία $x(n)$ (το σήμα διακριτού χρόνου) έχει μήκος (χρονική διάρκεια) N , τότε το σήμα $x_p(n)$ είναι απλά η περιοδική επανάληψη του $x(n)$ ανά N δείγματα. Σε μια περίοδο δηλαδή, θα ισχύει

$$x_p(n) = x(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

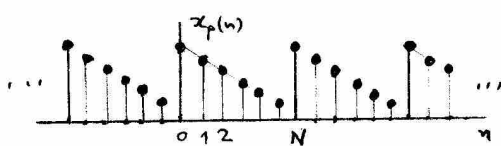
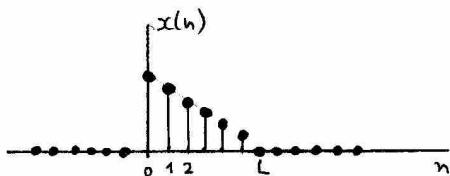
► Εάν το σήμα $x(n)$ έχει μήκος $L < N$, τότε το σήμα $x_p(n)$ θα ισούται με την περιοδική επανάληψη ενός σήματος το οποίο αποτελείται από το $x(n)$ για L σφίγια και μηδενικά για τα υπόλοιπα $N-L$ σφίγια.

Σε μια περίοδο δηλαδή θα ισχύει

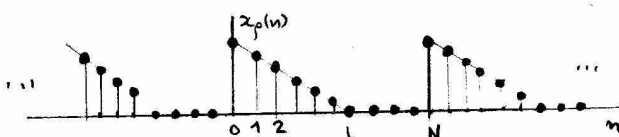
$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

► Εάν το σήμα $x(n)$ έχει μήκος $L > N$, τότε το σήμα $x_p(n)$ θα ισούται με την περιοδική επανάληψη ενός σήματος N σφίγιων το οποίο θα είναι μια aliased έκδοση του $x(n)$. Δηλαδή δεν είναι δυνατό να ανακταθεί το σήμα $x(n)$ από την περιοδική επέτασή του λόγω του φαινομένου aliasing στον χρόνο (time-domain aliasing).

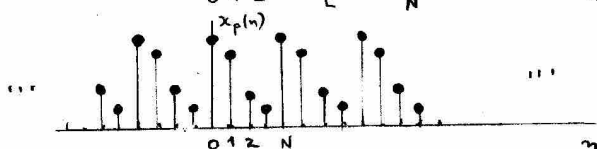
Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και τα σήματα $x(n)$ των οποίων η διάρκεια είναι άπειρη, δηλ. $L \rightarrow \infty$.



$$L = N$$



$$L < N$$



$$L > N$$

ΑΣΚΗΣΗ Μια πεπερασμένη σειρά ακολουθία δίνεται από τη σχέση

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

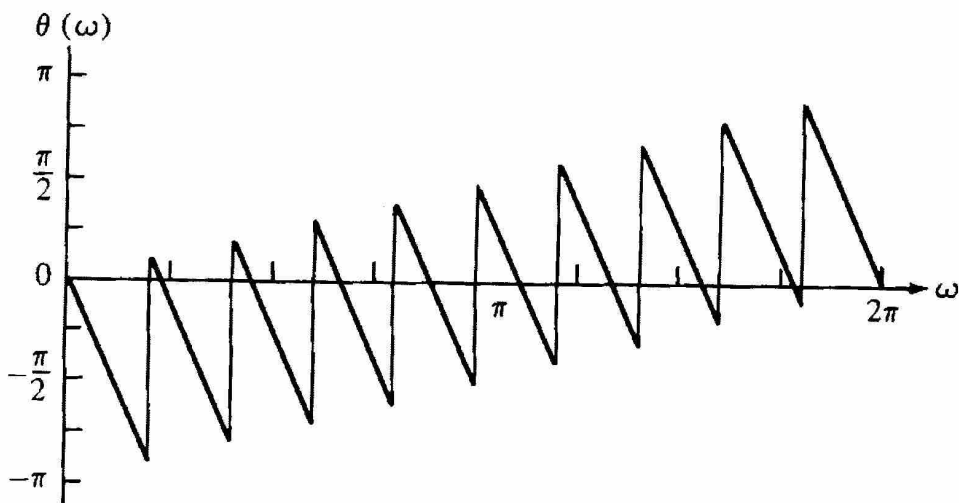
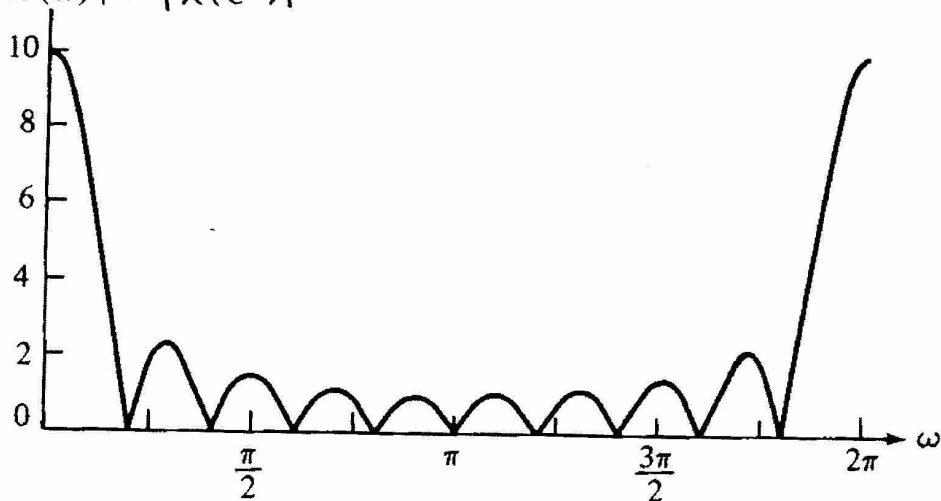
Να υπολογιστεί ο DFT N-σημάτων για $N \geq L$.

ΛΥΣΗ Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της σειράς L ακολουθίας δίνεται ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Το μέτρο και η φάση του $X(e^{j\omega})$ δείχνονται στο παρακάτω σχήμα για $L=10$.

$$|X(\omega)| \cong |x(e^{j\omega})|$$

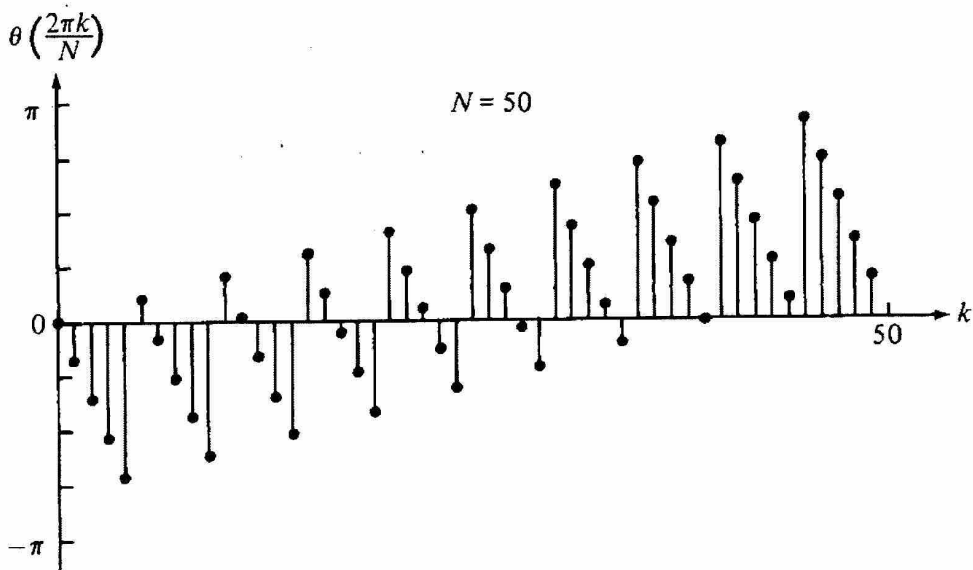
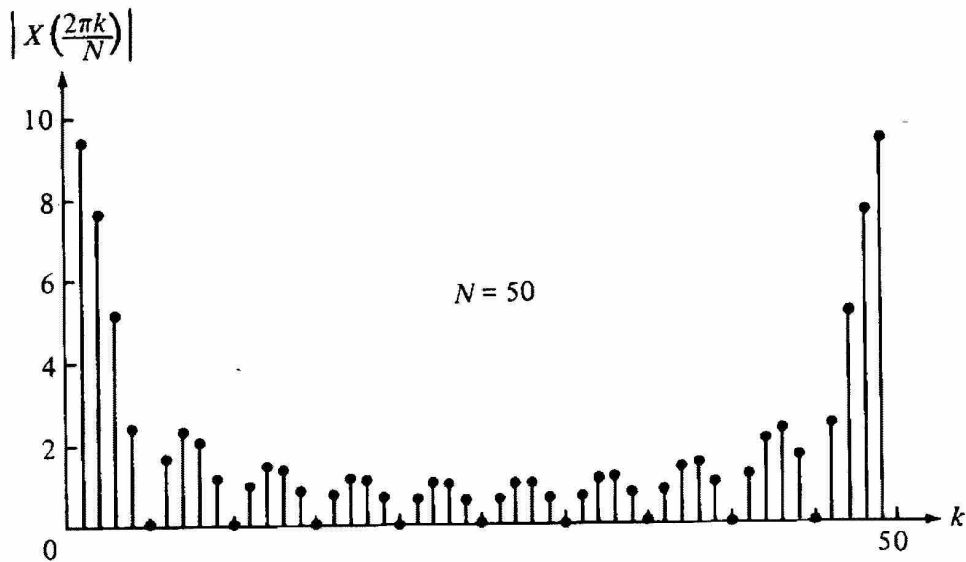


Ο DFT N -σημείων της ακολουθίας $x(n)$ προκύπτει από το $X(e^{j\omega})$ υπολογιζόμενο σε N ισαπέχουσες συχνότητες $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k=0, 1, \dots, N-1$.
 Έχουμε δηλαδή

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = e^{-j\pi k(L-1)/N} \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} \quad \text{όπου } k=0, 1, \dots, N-1$$

Για την περίπτωση $N=L$ προκύπτει ότι $X(k) = \begin{cases} L & k=0 \\ 0 & k=1, 2, \dots, L-1 \end{cases}$

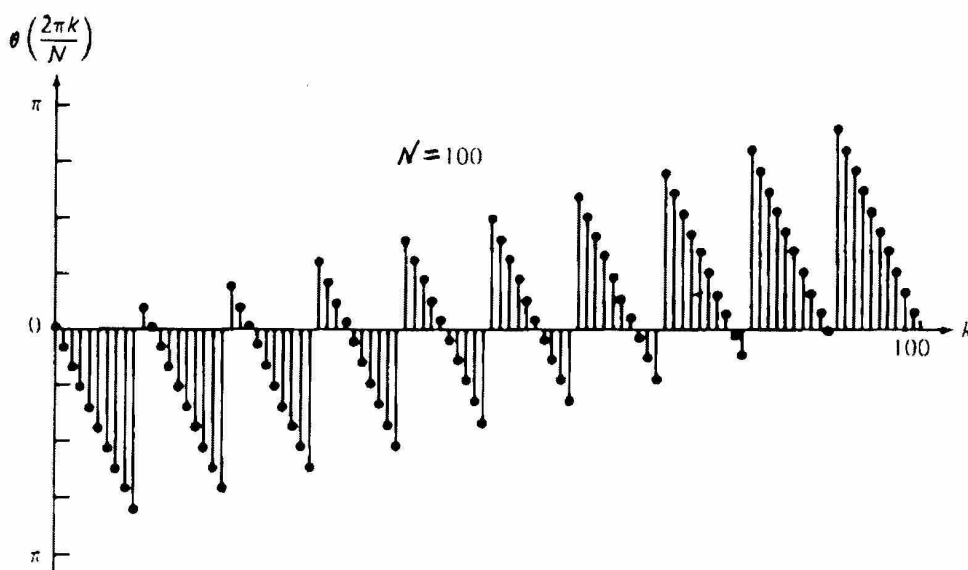
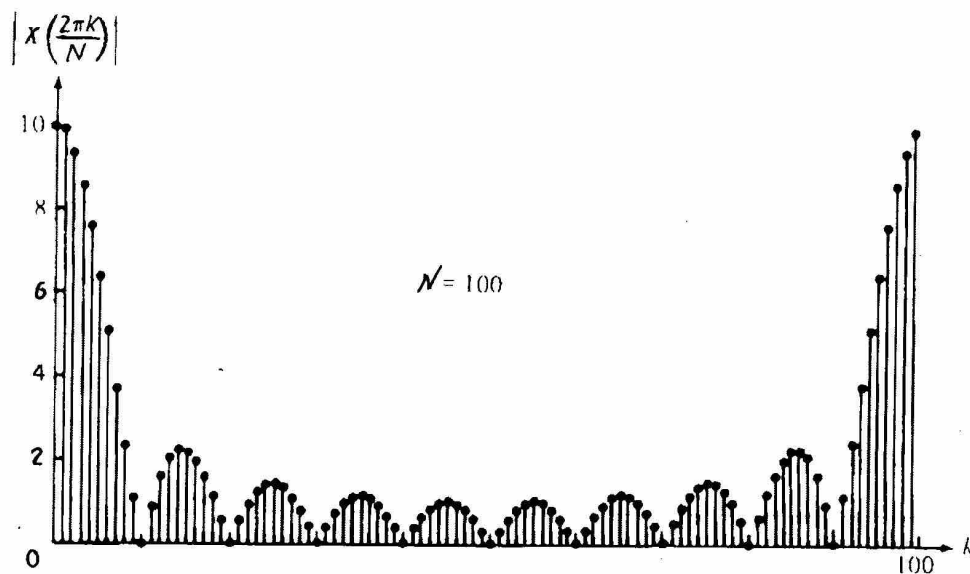
Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή ο DFT έχει μόνο μία μη μηδενική τιμή.
 (Σημείωση: Η περίπτωση αυτή δεν είναι άλλη από τη δεικνή του DFT του μοναδιαίου δείκτητος $\delta(n)$. Αυθόραξε ότι $\delta(n) \xrightarrow{\text{DFT}} 1$).



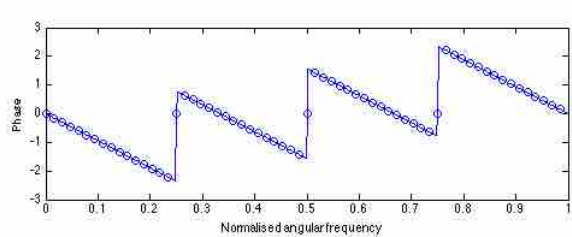
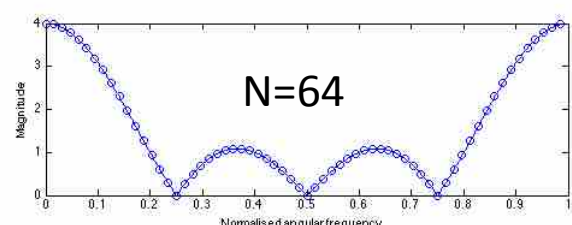
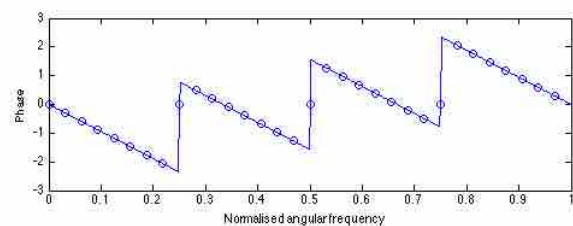
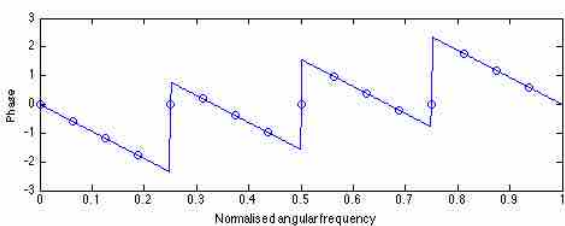
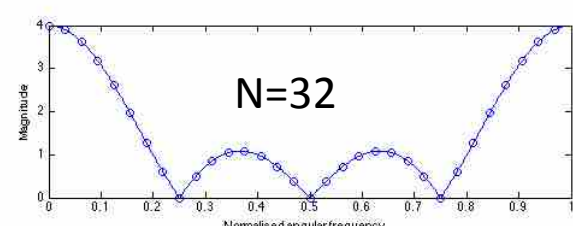
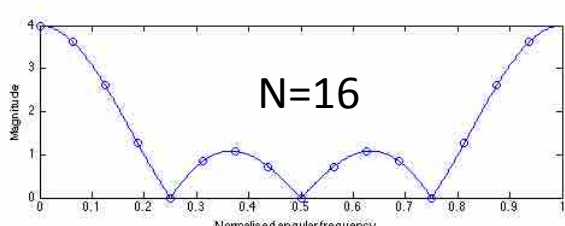
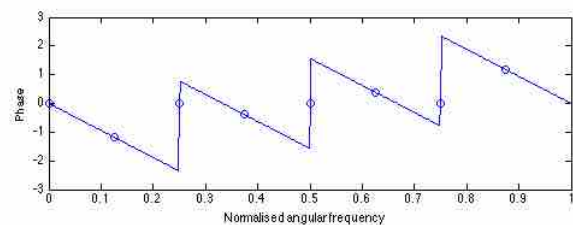
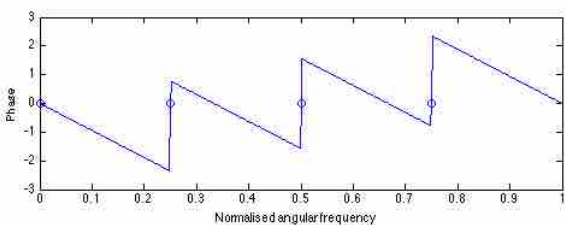
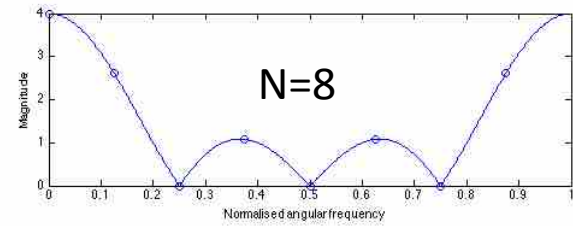
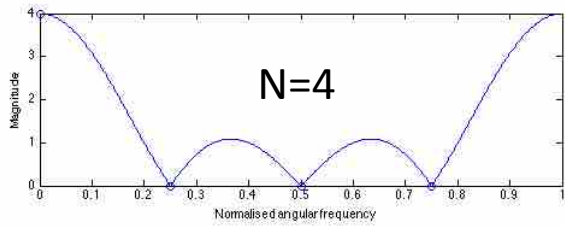
Η $x(n)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από την $X(k)$ υπολογίζοντας τον αντίστροφο DFT (IDFT) L-σημείων.

Αν και ο DFT L-σημείων είναι ικανός να αντιπροσωπεύει μοναδικά την ακολουθία $x(n)$ στον χώρο των συχνοτήτων, εν τούτοις δεν μας παρέχει επαρκή λεπτομέρεια για να έχουμε μια καλή εικόνα του φάσματος της $x(n)$. Για να αυξήσουμε τη λεπτομέρεια θα πρέπει να υπολογίσουμε δείγματα της $X(e^{j\omega})$ σε πιο στενές αποστάσεις συχνότητας, δηλαδή $\omega_k = \frac{2\pi}{N}$, όπου $N > L$. Στην πράξη είναι συν να αυξάνουμε το μήκος της ακολουθίας από L σε N σημεία, προσεγγίζοντας N-L μηδενικά (zero padding). Έτσι ο N-σημείων DFT έμμετρα δίνει καλύτερη παράφραση από τον L-σημείων DFT.

Το προηγούμενο, όπως και το επόμενο σχήμα, δίνουν τις κυματομορφές φίτρου και φάσης για $N=50$ και $N=100$, αντίστοιχα. Το $L=10$ και στις δύο περιπτώσεις. Παρατηρείται ότι με περισσότερα σημεία προσεγγίζουμε καλύτερα το συνεχές φάσμα $X(e^{j\omega})$.



Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων (μέτρο και φάση) της ακολουθίας $x(n)=\delta(n)+\delta(n-1) + \dots +\delta(n-L+1)$ για $L=4$ και $N=4, 8, 16, 32, 64$.



ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του μιγαδικού σήματος $x_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk_0}$, $n=0,1,\dots,N-1$, και k_0 κέραιος.

ΛΥΣΗ

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}}_{z_1(n)} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{W_N} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)n} \right]}_{\alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \text{για } \alpha=1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

• $\alpha=1$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)n} = 1 \rightsquigarrow k_0-k = \ell N \quad \text{ή} \quad k_0-k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$$

Άρα όταν k_0-k κέραιος πολλαπλάσιο της (περιόδου) N έχουμε

$$X_1(k) = N$$

• $\alpha \neq 1$

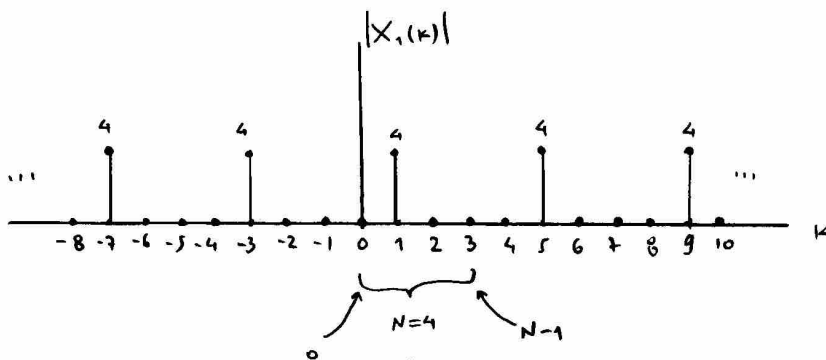
$$X_1(k) = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = \frac{1 - e^{j2\pi(k_0-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = 0$$

Τελικά έχουμε:

$$X_1(k) = \begin{cases} N & \text{για } k = k_0 - \ell N \quad \text{όπου } \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εφαρμογή για $k_0=1$ και $N=4$

$$X_1(k) = \begin{cases} 4 & \text{για } k = 1 - \ell N \quad \text{ή} \quad k = \dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



N δείγματα συχνότητας

Όλα τα άλλα είναι οι επαναλήψεις, λόγω της περιοδικότητας του φάσματος με περίοδο N .

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του ημιβαθμικού σήματος $x_2(n) = e^{j(k_0 + \theta) \frac{2\pi}{N} n}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ όπου $0 < \theta < 1$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η συχνότητα του σήματος δεν είναι $k_0 \frac{2\pi}{N}$, αλλά κάποια άλλη μεγαλύτερη από αυτή και μικρότερη από το επόμενο ακέραιο πολλαπλάσιο της $(k_0 + 1) \frac{2\pi}{N}$.

ΛΥΣΗ
$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k_0 + \theta) \frac{2\pi}{N} n} e^{-j k \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)} \right]^n}_{\alpha} = \begin{cases} N & \text{για } \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & \text{για } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

• $\alpha = 1$

$$e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)} = 1 \rightarrow \frac{k_0 + \theta - k}{N} = \ell \Rightarrow \theta = \underbrace{\ell N + k - k_0}_{\text{ακέραιος}}$$

Αλλά $0 < \theta < 1$, δηλ. το θ δεν είναι ακέραιος. Άρα αυτό είναι αδύνατον, Συνεπώς η περίπτωση $\alpha = 1$ είναι αδύνατον να συμβεί.

• $\alpha \neq 1$

$$X_2(k) = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k) \cdot N}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)}} = \frac{1 - e^{j 2\pi (k_0 + \theta - k)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)}} = \frac{1 - e^{j 2\pi (k_0 - k)} e^{j 2\pi \theta}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)}} \Rightarrow$$

$$X_2(k) = \frac{1 - e^{j 2\pi \theta}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k_0 + \theta - k)}}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η συχνότητα του σήματος δεν ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο της $\frac{2\pi}{N}$, τότε το φάσμα "διαχέεται" ή "διαρρέει" στις υπόλοιπες συχνότητες. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φασματική διαρροή (spectral leakage).

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί ο DFT του πραγματικού σήματος $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} k_0 n\right)$, όπου $n=0,1,\dots,N-1$ και k_0 ακέραιος.

ΛΥΣΗ Με χρήση της ταυτότητας του Euler έχουμε

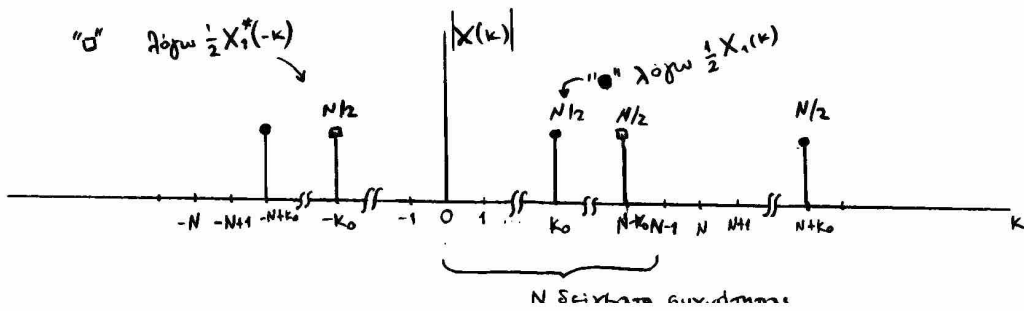
$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} k_0 n\right) = \frac{1}{2} \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N} k_0 n}}_{x_1(n)} + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N} k_0 n}}_{x_1^*(n)}$$

Δηλαδή $x(n) = \frac{1}{2} x_1(n) + \frac{1}{2} x_1^*(n)$ όπου $x_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} k_0 n}$

Συνεπώς $X(k) = \frac{1}{2} X_1(k) + \frac{1}{2} X_1^*(-k)$

όπου $X_1(k) = \begin{cases} N & \text{για } k = k_0 - lN, \text{ όπου } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

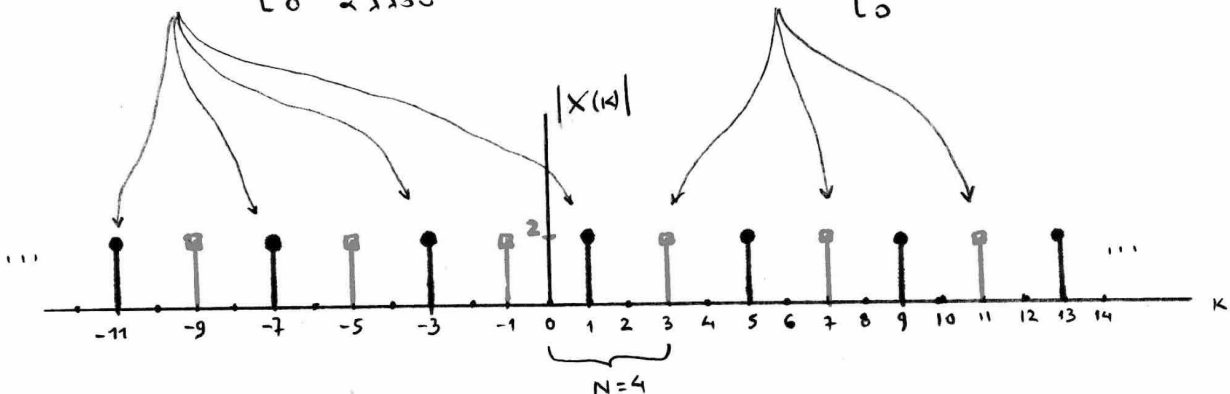
$X_1^*(-k) = \begin{cases} N & \text{για } -k = k_0 - lN, \text{ όπου } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



Εφαρμογή για $k_0=1$ και $N=4$

$X_1(k) = \begin{cases} 4 & \text{για } k = \dots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$X_1^*(-k) = \begin{cases} 4 & \text{για } k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots \\ 0 & \end{cases}$

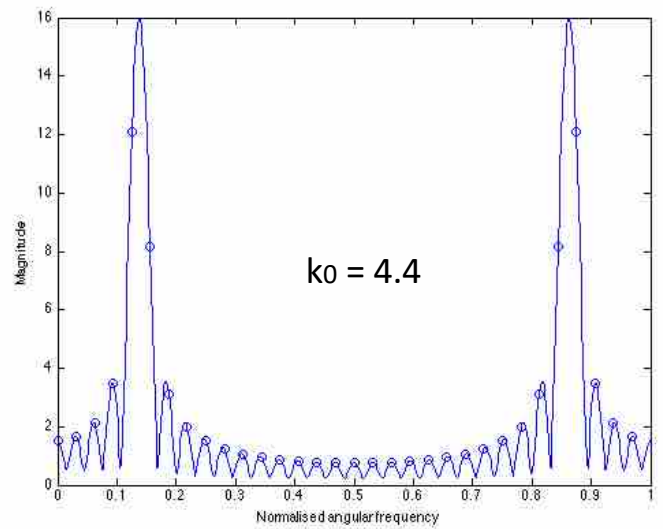
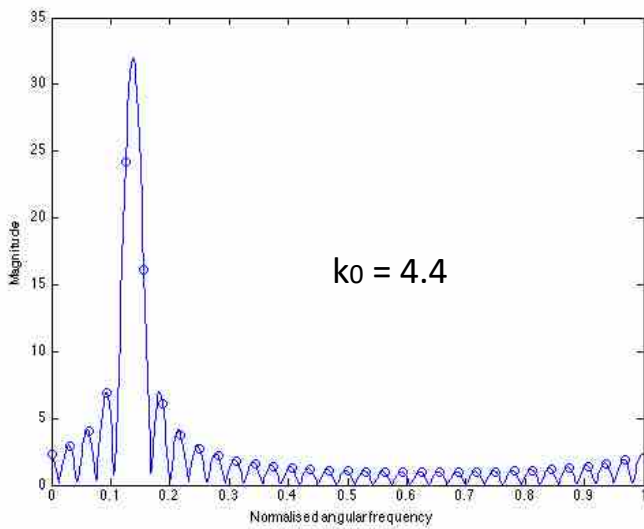
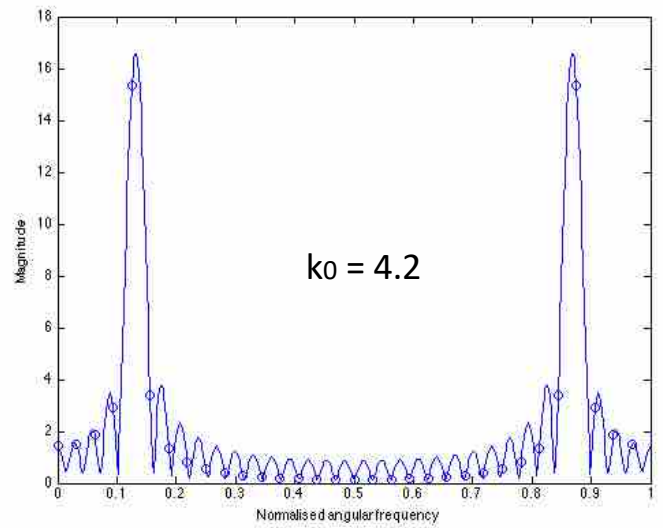
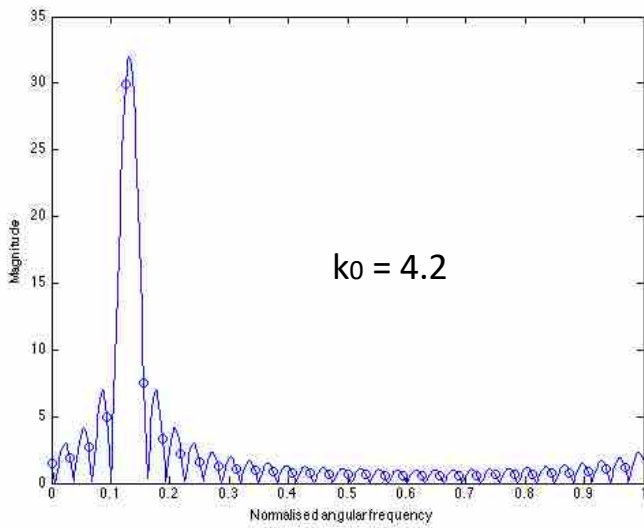
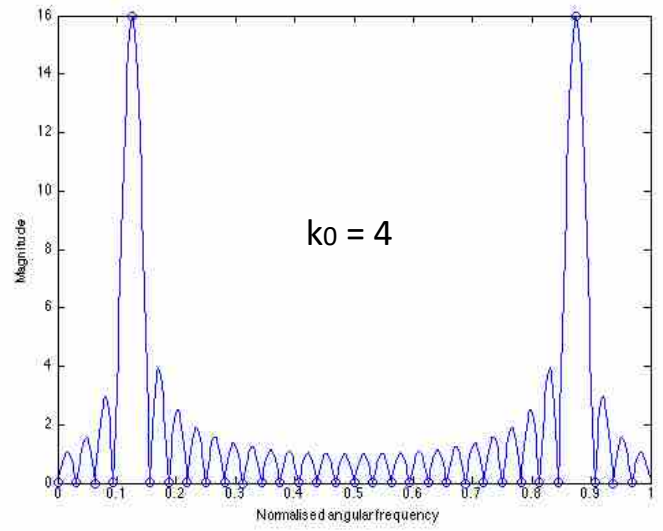
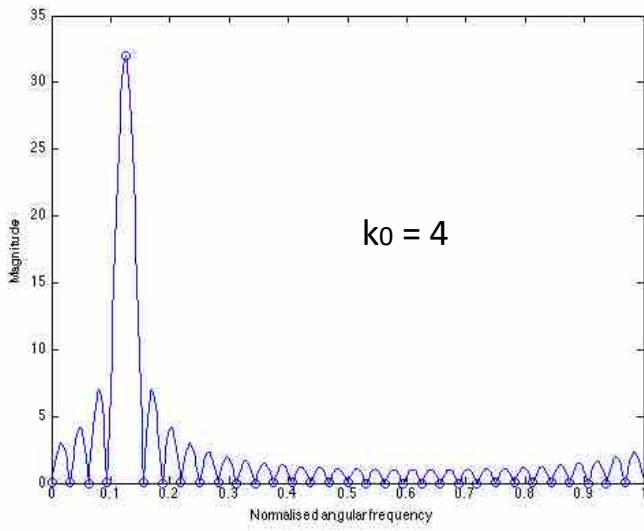


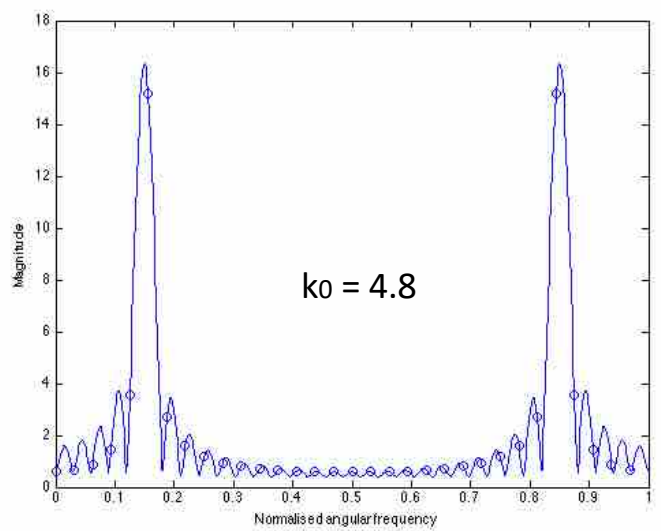
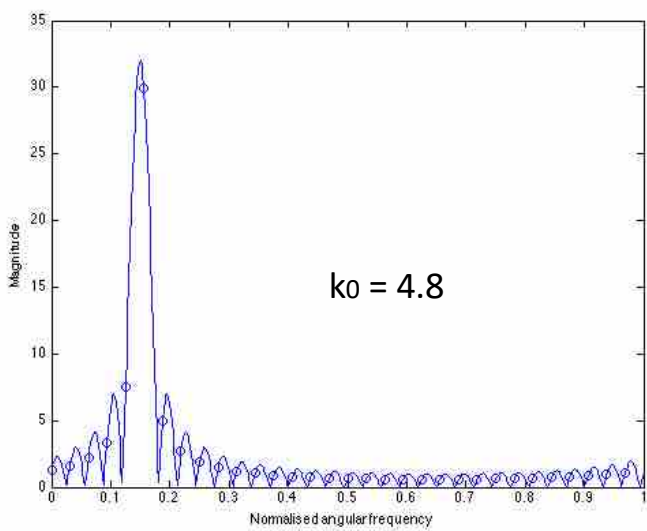
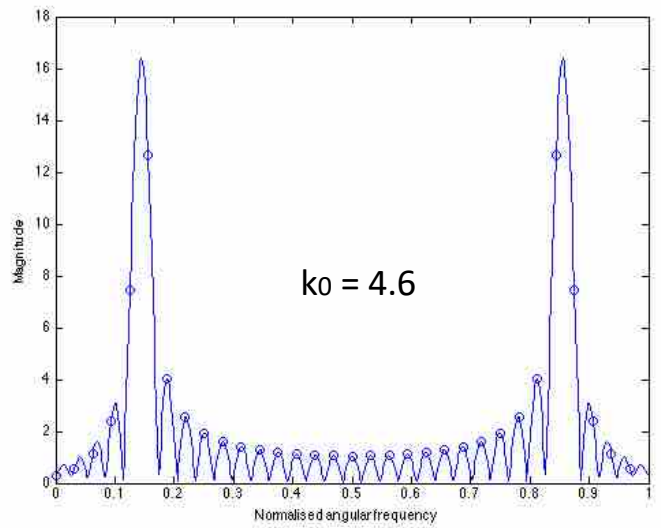
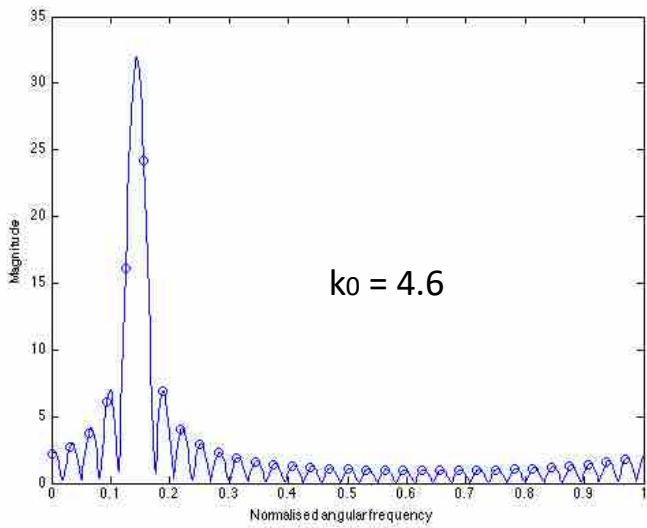
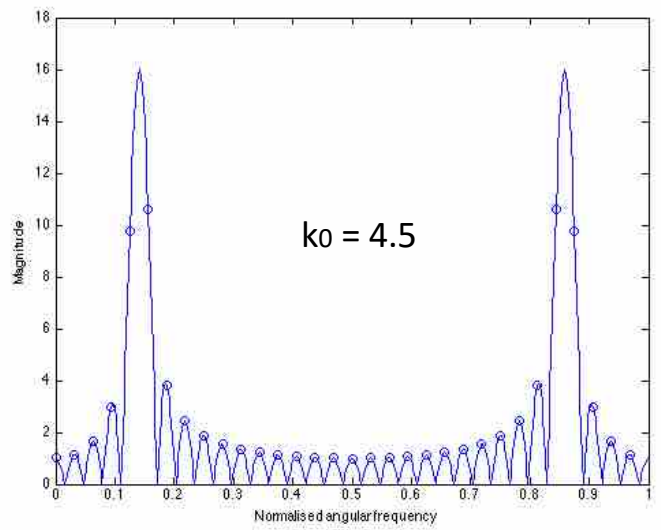
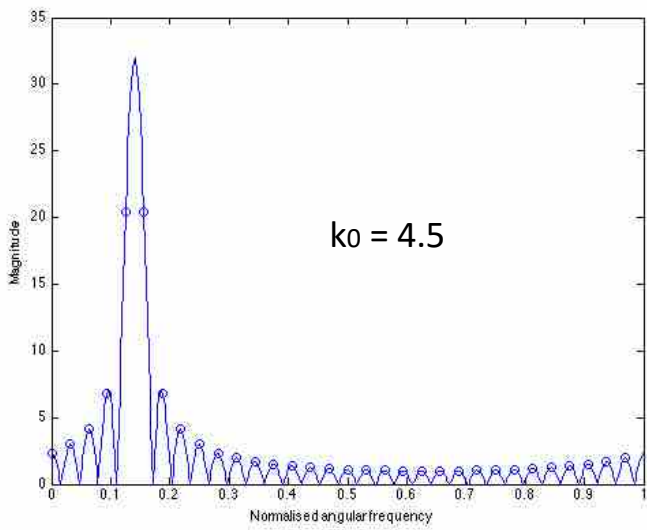
Υποσημείωση: Με "●" σημειώνονται οι συνιστώσες συχνότητας που οφείλονται στο $X_1(k)$, ενώ με "□" σημειώνονται οι συχνότητες που οφείλονται στο (προκείμενου από) $X_1^*(-k)$.

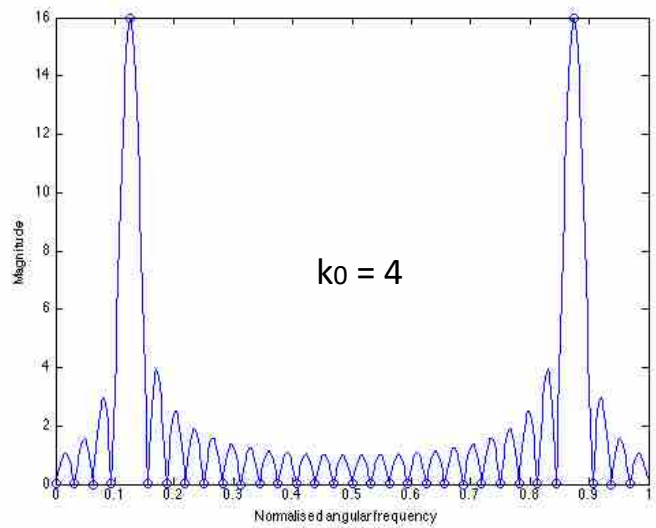
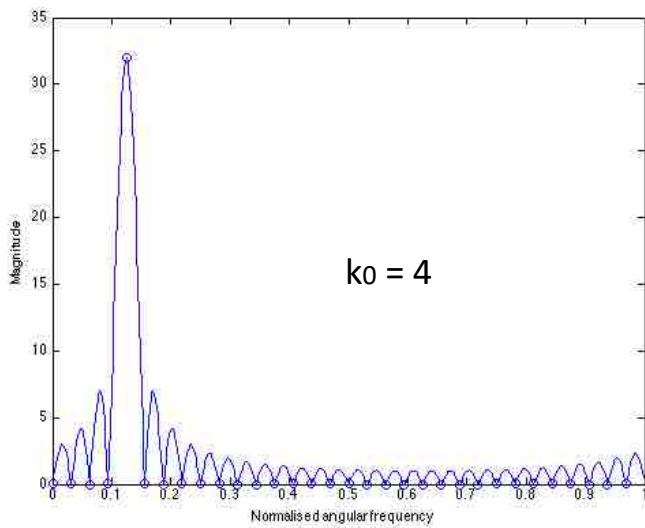
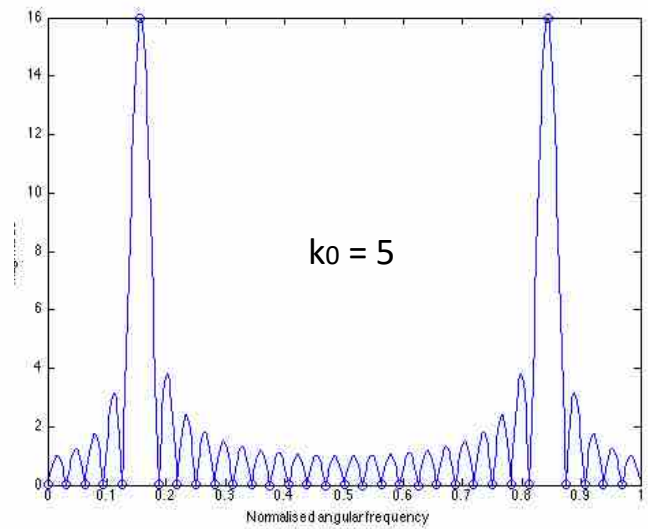
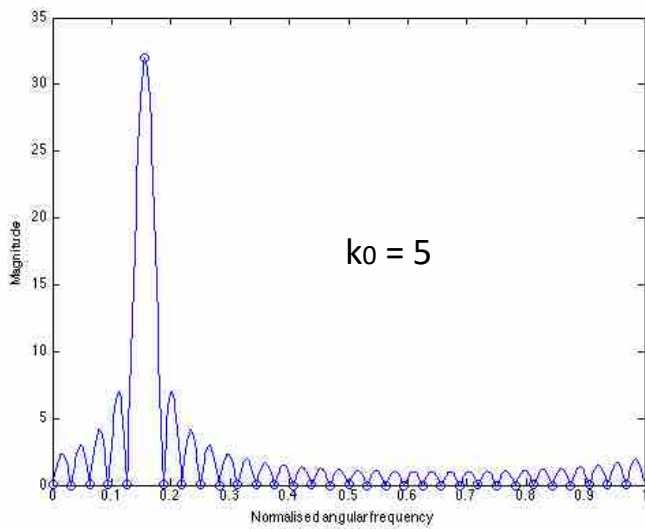
N=32

$x(n) = \exp(j2\pi n k_0 / N)$

$x(n) = \cos(2\pi n k_0 / N)$







Matlab code

```
N = input('Number of points = ');
k0 = input('Frequency = ');
n = 0:N-1;
x = exp(j*((2*pi)/N)*k0*n);
```

```
X = fft(x);
XE = fft(x, 512);
```

```
% Plot the magnitude of X
L = 0:511;
plot(L/512, abs(XE))
hold
plot(n/N, abs(X), 'o')
xlabel('Normalised angular frequency')
ylabel('Magnitude')
```

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΟΣ

- Ο υπολογισμός του DFT N -εμφάνων ενός σήματος $x(n)$ πεπερασμένης διάρκειας N ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του DFT N -εμφάνων ενός περιοδικού σήματος $x_p(n)$ περιόδου N , το οποίο έχει προκύψει από την περιοδική επέκταση του $x(n)$, δηλαδή

$$x_p(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - qN)$$

Ας υποθέσουμε ότι το περιοδικό σήμα $x_p(n)$ υφίσταται ολίσθηση προς τα δεξιά κατά k μονάδες. Το σήμα που προκύπτει είναι το $x_p(n-k)$, όπου

$$x_p(n-k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n-k-qN)$$

Το πεπερασμένο διάρκειας σήμα $x'(n)$ που αποτελείται από τα N δείγματα μεταξύ 0 και $N-1$, δηλ.

$$x'(n) = \begin{cases} x_p(n+k) & \text{για } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{άλλου} \end{cases}$$

προκύπτει από το αρχικό σήμα $x(n)$ μέσω κυκλικής ολίσθησης. (βλ. σχήμα στην επόμενη σελίδα για $N=4$).

Συμπέρασμα: Η κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας N -εμφάνων ισοδυναμεί με τη γραμμική ολίσθηση (τετατόισιν) της περιοδικής της επέκτασης.

- Μια ακολουθία N -εμφάνων ονομάζεται κυκλικά άρτια εάν είναι συμμετρική γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(N-n) = x(n) \quad 1 \leq n \leq N-1$$

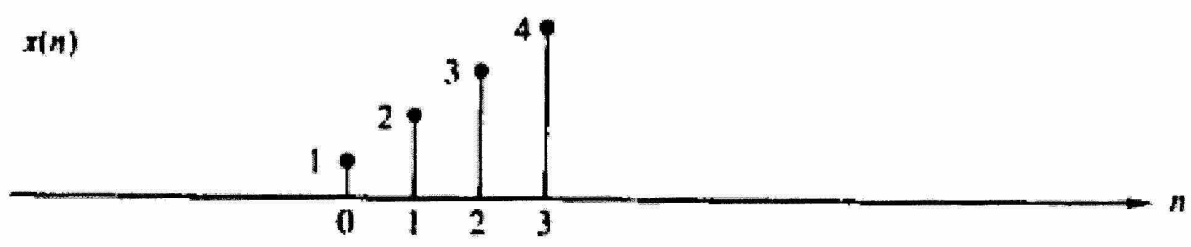
- Μια ακολουθία N -εμφάνων ονομάζεται κυκλικά περιττή εάν είναι αντισυμμετρική γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(N-n) = -x(n) \quad 1 \leq n \leq N-1$$

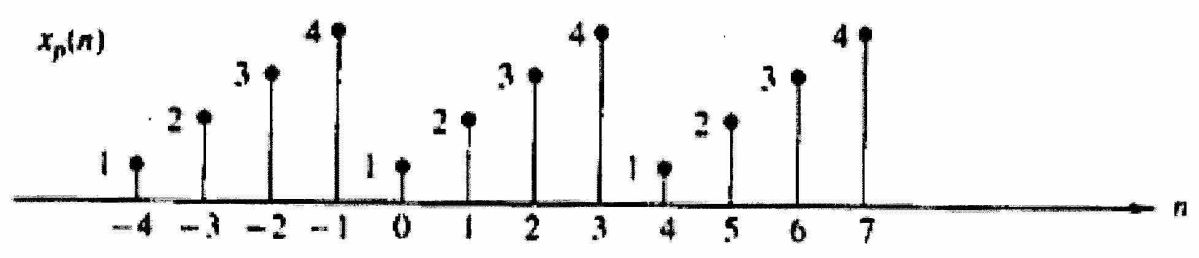
- Η χρονική αναστροφή (time reversal) μιας ακολουθίας N -εμφάνων προκύπτει από την αναστροφή των στοιχείων της γύρω από το σημείο 0 (μηδέν) του κύκλου:

$$x(\langle -n \rangle_N) = x(N-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

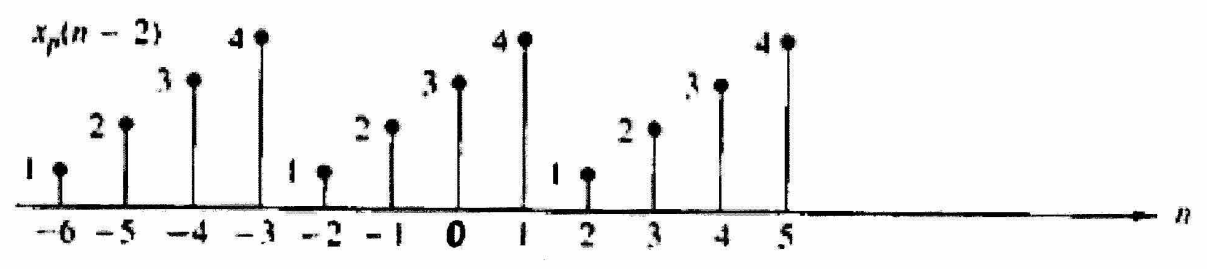
Η χρονική αναστροφή ισοδυναμεί με τη σχεδίαση της $x(n)$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού πάνω στον κύκλο.



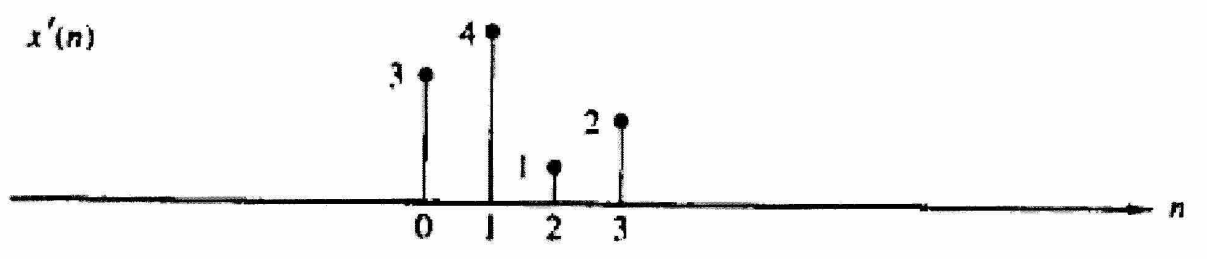
(a)



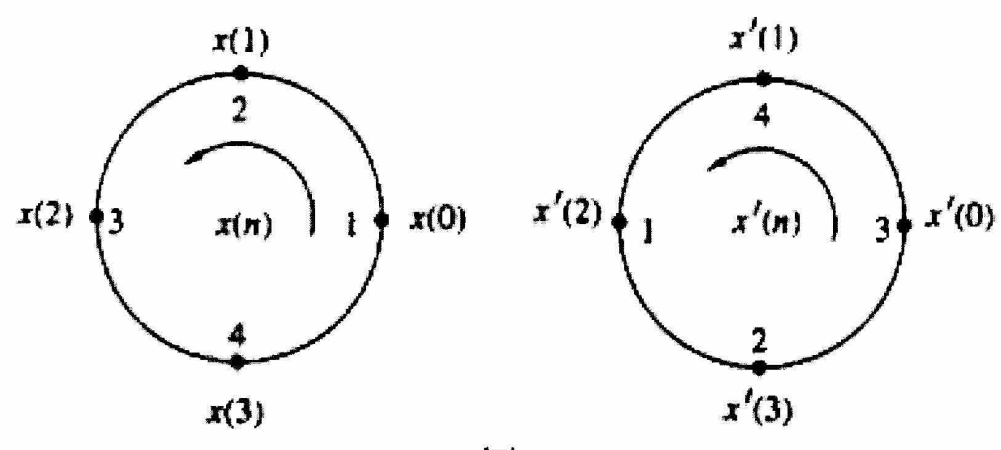
(b)



(c)



(d)



(e)

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$ και $x_2(n) = \{4, 5, 6\}$ μέσω του DFT και IDFT.

ΛΥΣΗ Κατ' αρχήν υπολογίζουμε τον DFT των ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$ για $N=3$.

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^2 x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{3}nk} = x_1(0) + x_1(1) e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + x_1(2) e^{-j\frac{2\pi}{3}2k} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + 3e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^2 x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{3}nk} = 4 + 5e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + 6e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$$X_1(0) = 6$$

$$X_2(0) = 15$$

$$X_1(1) = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_2(1) = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1(2) = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_2(2) = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας (στοιχείο προς στοιχείο) τις ακολουθίες $X_1(k)$ και $X_2(k)$ παίρνουμε την ακολουθία

$$X_3(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

$$\text{όπου } X_3(0) = 90$$

$$X_3(1) = \frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3(2) = \frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ο αντίστροφος DFT (IDFT) της $X_3(k)$ θα μας δώσει την ακολουθία $x_3(n)$ που δεν είναι άλλη από την κυκλική συνέλιξη των $x_1(n)$ και $x_2(n)$.

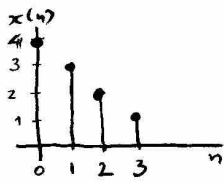
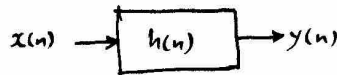
$$\begin{aligned} x_3(n) &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 X_3(k) e^{j\frac{2\pi}{3}nk} = \frac{1}{3} \left[X_3(0) + X_3(1) e^{j\frac{2\pi}{3}n} + X_3(2) e^{j\frac{4\pi}{3}n} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[90 + \left(\frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \left(\frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}n} \right] \end{aligned}$$

Τελικά, για $n=0, 1, 2$ βρίσκουμε αντίστοιχα:

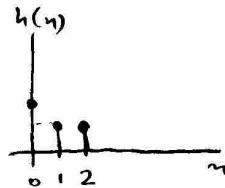
$$x_3(0) = 31 \quad x_3(1) = 31 \quad x_3(2) = 28$$

$$x_3(n) = \{31, 31, 28\}$$

ΑΣΚΗΣΗ



$$x(n) = \{4, 3, 2, 1\}$$



$$h(n) = \{2, 1, 1\}$$

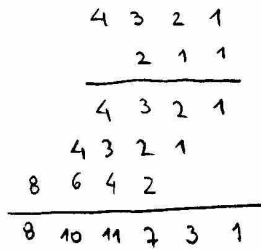
Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ με καθένα από τις ακόλουθες μεθόδους:

- α. Απευθείας υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης
- β. Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης μέσω φίλτρων και φόρων κυκλικής συνέλιξης
- γ. Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης μέσω radix-2 FFT αλγορίθμων.

Για καθένα από τις μεθόδους υπολογισμού να προσδιορίσετε το πλήθος των πραγματικών πολ/φών. Για την περίπτωση των radix-2 FFT να μην λάβετε υπόψη και τους μιγαδικούς πολ/φους $\pm 1, \pm j, W_N^0$.

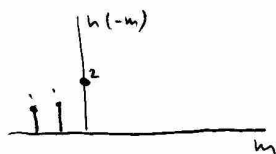
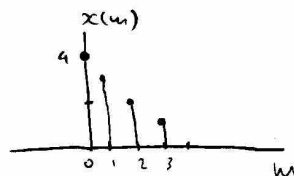
ΛΥΣΗ

α. Απευθείας υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1)$$



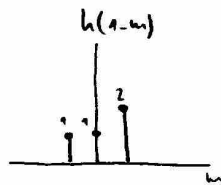
$$\Rightarrow y(n) = \{8, 10, 11, 7, 3, 1\}$$

Από τη σχέση της συνέλιξης (1) η κανονική διαδικασία υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης έχει ως εξής:

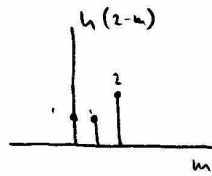


$$\Rightarrow y(0) = 4 \cdot 2 = 8$$

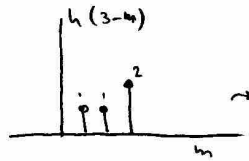
\rightarrow 1 πραγμ. πολ/φός



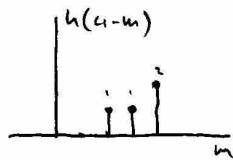
$$\rightarrow y(1) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10 \rightarrow 2 \text{ πραγ. πολ/φοι}$$



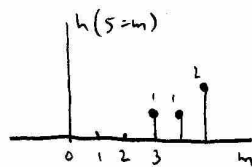
$$\rightarrow y(2) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11 \rightarrow 3 \text{ πραγ. πολ/φοι}$$



$$\rightarrow y(3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7 \rightarrow 3 \text{ πραγ. πολ/φοι}$$



$$\rightarrow y(4) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 \rightarrow 2 \text{ πραγ. πολ/φοι}$$



$$\rightarrow y(5) = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow 1 \text{ πραγ. πολ/φοι}$$

Τελικά η $y(u) = \{ \underset{\uparrow}{0}, 10, 11, 7, 3, 1 \}$ και απαιτούμεν 12 πολ/φοι
πραγματικών κερδών για τον
υπολογισμό της.

β. Υπολογισμός μέσω της κυκλικής συνέλιξης

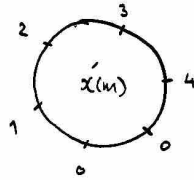
Στην περίπτωση αυτή οι δύο ακολουθίες πρέπει να ελαττωθούν σε μήκος
ώστε να φτάνουν τα 6 στοιχεία, άρα είναι και το μήκος του αποτελέσματος

της γραμμικής συνέλιξης, δηλ. $N_1 + N_2 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$

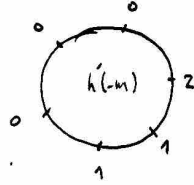
Η επέκταση γίνεται προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος καθενιάς.

Οι νέες ακολουθίες στις οποίες θα κάνουμε κυκλική συνέλιξη είναι:

$$x'(u) = \{ 4, 3, 2, 1, 0, 0 \} \quad h'(u) = \{ 2, 1, 1, 0, 0, 0 \}$$

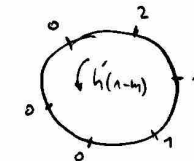


$$y(n) = x'(n) \circledast h'(n) = \sum_{m=0}^5 x'(m) \cdot h'(n-m)$$



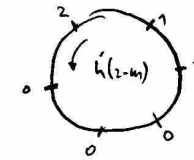
$$y(0) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 8$$

→ 6 πραγματ. αριθ/φοι



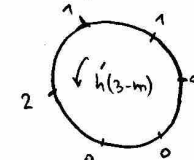
$$y(1) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 10$$

→ -||-



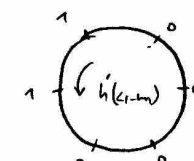
$$y(2) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 11$$

→ -||-



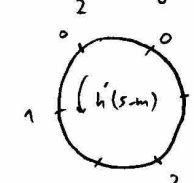
$$y(3) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 7$$

→ -||-



$$y(4) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 3$$

→ -||-



$$y(5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$$

→ -||-

Για τον υπολογισμό κάθε διττήτου εφόδου απαιτούνται 6 πολλαπλασιασμοί πραγματικών αριθμών, συνεπώς συνολικά 36 πραγματικοί πολλαπλασιασμοί.

γ. Υπολογισμός μέσω radix-2 FFT

Για τον υπολογισμό μέσω του DFT D_N χρειάζεται να υπολογίσουμε τον DFT κάθε αμειωθίας, να πολλαπλασιάσουμε τα αποτελέσματα συγγραμμο-συγγραμμο και τέλος να υπολογίσουμε τον αντίστροφο DFT (IDFT) του αποτελέσματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Τέλος, μέσω του θ-σφρίων αντίστροφου FFT, υπολογίζουμε την
ακολουθία εγείδων $y(n)$. Για τον υπολογισμό χρειάζεσθων 2 τυχόντικοι ποσ/φοί.

$$y(n) = \{8, 10, 11, 7, 3, 1, 0, 0\}$$

Συνολικά, το πλῆθος των τυχόντικών ποσ/φων είναι $2+2+8+2=14$.

Επειδή κάθε τυχόντικός ποσ/φός απαιτεί 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς
(και 2 προσθέσεις), το συνολικό πλῆθος των πραγματικών ποσ/φων
θα είναι $14 \cdot 4 = 56$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχθεί ότι ο απευθείας υπολογισμός ενός N -συντελεστών DFT απαιτεί $4N^2$ πραγματικούς ποσ/φοίς και $(4N-2)N$ πραγματικές προσθέςεις.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον DFT: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad k=0,1,2,\dots,N-1$

Ο υπολογισμός των N συντελεστών $X(k)$ απαιτεί N^2 φυσικούς ποσ/φοίς και $N(N-1)$ φυσικές προσθέςεις.

Όπως κάθε φυσικός ποσ/φοίς απαιτεί 4 πραγμ. ποσ/φοίς και 2 πραγματικές προσθέςεις, ενώ κάθε φυσική πρόσθεση απαιτεί 2 πραγματικές προσθέςεις. Άρα έχουμε:

$$O_M = 4 \cdot N^2$$

$$O_A = \underbrace{N(N-1)}_{\text{λόγω προσθέςεων}} \cdot 2 + \underbrace{N^2}_{\text{λόγω ποσ/φοίων}} \cdot 2 = 2N^2 - 2N + 2N^2 = 4N^2 - 2N = (4N-2)N$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί το πλήθος των πραγματικών ποσ/φοίων και προσθέςεων για την περίπτωση του DIT ή DIF FFT.

ΛΥΣΗ Έστω ότι το σήμα αποτελείται από N δείγματα.

Αναφερόμενοι στην περίπτωση των radix-2 FFT, παρατηρούμε ότι έχουμε $\log_2 N$ στάδια και $\frac{N}{2}$ πεταλούδες ανά στάδιο. Σε κάθε πεταλούδα έχουμε 1 φυσικό ποσ/φοίς και 2 φυσικούς προσθέςεις. Κάθε φυσικός ποσ/φοίς απαιτεί 4 πραγματικούς ποσ/φοίς και 2 πραγματικές προσθέςεις, ενώ κάθε φυσική πρόσθεση απαιτεί 2 πραγμ. προσθέςεις. Επομένως έχουμε:

$$O_M = \frac{N}{2} \log_2 N \text{ φυσ. ποσ/φοίς} \rightarrow O_M = \left(\frac{N}{2} \log_2 N\right) \cdot 4 \text{ πραγμ. ποσ/φοίς} \rightarrow O_M = 2N \log_2 N \text{ πραγματικοί ποσ/φοίς}$$

$$O_A = \underbrace{N \log_2 N}_{\text{λόγω προσθέςεων σε κάθε πεταλούδα}} + \underbrace{\frac{N}{2} \log_2 N}_{\text{λόγω ποσ/φοίων σε κάθε πεταλούδα}} \text{ φυσ. προσθέςεις} \rightarrow O_A = 2 \cdot (N \log_2 N) + 2 \cdot \left(\frac{N}{2} \log_2 N\right) = 3N \log_2 N \text{ πραγματικές προσθέςεις ανά σήμα}$$

ΘΕΜΑ Β3 [15 μονάδες]

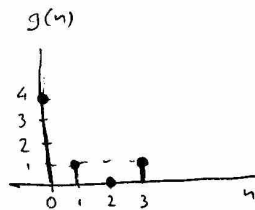
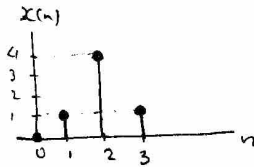
Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) του σήματος $x(n)$, $n=0,1,2,3$ ισούται με $X(k) = \{6, -4, 2, -4\}$. Δίνεται ότι $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, όπου $x_1(n) = \delta(n) + 4\delta(n-2)$ και $x_2(n) = -\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$.

- A. Να σχεδιάσετε το σήμα $x(n)$.
 B. Να σχεδιάσετε το σήμα $g(n) = \{4, 1, 0, 1\}$ και με βάση τις ιδότητες του DFT να υπολογίσετε τον DFT $G(k)$ του σήματος $g(n)$.

Λύση

A. $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = \underbrace{\delta(n) + 4\delta(n-2)}_{x_1(n)} + \underbrace{[-\delta(n)] + \delta(n-1) + \delta(n-3)}_{x_2(n)} = 0 \cdot \delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2) + \delta(n-3)$

ή $x(n) = \{0, 1, 4, 1\}$



B. $g(n) = \{4, 1, 0, 1\}$

Παρατηρούμε ότι η $g(n)$ προκύπτει από την $x(n)$ με καμψίμυ αλιεύματα στο χρόνο κατά 2 δείγματα, δηλαδή $g(n) = x(n-2)$.

Με βάση την ιδιότητα της αλιεύματος, για τον DFT θα έχουμε:

$$G(k) = W_N^{n_0 k} X(k) = W_4^{2k} X(k), \text{ όπου } n_0 = 2 \text{ και } N = 4$$

Γυναιώς:

$$G(0) = W_4^0 X(0) = 1 \cdot X(0) = 6$$

$$G(1) = W_4^{2 \cdot 1} X(1) = e^{-j\frac{2\pi}{4}} X(1) = e^{-j\pi} X(1) = (\cos \pi - j \sin \pi) X(1) = -X(1) = 4$$

$$G(2) = W_4^{2 \cdot 2} X(2) = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2} X(2) = e^{-j2\pi} X(2) = (\cos 2\pi - j \sin 2\pi) X(2) = X(2) = 2$$

$$G(3) = W_4^{2 \cdot 3} X(3) = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 6} X(3) = e^{-j3\pi} X(3) = (\cos 3\pi - j \sin 3\pi) X(3) = -X(3) = 4$$

Άρα ο DFT του σήματος $g(n)$ ισούται με:

$$G(k) = \{6, 4, 2, 4\}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Ο DFT της περιοδικής ακολουθίας $x(n) = \{1, 1, 2, 2\}$ είναι $X(k) = \{6, -1+j, 0, -1-j\}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα και τις ιδιότητες του DFT, να υπολογίσετε τον DFT, $G(k)$, του σήματος $g(n) = \{-2, -1, -1, -2\}$. Να σχεδιάσετε τα μέτρα των $X(k)$ και $G(k)$. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $g(n) = -x(n-1)$.

Με βάση την ιδιότητα της ολιόθεσης στον χρόνο έχουμε ότι:

$$G(k) = -W_N^{kN} X(k) \quad \text{όπου } N=4 \text{ στην προσηφάνη περίπτωση.}$$

Άρα:

$$G(0) = -W_4^0 X(0) = -X(0) = -6$$

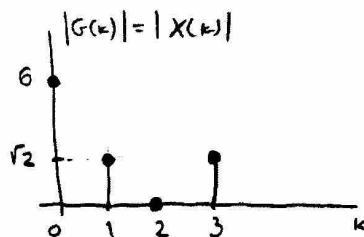
$$G(1) = -W_4^1 X(1) = -(-j)(-1+j) = -1-j \quad (*)$$

$$G(2) = -W_4^2 X(2) = -W_4^2 \cdot 0 = 0$$

$$G(3) = -W_4^3 X(3) = -j(-1-j) = -1+j \quad (**)$$

$$\text{Δηλαδή} \quad G(k) = \{-6, -1-j, 0, -1+j\}$$

Το μέτρο του $G(k)$ είναι: $|G(k)| = \{6, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ το οποίο είναι ίσο με το μέτρο των $X(k)$, αφού το ένα σήμα έχει προκύψει από το άλλο με ολιόθεση, οπότε η ενέργεια διατηρείται.



$$(*) \quad W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j \sin\frac{\pi}{2} = 0 - j \cdot 1 = -j$$

$$(**) \quad W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3} = \cos\frac{6\pi}{4} - j \sin\frac{6\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 - j(-1) = j$$

ΑΙΚΗΣΗ 2.1 A. Δίνεται το διακριτού χρόνου σήμα $\{x(n)\} = \{3, 2, 1, -1\}$.

Να υπολογίσετε το φάσμα του, $\{X(k)\}$.

B. Να υπολογίσετε το $X(k)$ βασισμένοι στο ότι $G(k) = \{-5, 3+2j, 3, 3-2j\}$, όπου $g(n) =$

Γ. Επαναλάβετε τον υπολογισμό του $X(k)$ μέσω του 4-συνθετών $= \{1, -3, -2, -1\}$ in-place radix-2 DIT (decimation-in-time) FFT.

Χρησιμοποιήστε το διακριτό ποίσι του αλγορίθμου και επισημάνετε πάλι σωστά όλα τα βήματα αποτελεσμάτων.

ΛΥΣΗ A. Ο DFT του σήματος $x(n)$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \langle \text{για } N=4 \rangle = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{nk}, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{n \cdot 0} = \sum_{n=0}^3 x(n) = 3 + 2 + 1 + (-1) = 5$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{n \cdot 1} = x(0) W_4^0 + x(1) W_4^1 + x(2) W_4^2 + x(3) W_4^3 =$$

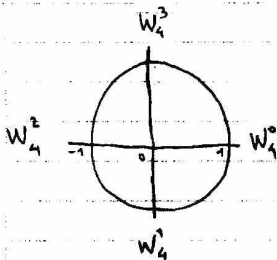
$$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-j) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot j = 2 - j3$$

$$\text{όπου } W_4^0 = e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 0} = 1$$

$$W_4^1 = e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 1} = e^{-j \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j \cdot 1 = -j$$

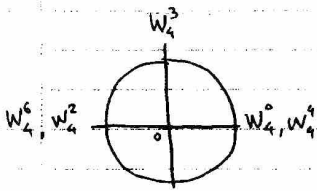
$$W_4^2 = e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 2} = e^{-j\pi} = \cos(\pi) - j \sin(\pi) = -1 - j \cdot 0 = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 3} = e^{-j \frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - j(-1) = j$$



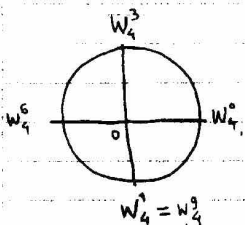
$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{n \cdot 2} = x(0) W_4^0 + x(1) W_4^2 + x(2) W_4^4 + x(3) W_4^6 =$$

$$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) = 3$$



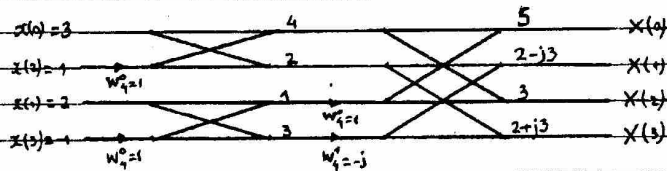
$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{n \cdot 3} = x(0) W_4^0 + x(1) W_4^3 + x(2) W_4^6 + x(3) W_4^9 =$$

$$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot j + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-j) = 2 + j3$$



$$\text{Άρα } \{X(k)\} = \{5, 2-j3, 3, 2+j3\}$$

Γ.



B.

Παρατηρούμε ότι $g(n) = -x(n-1)$ ή $x(n) = -g(n+1)$

Συνεπώς $X(k) = -e^{j\frac{2\pi}{4}k} G(k) = -e^{j\frac{\pi}{2}k} G(k)$ [Βλ. συνημίωτον]

Άρα

$k=0 \rightarrow X(0) = -G(0) = +5$

$k=1 \rightarrow X(1) = -e^{j\frac{\pi}{2}} G(1) = -(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) G(1) = -j G(1) = -j(3+2j) = 2-3j$

$k=2 \rightarrow X(2) = -e^{j\frac{2\pi}{2}} G(2) = -e^{j\pi} G(2) = -(\cos\pi + j\sin\pi) G(2) = -(-1) G(2) = G(2) = 3$

$k=3 \rightarrow X(3) = -e^{j\frac{3\pi}{2}} G(3) = -(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2}) G(3) = j G(3) = 2+3j$

Τελικά

$X(k) = \{5, 2-3j, 3, 2+3j\}$

Συμπεράσματα

Είναι φανερό ότι τα φέτρα των $X(k)$ και $G(k)$ είναι ίσα, δηλαδή

$|X(k)| = |G(k)|$

Η απόδειξη στον χρόνο επιφέρει αλλαγή φάσης στη φάση!

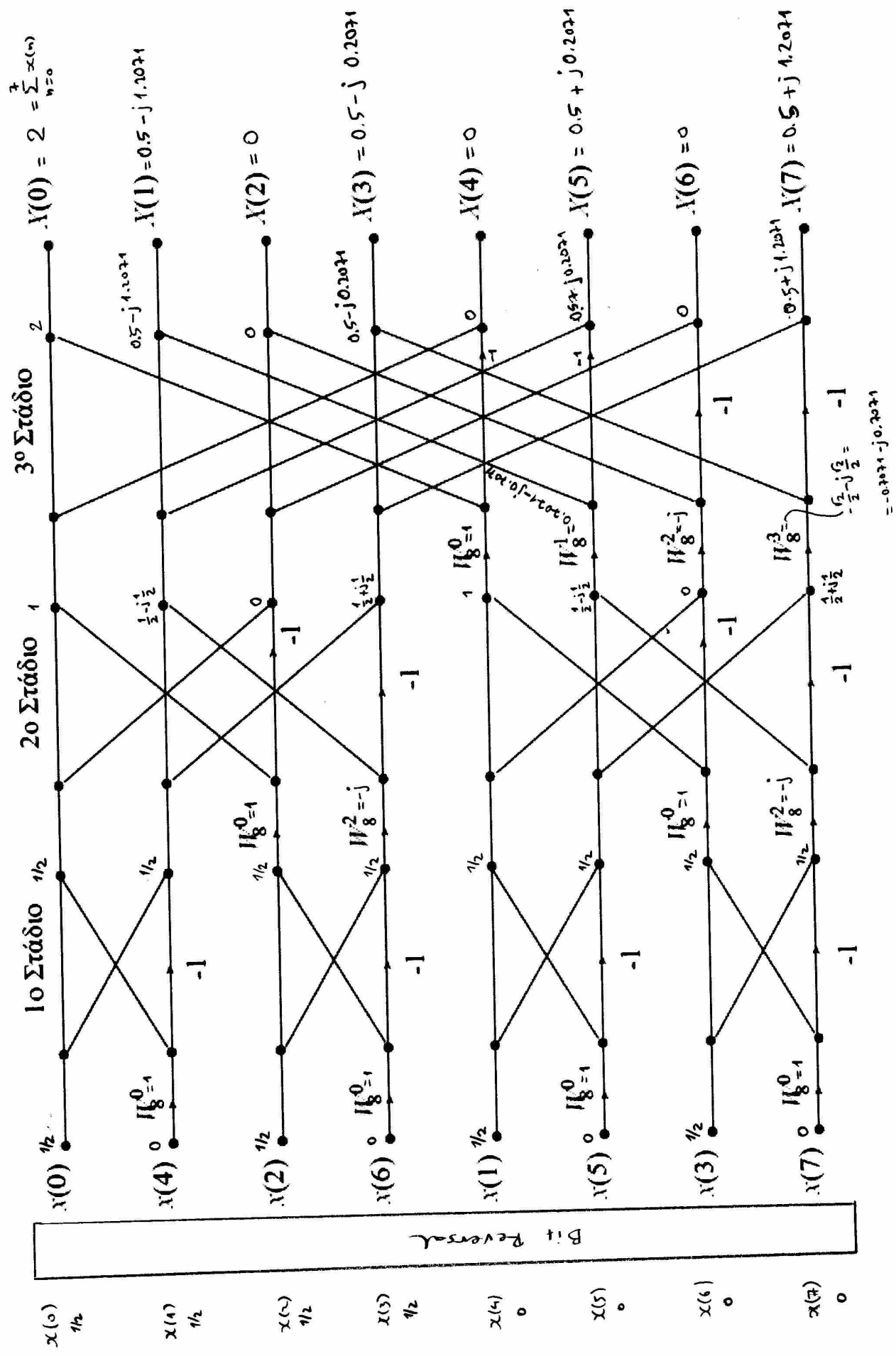
Σύνοδο ψηφιακών πολλαπλασιασμών (κκόφα και $W_N^0 = 1$):

A: $4^2 = 16$ (γενικά N^2)

B: $4 \cdot 1 = 4$ (γενικά N)

Γ: $\frac{4}{2} \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$ (γενικά $\frac{N}{2} \log_2 N$)

Άσκηση: Να υπολογιστεί ο 8-σημίων DFT με ακολουθία $\{x(n)\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\}$ μέσω του in-place radix-2 DIT (Decimation-In-Time) FFT.



$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v \left(\frac{du}{dx} \right) - u \left(\frac{dv}{dx} \right)}{v^2} \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

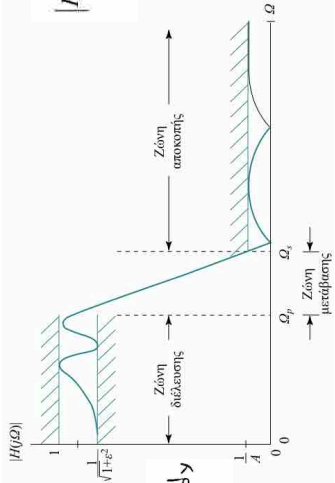
$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$ ή $\delta(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$ ή $\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$
$\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega \geq W \end{cases}$
$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - t /T_1, & t < T_1 \\ 0, & t \geq T_1 \end{cases}$	$T_1 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$
$\left(\frac{W}{\pi}\right) \left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega \backslash 2W, & \omega < 2W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$te^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για μη περιοδικά σήματα		Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Συζυγία στο χρόνο		$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα		$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Ανάκλαση		$x(-t)$	$X(-\omega)$
Γραμμικότητα		$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Πραγματικό μέρος		$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(-t)]$	$\Re\{X(\omega)\} = R(\omega)$
Φανταστικό μέρος		$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(-t)]$	$j\Im\{X(\omega)\} = jI(\omega)$
Χρονική μετατόπιση		$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Ολίσηση συχνότητας		$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Ολοκλήρωση		$\int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega) \delta(\omega)$
Πραγματικό σήμα		$x(t) = x^*(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\}$ $\Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\}$ $ X(\omega) = X(-\omega) $ $\arg X(\omega) = -\arg X(-\omega)$
Συγκερασμός		$x(t) * h(t)$	$X(\omega) H(\omega)$
Διαμόρφωση		$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} [X(\omega) * Y(\omega)]$
Διαμόρφωση στο χρονικό πεδίο		$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Διαμόρφωση στο πεδίο συχνοτήτων		$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Αλλαγή κλίμακας:		$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Δυσίμωσ αν $x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$		$y(t) = X(t)$	$Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$
Θεώρημα Parseval		$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 (\Omega/\Omega_p)^{2N}\right)^{1/2}} \quad N = \frac{1}{2} \log_{10} \left[\frac{(A^2 - 1)/\varepsilon^2}{\log_{10}(1/k_1)} \right] = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/\varepsilon^2)}$$

$$LP \rightarrow LP \xrightarrow{S} \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} S \xrightarrow{S} \Omega'_p \xrightarrow{S} \Omega_p \quad LP \rightarrow HP \xrightarrow{S} \frac{\Omega_p \Omega'_p}{\Omega_p} S \xrightarrow{S} \Omega'_p \xrightarrow{S} \Omega_p \quad LP \rightarrow BP \xrightarrow{S} \frac{\Omega_p \Omega'_p}{\Omega_p} S \xrightarrow{S} \Omega'_p \xrightarrow{S} \Omega_p$$



$$F(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\mathcal{L}_x x + \mathcal{L}_y y)} dx dy$$

$$F_u(\mathcal{L}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\mathcal{L}t) dt$$

$$F\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\} = -j \operatorname{sgn}(\mathcal{L}) \cdot X(\mathcal{L})$$

ΛΕΥΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

$$\Phi_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 \delta(\omega) + w_x^2$$

$$S_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 + 2\pi w_x^2 \delta(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a r^k = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ 2 \cos(x) \cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\ 2 \sin(x) \sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2 \sin(x) \cos(y) &= \sin(x-y) + \sin(x+y) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών συναρτήσεων		
Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
$\delta(n)$	1	για κάθε z ≠ 0
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$\delta(n-m), m > 0$	z^{-m}	$ z \neq 0$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$[\cos(\Omega_0 n)] u(n)$	$\frac{1 - [\cos \Omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \Omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z		
Ιδιότητα	Σήμα	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση	$x(n-n_0), n_0 \geq 0$	$R < z $
Αριστερή ολίσθηση	$x(n+n_0), n_0 \geq 0$	$R < z $
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$P_1 \cap P_2$
Ολίσθηση Συχνότητας	$e^{jn} x(n)$	$ c R < z $
Περιοδικό σήμα	$x(n+N) = x(n)$	$ z > 0$
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\operatorname{Re}\{x(n)\}$ $-\operatorname{Im}\{x(n)\}$	$R < z $
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X^+(z)$	
Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X^+(z)$	

Ιδιότητες του μετασχηματισμού z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μ z	Πεδίο σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$x(n+n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	P
Συνέλιξη	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Ολίσθηση Συχνότητας	$e^{jn} x(n)$	$X\left(\frac{z}{c}\right)$	$ c R^+ < z < c R^-$
Παράγνωση στο Χόρο του z	$n x(n)$	$-\frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < z < R^-$
M z περιοδικών σημείων	$x(n+N) = x(n)$	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$	P
Ιδιότητα της Συζυγίας	$x^*(n)$ $-\operatorname{Re}\{x(n)\}$ $-\operatorname{Im}\{x(n)\}$	$X^*(z^*)$ $\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$ $\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	P
Αθροίσματος	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap z > 1$
Κατοπτρισμός	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R^-} < z < \frac{1}{R^+}$