ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΙΙ 15/12/11 (1)

Να δημιουργούμε <u>Εργοδικές ΣΔ</u>

— Ορισμός —

Αν οι στατιστικές και χρονικές μέσες τιμές ταυτίζονται η ΣΔ ονομάζεται Εργοδική

Εργοδικότητα ⇒ Στασιμότητα <u>σελ 20</u>

Σειρές ΣΔ — $\boxed{\text{Μιγαδικές ΣΔ}}$

Δύο ΣΔ → μας ενδιαφέρει

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$h(t)$ η κρουστική απόκριση του γραμμικού συστήματος

$$\boxed{\begin{array}{l} h(t)=0 \quad t<0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty \end{array}}$$

για να προχωρήσουμε

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

ή

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Εάν Χ(t) είναι μία-sample ②
function — μία x(t) για t_1, t_2 -- τcμ

$$\boxed{Y(t)=\int_0^\infty X(t-\tau)h(\tau)d\tau}$$

$$E\{Y(t)\} = E\left\{\int_0^\infty X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right\}$$

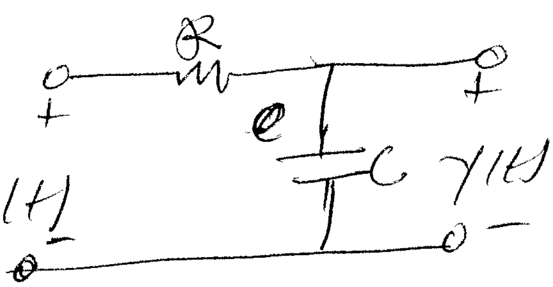
Να θυμηθούμε ότι Ε και ∫ είναι linear operators άρα μπορούν να αλλάξουν

$$E\{Y\}=\int_0^\infty E[X(t-\tau)h(\tau)d\tau]$$
$$=\int_0^\infty E[X(t-\tau)]E[h(\tau)]d\tau$$

Εάν τι Χ(t) είναι στάσιμη συνεχεία έπειτα → τότε

$$\boxed{E\{Y\} = E[X]\int_0^\infty h(\tau)d\tau}$$

Ένα παράδειγμα



$$\boxed{H(s)=\frac{b}{s+b} \quad \text{όπου } b=\frac{1}{RC}}$$

και άρα $h(t)=be^{-bt}$ $t\geq 0$
$= 0$ $t<0$

Άρα
$$E\{Y\}=E\{X\}\int_0^\infty b\, e^{-b\tau}d\tau = E\{X\}\cancel{b}\,\frac{e^{-b\tau}}{b}\Big|_0^\infty$$

③

$\boxed{E[Y] = E[X]}$ $\boxed{\sigma^2_X}$

$$E[Y^2] = E\left[\int_0^\infty X(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_0^\infty X(t-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty X(t-\tau_1)\,X(t-\tau_2)\,h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_2\right]$$

$$= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty E[X(t-\tau_1)\,X(t-\tau_2)]\,h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_2$$

Τώρα γιά ~~ΣΣΑ~~ εφρία

$$E[X(t-\tau_1)\,X(t-\tau_2)] = R_X(\tau_2-\tau_1)$$

$$R_X(\cancel{t}-\tau_1-\cancel{t}+\tau_2)$$

καί τώρα

$$E[Y^2] = \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty R_X(\tau_2-\tau_1)\,h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_2$$

Μία όχι καί δύσκολη νά υπολογισθεί εφ' όσον γνωρίζαμε τήν κρουστική $h(t)$ απόκριση $h(t)$ του συστήματος καί ή Αυτοσυσχέτιση τού σήματος $X(t)$ πού είναι ή είσοδος

Παραδείγματα τήν επόμενη εβδομάδα

Είναι ανάγκη να χειριζόμαστε και στη συχνότητα ω

Από Laplace

$$\boxed{Y(s) = X(s)H(s)}$$

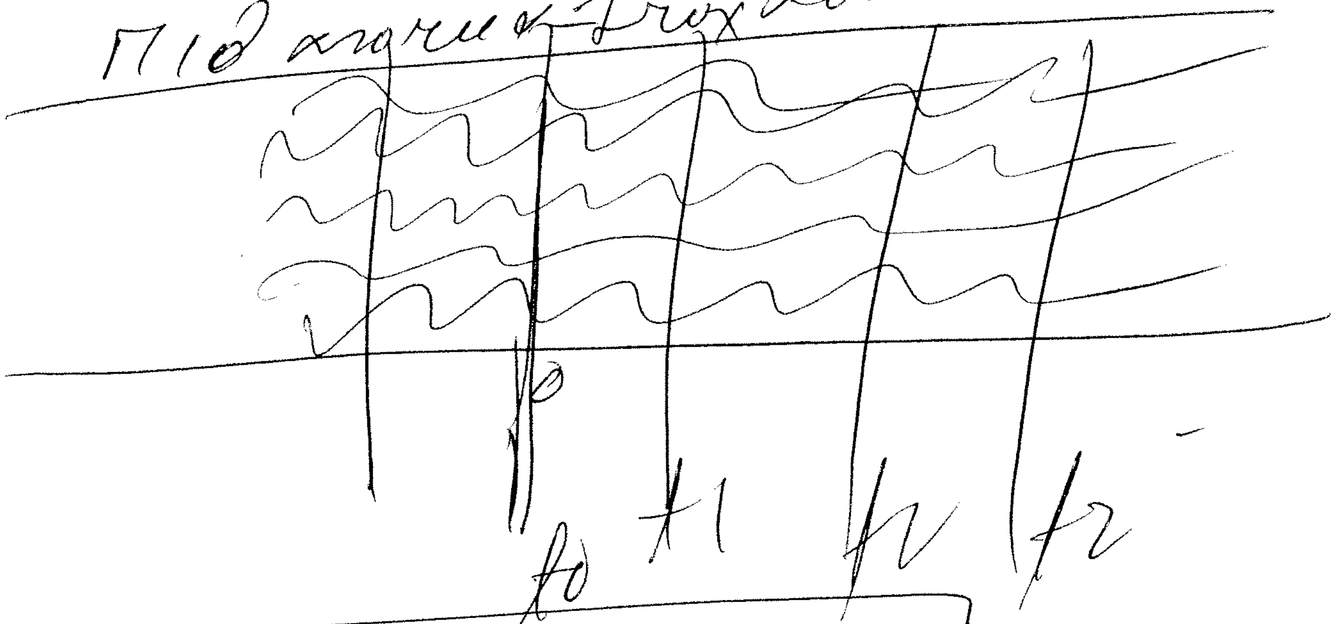
Fourier

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)}$$

Ισχύουν και στα ΣΔ και απλά και ΟΧΙ εξαρτάται από τη σχέση

Στατιστικά Δεδομένα ή Στοχαστικά Δ

Πιθανοτικά Στοχαστικά



$\boxed{\text{Το φάσμα Ισχύος}}$

σχέση με τις FT και την Αυτοσυσχέτιση $R_x(\tau)$

Να θυμηθούμε ότι το φάσμα ισχύος οποιουδήποτε σήματος (X(t)) μας πληροφορεί πόσο σήμα έχουμε σε μία δεδομένη συχνότητα ω και σχετίζεται άμεσα με ΜF (επαναληπτικό)

Μας ενδιαφέρουν αποκλειστικά ΣΔ — πού είναι στάσιμες και ειδικά στην ευρεία έννοια τους (ΕΣ)

$E[X(t)]$ = σταθερά $R_X(\tau)$ $\boxed{\tau = t_2 - t_1}$

Για μη στάσιμες ΣΔ — η έννοια του φάσματος έχει περιορισμένο ενδιαφέρον αν και μερικές ~~φορές~~ συχνότητα είναι χρήσιμο

$\boxed{\text{Ορισμός}}$

Το φάσμα ισχύος (power spectral Density) ή φασματική πυκνότητα μιας ΕΣ διαδικασίας X(t) είναι ο ΜΦ της αυτοσυσχέτισης της ΣΔ → $R_X(\tau)$

$S(\omega)$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

5

Αφού $\boxed{R(-\tau)=R^{*}(\tau)}$ τότε η $S_X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση ως πρός τό $\underline{\omega}$

Να θυμηθούμε αντίστροφο ΜΦ

$$\boxed{R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega}$$

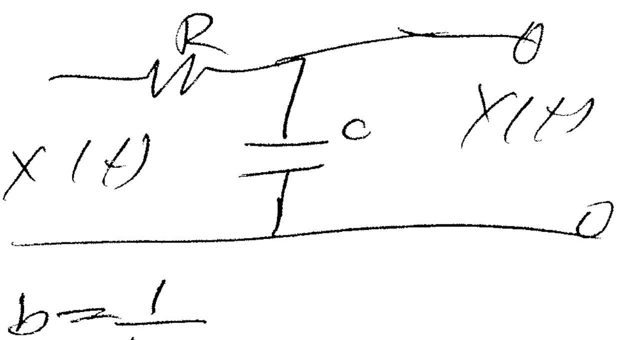
Εάν η $X(t)$ είναι πραγματική διαδικασία τότε η $R(\tau)$ είναι πραγματική και άρτια και η $S_X(\omega)$ είναι πραγματική άρα και άρτια.

Παράδειγμα $\underline{\text{για } \cos\omega\tau}$ ισχύει

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_X(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega$$

Άλλο παράδειγμα



$h(t)= b e^{-bt}\quad t\geq 0$

$\quad\;\; = 0 \quad t<0$

$b=\frac{1}{RC}$

$$E[Y^2]=\int_0^\infty d\tau_1\int_0^\infty R_X(\tau_2-\tau_1)h(\tau_1)\,h(\tau_2)\,d\tau_2$$

εάν η είσοδος είναι άσπρος θόρυβος

τότε $\boxed{R_X(\tau_2-\tau_1)=R_X(\tau)=S_0\,\delta(\tau)}$

όπου η S_0 είναι φάσμα-ισχύος του άσπρου θορύβου μια σταθερά

τότε

$$E[Y^2]=\int_0^\infty d\tau_1\int_0^\infty \underbrace{s_0\,\delta(\tau_2-\tau_1)\,h(\tau_1)\,h(\tau_2)\,d\tau_2}$$

$$E[Y^2]=\int_0^\infty d\tau_1\int_0^\infty s_0\,\delta(\tau)\,h^2(\tau_2)\,d\tau_2$$

$$=S_0\int_0^\infty h^2(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{E[Y^2]=S_0\int_0^\infty h^2(\tau)\,d\tau}$$

$\boxed{h(\tau)}$ ανάλογα

στο παράδειγμα

$$E[Y^2]=S_0\int_0^\infty b^2e^{-2b\tau}\,d\tau$$

$$=S_0\,b^{\cancel{2}}\,\frac{e^{-2b\tau}}{-2\cancel{b}}\Bigg|_0^\infty=\frac{bS_0}{2}$$

όπου $b=\dfrac{1}{RC}$ και σχετίζεται με το bandwidth B του φίλτρου ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα (8)

γιά $B = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{b}{2\pi}$ Hz $\quad b = \frac{1}{RC}$

καί άρα

$$E[Y^2] = \frac{bS_0}{2} = \frac{1\,B\,2\pi S_0}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{E[Y^2] = \pi B S_0}$$

πού λέει ότι ή mean-square τιμή τής εξόδου ενός LPF εξαρτάται γραμμικά μέ τό bandwidth τού συστήματος. Πολύ βασικό στή θεωρία τών ΤΠ

Άσκηση

$$h(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$
$$= 0 \quad t < 0$$

καί λευκός θόρυβος $S_0 = 12\,V^2/Hz$

βρείτε τή μέση τιμή καί τήν mean-square ~~τιμή~~ τής εξόδου (σέ φυσικούς όρους α, b, —)

Νά επανέλθω σε δύο ΕΔ

$X(t)$, $Y(t)$ | E, R

$$\boxed{E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x,t)\, dx}$$

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x(t_1))\, g(x(t_2))\, f_X(t_1, t_2)\, \underline{dx_1 dx_2}$$

Συμπεράσματα

εάν η $X(t)$ είναι στάσιμη με ΓΧΑ τότε και η $Y(t)$ είναι στάσιμη ως προς τη μέση τιμή $R_Y(\tau)$ ή και Ν τάξης

εάν η $X(t)$ είναι στάσιμη στην ευρεία έννοια τότε η $Y(t)$ μπορεί να μην είναι στάσιμη. και όποια δήποτε έννοια

Ορίζουμε ~~Αυτοσυσχέτιση~~ $X \to Y$
cross correlation

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1, t_2-\tau)\,h(\tau)\,d\tau}$$

θα λύ

$$R_{YY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\qquad)\,h(\tau)\,d\tau$$

$\boxed{\text{Βιάσιμες ΣΔ}}$

$\boxed{\text{Cross-correlation-}}$