ΣΕΣ II 16/12/2011 (1)

Νά δούμε γιά γένο δύο(2) ΣΔ $X(t)$ και $Y(t)$ → [ ] →

Μπορεί νά ορίζονται στόν ίδιο χώρο πιθανοτήτων (μπορεί και όχι)

Γιά κάθε μία ΣΔ-βρίσκουμε γιά πάντα

$E[X]$ $R_{XX}(t_1,t_2)$ $R_X(\tau)$ σ_X^2 (t_2-t_1)

και $E[X^2]$ τό ίδιο και γιά τη ΣΔ-$Y(t)$

$E[XY]=E[X]E[Y]$ αν X και Y ~~ασυσχ~~ ανεξάρτητες

$$E[XY]=\iint^{\infty} xy\, \underbrace{f_{XY}(x,y)}\, dx\, dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = E[X]E[Y]$$

Τις ΣΔ ← χρόνος αφού όπως είπαμε και πρίν → $\boxed{\text{στάσιμες ΣΔ}}$

μόνο $\boxed{t_2-t_1=\tau}$

Ορισμός (σελίς 39)

Η απο κοινού συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μεταξύ δύο ΣΔ $X(t)$ και $Y(t)$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

η οποία ~~λέγεται~~ ονομάζεται και ετεροσυσχέτιση

Μην μπερδεύουμαι την Αυτοσυσχέτιση (2)

$R_{XX}(t_1,t_2) \rightarrow$ με την ετεροσυσχέτιση

$\boxed{\text{Προσοχή}}$

Αυτο-συνδιακύμανση για τη μία ΣΔ

↓ την στοχ.

$C_{XX}(t_1,t_2)$ σελίς 13 Αυτομεταβλητότητα

$= E[(X(t_1)-m_X)(X(t_2)-m_X)]$ στις Ευρεία

$= R_X(t_2-t_1) - m_X^2$ (ΣΔ - Στάσιμες)

Τώρα όπως και πριν

$$\boxed{C_{XY}(t_1,t_2) = E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}}$$

$$= E[X(t_1)Y(t_2) - X(t_1)\mu_Y(t_2) - Y(t_2)\mu_X(t_1) + \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)]$$

$$= E[X(t_1)Y(t_2)] - E[X(t_1)\mu_Y(t_2)] + \overset{E\nearrow}{\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)} - E[Y(t_2)\mu_X(t_1)]$$

$$= R_{XY}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) - \cancel{\mu_Y(t_2)\mu_X(t_1)} + \cancel{\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)}$$

$$= R_{XY}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

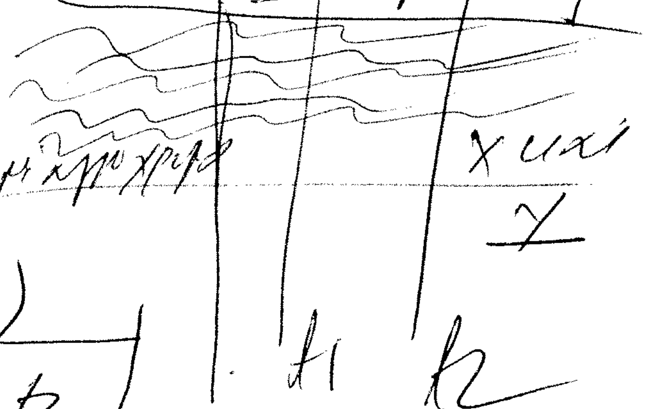
όχι ακόμη

$$R_{XY}(t_1,t_2) = C_{XY}(t_1,t_2) + \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

Παράδειγμα

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

X και Y βέβαια στοχαστικά Ανεξάρτητες → διαδικασίες



$$\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + Y_1 \\ Z_2 &= X_2 + Y_2 \end{aligned}}$$

Βρείτε την $R_Z(t_1,t_2)$, $C_Z(t_1,t_2)$ και $\rho_Z(t_1,t_2)$

$$R_Z(t_1,t_2) = E[Z_1Z_2] = E[(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)]$$

$$= E[X_1X_2 + X_1Y_2 + Y_1X_2 + Y_1Y_2]$$

$$= E[X_1X_2] + E[X_1Y_2] + E[Y_1X_2] + E[Y_1Y_2]$$

$$= R_X(t_1,t_2) + R_{XY}(t_1,t_2) + R_{YX}(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2)$$

$$\boxed{R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2) + \underline{R_{XY}(t_1,t_2)} + \underline{R_{YX}(t_1,t_2)}}$$

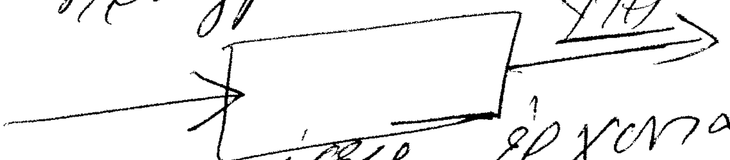
Γενικό συμπέρασμα

Η $\boxed{\text{αυτοσυσχέτιση}}$ ~~δύο ΣΔ~~ αθροίσματος δύο ΣΔ X και Y ισούται με το άθροισμα των Αυτοσυσχετίσεων / R_X και R_Y

∴ Βρείτε το άθροισμα των
Ετεροσυσχετίσεων $R_{XY}(t_1,t_2)$ και
$R_{YX}(t_1,t_2)$
Αυτό ισχύει για όσα αθροίσματα
ΣΔ X_1, X_2, X_3, X_4

$$\boxed{Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$$

Τα πράγματα περιπλέκονται



Οι απλοποιήσεις έρχονται όταν έχουμε
στατιστικές Ανεξάρτητες ΣΔ → Στάσιμες
και με μέση τιμή μηδέν τις X και Y
δύο παραδείγματα

$$R_Z(t_1,t_2) = R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

γιατί $R_{XY}(\tau) = 0$ και $R_{YX}(\tau) = 0$
λόγω του $\boxed{E[X(t_1)] = E[Y(t_2)] = 0}$

Αν ~~Να~~ δημιουργούμε | A ω σταθερά

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta) \qquad \theta = [-\pi, \pi]$$

$$\boxed{E[X(t)] = 0 \quad R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau}$$

εάν το ~~$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$~~
~~αλλά το A τμ. και $\theta = [-\pi, \pi]$~~

∴ $Y(t)$ είναι μια ΣΔ με

$E[Y(t)]=0$ και $R_Y(\tau)=B^2 e^{-\alpha|\tau|}$

τότε η $E[Z]=0$

$$\boxed{R_Z(\tau)=R_X(\tau)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega\tau+B^2 e^{-\alpha|\tau|}}$$

Να ισχύουν τα εξής για ΣΔ

Μία ΣΔ / Στάσιμη ↗ $E[X]$, $R_X(\tau)$

α) Στάσιμη Αυστηρά (ΑΣ) - Ευρεία (ΕΣ)

b) Εργοδική

Όταν δειγματικές και χρονικές μέσες τιμές συμπίπτουν ΣΔ → ονομάζεται $\boxed{\text{εργοδική}}$

Οι εργοδικές → όρος

a) ως προς την μέση τιμή σελ 18

b) ως προς την $R_X(\tau)$ σελ 19

α) $\lim\limits_{T\to\infty} m_X(T)=m_X$ $\quad \lim\limits_{T\to\infty} Var[m_X(T)]=0$

b) $\lim\limits_{T\to\infty} R_X(\tau,T)=R_X(\tau)$

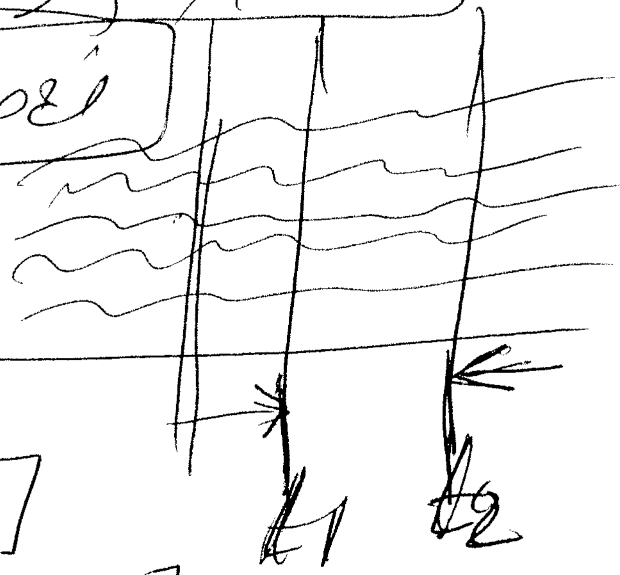
$\lim\limits_{T\to\infty} Var[R_X(\tau,T)]=0$

Συνήθως οι ΣΔ είναι ταυτόχρονα εργοδικές ως προς τη μέση τιμή όχι την αυτοσυσχέτιση

εργοδικότητα → $\boxed{\text{στασιμότητα}}$

$\boxed{\text{Δύο ΣΔ } X(t), Y(t)}$

$\boxed{\text{τεράστιες διαφορές}}$



Στατιστικές

Ανεξάρτητες

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$
$$=E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

και ισχύει

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1)$$

$\boxed{\text{Στασιμότητα}}$ → όταν

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(\tau) \quad \boxed{\tau=t_1-t_2}$$

όχι → εργοδικότητα

Εάν → στατιστικά → $\boxed{\text{τιμές}}$ τις ίδιες

Το αποτέλεσμα $\boxed{Z = X + Y}$

για zero mean και έχουμε

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

ισχύει και όταν

οι ~~ΣΔ~~ X και Y είναι

Ασυσχέτιστες χωρίς

σελίς 47

Να θυμίσουμε

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{E[XY] - m_X m_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

(E[X] E[Y])

εάν μηδέν Μέση τιμή

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{E[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

συντελεστής συσχέτισης

Να ορίσουμε

Ετεροφασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

· Γιατί όμως όχι αυτή
η κλασική και η θεωρητική
μαθηματική προσέγγιση;

Τι πάει να πει ότι δεν έχουν
συσχέτιση ή είναι ασυσχέτιστες
οι ΕΔ $\boxed{X(t) \text{ και } Y(t)}$

Εάν $\boxed{C_{XY}(t_1, t_2) = 0}$ $\quad C_{XY}(\,) = 0$

$Y(t-\tau)$

$X(t) \rightarrow X(t-\tau)$

Είναι σαν να έχει χάσει τη
μνήμη του να μην θυμάται
την τιμή $\boxed{t-\tau}$ ← όχι και τόσο
επιθυμητό

Να δούμε τώρα-πρακτικά τι
κάνουμε με τις ΕΔ

$$X = \begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X_n(t_n) \end{bmatrix}$$

t_1

Ας πάρουμε μια sample function t_1 t_3

καθώς $X(t_i)$ είναι τμ

ορίζουμε αυτοσυσχέτιση πίνακα $N \times N$

$$R_X = E[X X^T] = E\begin{bmatrix} X(t_1)X(t_1) & X(t_1)X(t_2) & \cdots & X(t_1)X(t_N) \\ X(t_2)X(t_1) & X(t_1)X(t_2) & \cdots & X(t_2)X(t_N) \\ & & & \\ X(t_N)X(t_1) & X(t_N)X(t_2) & & X(t_N)X(t_N) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_1) & X(t_2) & X(t_N) \end{bmatrix}$$

$$R_X = \begin{bmatrix} R_X(t_1,t_1) & R_X(t_1,t_2) & \cdots & R_X(t_1,t_N) \\ R_X(t_2,t_1) & R_X(t_2,t_2) & \cdots & R_X(t_2,t_N) \\ R_X(t_N,t_1) & \cdots & & R_X(t_N,t_N) \end{bmatrix}$$

όπου $R_X(t_1,t_1) = E[X(t_1)X(t_2)]$ $\boxed{\Delta t = t+\tau}$

$$R_X(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(\Delta t) & \cdots & R_X((N-1)\Delta t) \\ R_X(\Delta t) & R_X(0) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & R_X(0) \end{bmatrix}$$

και για ΕΣ → εργοδικές είναι πάντα συμμετρικές

Την κινδιακύμανση $C_x(t_1,t_2)$

$$C = E\{(\underline{X}-\underline{\mu}_x)(X^T-\mu_x^T)\}$$

$$\underline{\mu}_x = \begin{bmatrix} \mu_x(t_1) \\ \mu_x(t_2) \\ \vdots \\ \mu_x(t_n) \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\boxed{C_x = \underline{R}_x - \mu_x \mu_x^T}$$

$\boxed{\text{και άρα}} \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}}$$

να θυμίσουμε

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,\underline{X}(t_0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\,u(\tau)\,d\tau$$