

Κατανομές Τυχαίων Μεταβλητών Προβλήματα και Ασκήσεις

1. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πιθανότητας

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1/16	4/16	6/16	c	1/16

Να βρεθούν α) η τιμή της σταθεράς c β) η πιθανότητα $P(0 \leq X < 4)$ γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \geq 3/1 < X < 4)$ δ) η $E(X)$ και ε) η $V(X)$.

2. Ο αριθμός των μηχανημάτων που πουλάει μια έκθεση γεωργικών μηχανημάτων σε μια εβδομάδα είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ c(10 - x), & x = 6, 7, 8, 9 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c β) Ποια είναι η πιθανότητα να πουληθούν σε μια εβδομάδα i) ακριβώς 7 μηχανήματα ii) λιγότερα από 4 μηχανήματα iii) περισσότερα από 4 μηχανήματα iv) άρτιος αριθμός μηχανημάτων v) περισσότερα από 5 μηχανήματα γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3 γ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός μηχανημάτων που πουλάει η έκθεση σε μια εβδομάδα.

3. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε οι επόμενοι τύποι να ορίζουν συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής στο αντίστοιχο σύνολο τιμών.

α) $f(x) = \frac{c}{x(x+1)}$, $R_x = \{1, 2, 3, \dots\}$ β) $f(x) = c \cdot 2^{-x}$, $R_x = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

4. Στη γενική συνέλευση ενός αγροτικού συνεταιρισμού αποφασίζεται να συγκροτηθεί με κλήρωση μια τριμελής επιτροπή η οποία θα συναντήσει τον αρμόδιο υπουργό για να συζητήσει μαζί του θέματα της αγροτικής πολιτικής που εφαρμόζει η κυβέρνηση. Αν ο συνεταιρισμός έχει 200 μέλη, εκ των οποίων τα 110 διαφωνούν με την αγροτική πολιτική που εφαρμόζει η κυβέρνηση, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X που εκφράζει τον αριθμό των μελών της τριμελούς επιτροπής που διαφωνούν με την κυβερνητική αγροτική πολιτική. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των μελών της επιτροπής που διαφωνούν με την αγροτική κυβερνητική πολιτική;
5. Κάποιος χρησιμοποιεί το εξής μοντέλο πρόβλεψης της τιμής δύο μετοχών A, B σε διάστημα ενός έτους: Η τιμή της μετοχής A θα μεταβληθεί σε ποσοστό 10%, 5%, -10% ανάλογα με το αν η οικονομία το επόμενο έτος βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας, ύφεσης. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τη μετοχή B είναι 15%, 5%, -15%. Για την κατάσταση της οικονομίας έχει προβλέψει ότι υπάρχει πιθανότητα 0.20, 0.60, 0.20 να βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας, ύφεσης, αντίστοιχα. Σε ποια μετοχή θα τον συμβουλευάτε να επενδύσει.
6. Κάθε άτομο ενός πληθυσμού μικροβίων μπορεί να παράγει (πριν νεκρωθεί το ίδιο) 0, 1 ή 2 νέα άτομα με πιθανότητες 1/5, 3/5, 1/5 αντίστοιχα. Αρχίζοντας με ένα άτομο (μηδενική γενιά) συμβολίζουμε με X_i τον αριθμό μικροβίων της i γενιάς του πληθυσμού. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας α) της τυχαίας μεταβλητής X_1 β) της τυχαίας μεταβλητής X_2 .
7. Έχει διαπιστωθεί ότι το 30% των ζώων που κατά τον εμβολιασμό εκτίθενται σε μολυσμένη βελόνα από ηπατίτιδα Β, αναπτύσσει ηπατίτιδα Β. Επιλέγουμε τυχαία 5 ζώα από τον πληθυσμό των ζώων που έχουν εμβολιασθεί με μολυσμένη βελόνα. Ποια είναι πιθανότητα, από τα 5 ζώα α) να βρεθούν ακριβώς 2 άρρωστα από

- ηπατίτιδα Β β) να βρεθεί το πολύ 1 άρρωστο από ηπατίτιδα Β γ) να βρεθούν τουλάχιστον 3 άρρωστα από ηπατίτιδα Β. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός άρρωστων από ηπατίτιδα Β ζώνων.
8. Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι το 5% των ατόμων που κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν δεν εμφανίζονται. Αν σε μια πτήση που γίνεται με ένα μικρό αεροσκάφος χωρητικότητας 50 ατόμων η εταιρεία κάνει κράτηση για 52 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμο κάθισμα για καθένα άτομο που εμφανίζεται για να ταξιδέψει (από τα 52).
 9. Το δίκτυο ομβρίων μιας αγροτικής περιοχής δεν μπορεί να ανταποκριθεί σε δυσμενείς καιρικές συνθήκες που εμφανίζονται στην περιοχή κατά μέσο όρο, μια φορά στα 50 χρόνια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα, σε μια χρονική περίοδο 10 ετών να πλημμυρίσει η περιοχή α) τουλάχιστον μια χρονιά β) τουλάχιστον δύο χρονιές, γνωρίζοντας ότι είχε πλημμυρίσει τουλάχιστον μια χρονιά.
 10. Ένα άτομο ισχυρίζεται ότι έχει την ικανότητα να προβλέπει το μέλλον. Για να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του, ρίχνεται ένα νόμισμα 8 φορές και του ζητείται να προβλέψει τα αποτελέσματα των ρίψεων. Αν προβλέψει σωστά τα 6 αποτελέσματα, νομίζετε ότι έχει βάση ο ισχυρισμός του;
 11. **Αξιοπιστία:** Ένα σύστημα αποτελείται από 10 εξαρτήματα που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η αξιοπιστία κάθε εξαρτήματος είναι 0.8 και το σύστημα λειτουργεί μόνο αν τουλάχιστον 8 εξαρτήματά του λειτουργούν. α) Να βρεθεί η αξιοπιστία R του συστήματος β) Να βρεθεί η πιθανότητα να υποστούν βλάβη τουλάχιστον δύο εξαρτήματα δεδομένου ότι έχει υποστεί βλάβη τουλάχιστον ένα.
 12. **Αξιοπιστία:** Ένα σύστημα αποτελείται από v_1 εξαρτήματα τύπου I και v_2 εξαρτήματα τύπου II που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η αξιοπιστία κάθε εξαρτήματος τύπου I είναι R_1 ενώ η αξιοπιστία κάθε εξαρτήματος τύπου II είναι R_2 . Το σύστημα λειτουργεί μόνο αν λειτουργούν συγχρόνως τουλάχιστον 2 εξαρτήματα τύπου I και τουλάχιστον 2 εξαρτήματα τύπου II. Να βρεθεί η αξιοπιστία R του συστήματος.
 13. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X στα ακόλουθα προβλήματα: α) Ο αριθμός X των ελαττωματικών προϊόντων που περιέχονται σε ένα δείγμα 20 προϊόντων που έχουν επιλεγεί χωρίς επανάθεση από ένα σωρό 100 προϊόντων στον οποίο υπάρχουν 16 ελαττωματικά προϊόντα. β) Ο αριθμός X των ελαττωματικών προϊόντων του ερωτήματος (α) στην περίπτωση που η επιλογή των 20 προϊόντων του δείγματος γίνει με επανάθεση.
 14. Έχει παρατηρηθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί σοβαρό ατύχημα με γεωργικό μηχάνημα σε μια μεγάλη αγροτική περιοχή είναι 0.0001. Αν κατά τη διάρκεια μιας εργάσιμης ημέρας στην περιοχή αυτή χρησιμοποιούνται 1000 γεωργικά μηχανήματα, ποια είναι η πιθανότητα να γίνουν τουλάχιστον δύο ατυχήματα; (Για την επιλογή της κατανομής που θα χρησιμοποιήσετε παρατηρείστε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων είναι πολύ μεγάλος και η πιθανότητα «επιτυχίας» πολύ μικρή).
 15. Έχει παρατηρηθεί ότι στις αεροπορικές πτήσεις που εξυπηρετούνται από μεγάλα αεροπλάνα, από τα άτομα που έχουν κάνει κράτηση θέσης δεν εμφανίζονται κατά μέσο όρο 10 άτομα. α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα άτομο που βρίσκεται στην τρίτη θέση της λίστας αναμονής για μια τέτοια πτήση να μπορέσει να ταξιδέψει β) Αν τρία άτομα που είχαν κάνει κράτηση σε μια συγκεκριμένη πτήση έχουν ήδη ακυρώσει την κράτηση τους, ποια είναι η πιθανότητα το έκτο άτομο της λίστας αναμονής να μην μπορέσει να ταξιδέψει.

16. Σε μια γραμμή παραγωγής τυποποιημένων τροφίμων, τα παραγόμενα τεμάχια (μικρά σε όγκο) συσκευάζονται σε μεγάλα κιβώτια και αποστέλλονται στους προμηθευτές. Τα ελαττωματικά προϊόντα σε κάθε κιβώτιο είναι κατά μέσο όρο 0.5. α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα κιβώτιο να περιέχει 2 τουλάχιστον ελαττωματικά προϊόντα β) Ας υποθέσουμε ότι γίνεται έλεγχος όλων των τεμαχίων σε κάθε κιβώτιο και όταν εντοπίζεται κιβώτιο με τουλάχιστον δύο ελαττωματικά προϊόντα πραγματοποιείται ρύθμιση των μηχανημάτων κατασκευής. Ποια είναι η πιθανότητα μέχρι τον έλεγχο των 10 πρώτων κιβωτίων να χρειασθεί ρύθμιση των μηχανημάτων ακριβώς 5 φορές.

17. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -c \leq x \leq c \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθούν η σταθερά c , η πιθανότητα $P(0 \leq X < 1)$, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \geq 0.1 | -0.1 < X < 0.2)$, η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X .

18. Ο χρόνος ζωής ενός εξαρτήματος εργαστηριακού οργάνου σε εκατοντάδες ώρες περιγράφεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθεί: α) Η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X β) Η πιθανότητα να λειτουργήσει το εξάρτημα περισσότερο από 200 ώρες γ) Η πιθανότητα να λειτουργήσει το εξάρτημα από 200 έως 250 ώρες και δ) Αν είναι γνωστό ότι ένα εξάρτημα έχει λειτουργήσει 200 ώρες, να βρεθεί η πιθανότητα να πάψει να λειτουργεί εντός των επόμενων 50 ωρών.

19. Η μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου (σε kgal) μιας μονάδας θερμοκηπίων κατά τους χειμερινούς μήνες, είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθεί: α) Η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X β) Η πιθανότητα να εξαντληθεί το πετρέλαιο κατά την διάρκεια κάποιου μήνα, όταν για τον μήνα αυτό έγινε προμήθεια 0.9 kgal και γ) Η ελάχιστη ποσότητα πετρελαίου που πρέπει να έχει στην διάθεση της η μονάδα στην αρχή κάθε μήνα ώστε η πιθανότητα να εξαντληθεί το πετρέλαιο μέσα στον μήνα να είναι 0.05.

20. Ο χρόνος (σε ώρες) εντός του οποίου αλλοιώνεται ένα ευαίσθητο προϊόν περιγράφεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{100}\right)^{20}} & x \geq 0. \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της X β) Να υπολογισθεί το ποσοστό των προϊόντων τα οποία αλλοιώνονται μεταξύ 98 και 102 ωρών γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα να αλλοιωθεί το προϊόν εντός 105 ωρών καθώς και η πιθανότητα από 5 προϊόντα που επιλέγονται στην τύχη, κανένα να μην αλλοιωθεί εντός 105 ωρών.

21. Σε έναν πληθυσμό (ας πούμε γυναίκες ηλικίας 20 – 30 ετών σε μια μικρή πόλη), η μέση συστολική πίεση είναι 120 mmHg, με τυπική απόκλιση 20 mmHg, και ο πληθυσμός (των πιέσεων) ακολουθεί κανονική κατανομή. α) Τι ποσοστό του πληθυσμού έχει πίεση: i. Μεταξύ 110 και 125 mmHg ii. Μεγαλύτερη από 135 mmHg iii. Μικρότερη από 135 mmHg β) Ποια είναι εκείνη η πίεση πάνω από την οποία βρίσκεται μόνο το 1% του πληθυσμού γ) Η συστολική πίεση ενός ατόμου

- κρίνεται ως φυσιολογική αν βρίσκεται σε εκείνο το συμμετρικό διάστημα γύρω από τον μέσο που περιέχει το 95% των πιέσεων του πληθυσμού. Να βρεθεί εκείνη η τιμή πίεσης, πάνω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υπερτασικό. Να βρεθεί επίσης εκείνη η τιμή της πίεσης κάτω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υποτασικό δ) Αν το μέγεθος του πληθυσμού είναι 5.000, πόσα άτομα κατά μέσο όρο έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη από 135 mmHg.
22. Ένας έμπορος αγόρασε 100 ζώα από μια μεγάλη κτηνοτροφική περιοχή στην οποία το 3% των ζώων έχουν προσβληθεί από μια ασθένεια. Ποια είναι η πιθανότητα το πολύ 2 από τα αγορασθέντα ζώα να έχουν προσβληθεί από την ασθένεια; Να χρησιμοποιηθεί α) η διωνυμική κατανομή β) η κατανομή Poisson και γ) η κανονική κατανομή (με και χωρίς διόρθωση συνέχειας). Να σχολιάσετε τις τιμές των πιθανοτήτων που βρήκατε.
23. Έχει διαπιστωθεί ότι από τα δένδρα ενός συγκεκριμένου είδους μιας μεγάλης περιοχής, ποσοστό 2% προσβάλλεται κάθε χρόνο από μια συγκεκριμένη ασθένεια (η οποία τις περισσότερες φορές τελικά αντιμετωπίζεται).
- α) Αν ένας γεωπόνος εξετάσει ένα τυχαίο δείγμα 10 δένδρων από την περιοχή, ποια η πιθανότητα στα 10 αυτά δένδρα να υπάρχουν i) ακριβώς 2 δένδρα που έχουν προσβληθεί ii) τουλάχιστον 2 δένδρα που έχουν προσβληθεί. β) Αν ο γεωπόνος εξετάσει ένα τυχαίο δείγμα 300 δένδρων από την περιοχή, ποια η πιθανότητα να βρει i) μεταξύ τριών και οκτώ δένδρων να έχουν προσβληθεί ii) τουλάχιστον 15 δένδρα να έχουν προσβληθεί (στα 300). γ) Αν όντως βρει 15 στα 300 δένδρα να έχουν προσβληθεί, υπάρχει λόγος ανησυχίας ότι το ποσοστό των δένδρων που έχουν προσβληθεί παρουσιάζει αύξηση;
24. Από παρατηρήσεις πολλών ετών, έχει επαληθευθεί ότι ο αριθμός X_t των σεισμών μεγέθους μεγαλύτερου των 5 Richter που πλήττουν μια σεισμογενή περιοχή σε χρόνο t , περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson. Αν ο ρυθμός εμφάνισής τους είναι 4 ανά έτος, α) ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξουν τουλάχιστον δύο σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 5 Richter σε ένα χρονικό διάστημα i. ενός έτους ii. τεσσάρων μηνών β) ποια είναι η πιθανότητα στα επόμενα 10 έτη να υπάρξουν ακριβώς 3 έτη, στα οποία να συμβούν τουλάχιστον 2 σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 5 Richter.
25. Μια πλάκα Petri με αποικίες βακτηριδίων που με το μικροσκόπιο φαίνονται ως σκοτεινές κηλίδες, χωρίζεται σε μικρά τετραγωνίδια. Έχει επαληθευθεί πειραματικά ότι ο αριθμός X_t των βακτηριδίων σε τετραγωνίδια εμβαδού t περιγράφεται ικανοποιητικά από μια διαδικασία Poisson. Αν έχει παρατηρηθεί ότι ο μέσος αριθμός βακτηριδίων ανά cm^2 είναι 4 βακτηρίδια, να βρεθούν οι πιθανότητες: α) να υπάρξουν τουλάχιστον 2 βακτηρίδια i. σε 1 cm^2 ii. σε 3 cm^2 β) να υπάρξει τουλάχιστον 1 βακτηρίδιο σε καθένα από 3 τετραγωνίδια του 1 cm^2 γ) να υπάρξουν το πολύ 80 βακτηρίδια σε 50 cm^2 δ) από 5 τετραγωνίδια του 1 cm^2 να υπάρξουν σε τουλάχιστον 3 από αυτά, το πολύ 2 βακτηρίδια.
26. Η ποσότητα νικοτίνης που περιέχεται σε ένα τσιγάρο συγκεκριμένης μάρκας είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0.8 mgr και τυπική απόκλιση 0.1 mgr. Αν ένα άτομο καπνίζει 100 τσιγάρα την εβδομάδα ποια είναι η πιθανότητα η συνολική ποσότητα νικοτίνης στην οποία θα εκτεθεί να είναι τουλάχιστον 82 mgr.
27. Κατά την παραγωγή ενός πακέτου φυτοφαρμάκου έχει βρεθεί ότι η ποσότητα ξένων προσμίξεων που υπάρχει στο πακέτο είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 4 gr και τυπική απόκλιση 1.5 gr. Αν πάρουμε δείγμα 50 τέτοιων πακέτων, ποια είναι η πιθανότητα η μέση ποσότητα ξένων προσμίξεων (στα 50 πακέτα) να βρίσκεται μεταξύ 3.5 gr και 3.8 gr.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. α) $c=1/4$ β) $15/16$ γ) $2/5$ δ) 2 ε) 1
2. α) $c=1/25$ βi) $3/25$ βii) $6/25$ βiii) $3/5$ βiv) $12/25$ βv) $5/11$ γ) 5
3. α) $c=1$ β) α) $c=1/2$
- 4.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.0894	0.3354	0.4108	0.1643

$$E(X)=1.65$$

5. υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση της μεταβολής της τιμής κάθε μετοχής
- 6.

x	0	1	2
$f_{X_1}(x)$	1/5	3/5	1/5

Με εφαρμογή του θεωρήματος ολικής πιθανότητας παίρνουμε:

x	0	1	2	3	4
$f_{X_2}(x)$	41/125	51/125	26/125	6/125	1/125

7. α) 0.309 β) 0.528 γ) 0.163. Ο αναμενόμενος αριθμός είναι 1.5
8. 0.74
9. α) 0.183 β) 0.087
10. Ναι (η πιθανότητα $P(X \geq 6) = 0.1445$ είναι μικρή και επίσης $E(X)=4$)
11. α) 0.6778 β) 0.699

$$12. R = \prod_{i=1}^2 \{1 - [(1 - R_i)^{v_i} + v_i R_i (1 - R_i)^{v_i - 1}]\}$$

$$13. \alpha) f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{16}{x} \cdot \binom{84}{20-x}}{\binom{100}{20}}, \quad x = 0, 1, \dots, 16$$

$$\beta) f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x} \cdot 0.16^x \cdot 0.84^{20-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 20$$

14. 0.00467884
15. α) 0.997 β) 0.0645
16. α) 0.09 β) 0.0009
17. $c=1/4, 1/2, 1/3, 0, 1/48$
18. α) $E(X)=3/2, V(X)=9/4(\ln 3-1)$ β) 0.156 γ) 0.1013 δ) 0.65
19. α) $E(X)=1/6, V(X)=5/252$ β) 0.00001 γ) 0.45
20. β) 0.287 γ) 0.93, 0.07^5
21. α) i. 0.2902 ii. 0.2266 iii. 0.7734 β) 166.5 γ) 159.2 και 80.8 δ) 1133 άτομα
22. α) 0.4198 β) 0.4232 γ). 0.3848 με διόρθωση συνέχειας και 0.2776 χωρίς διόρθωση.
23. α) i. 0.0153 ii. 0.0162 β) i. 0.69 ii. ≈ 0 γ) Με την υπόθεση ότι το ποσοστό των άρρωστων είναι 2%, η πιθανότητα να βρεθούν 15 άρρωστα στα 300 είναι περίπου 0 και όμως βρέθηκαν! Άρα ...??
24. α) i. 0.9084 ii. 0.3849 β) 0.00000487
25. α) i. 0.9084 ii. 0.99992 β) 0.94605 γ) ≈ 0 δ) 0.09127
26. 0.0228
27. 0.1645