ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ

Ασαφή Σύνολα
Συναρτήσεις Συμμετοχής
Λεκτικοί Κανόνες
Πράξεις Ασαφών Συνόλων
Ασαφής Συνεπαγωγές
Αποασαφοποίηση
Παραδείγματα Ασαφών Συστημάτων

Ασάφεια

- Έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε *μη-ακριβή* (imprecise) δεδομένα.
- Π.χ. «*Ο Νίκος είναι ψηλός*»: δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια το ύψος, αλλά μπορούν να ληφθούν ορισμένες αποφάσεις για θέματα σχετικά με το ύψος του Νίκου.
- Το πρόβλημα δεν οφείλεται τόσο στις έννοιες που χρησιμοποιούνται όσο στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών.

Ασάφεια (2)

- Η ασαφής λογική (fuzzy logic) είναι μια επέκταση της κλασσικής αριστοτέλειας λογικής. Μια πρόταση μπορεί να είναι αληθής "με κάποιο βαθμό αληθείας", και όχι απλά αληθής ή ψευδής.
- Με απλά λόγια, η ασαφής λογική λέει ότι τα πράγματα συχνά δεν είναι «άσπρο-μαύρο» αλλά «αποχρώσεις του γκρι». Η ιδέα αυτή απετέλεσε επανάσταση στη θεωρία της λογικής, γιατί ξέφυγε από το μοντέλο που κυριαρχούσε εδώ και 2500 χρόνια, δηλαδή το μοντέλο του «0-1», «αληθές-ψευδές».

Ασάφεια (3)

- Η **θεωρία ασαφών συνόλων** είναι ένας τρόπος να προσδιορίζουμε πόσο καλά ένα αντικείμενο ικανοποιεί μια αόριστη περιγραφή. Αυτός ο προσδιορισμός είναι υποκειμενικός, γιατί εξαρτάται από το πώς αντιλαμβάνεται ο καθένας τους **λεκτικούς** προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών.

- Παράδειγμα: Έστω η πρόταση «κάνει ζέστη».
- Είναι η πρόταση αυτή αληθής όταν η θερμοκρασία είναι 20 βαθμοί;
- Εξαρτάται από το πώς αντιλαμβάνεται ο καθένας την έκφραση.

- Η ασάφεια δεν προκύπτει λόγω της αβεβαιότητάς μας για τον εξωτερικό κόσμο (ξέρουμε πόση είναι η θερμοκρασία). Προκύπτει γιατί ο γλωσσολογικός όρος «ζέστη» δεν διαχωρίζει τη θερμοκρασία σε δύο κατηγορίες αυστηρά, αλλά σε πολλές **διαβαθμίσεις**.

Παράδειγμα

- Ένα προϊόν Α έχει μια τιμή, π.χ. 100€. Το αντίστοιχο προϊόν Β από μια ανταγωνιστική εταιρία κάνει 110€.
- Η κλασσική λογική καθορίζει ότι η πρόταση «Το Α είναι ακριβότερο από το Β» είναι αληθής.
- Η ασαφής λογική όμως ορίζει ότι η παραπάνω πρόταση είναι αληθής μεν, αλλά με κάποιο βαθμό αληθείας, π.χ. αληθής κατά 20%. Ας θεωρήσουμε ότι δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν μόνο την τιμή του προϊόντος, αλλά και άλλα χαρακτηριστικά τα οποία είναι εγγενώς υποκειμενικά όπως:

  * η ποιότητα,

  * η καλαισθησία,

  * η χρηστικότητα κλπ.
- Η κλασσική λογική δεν μπορεί να κωδικοποιήσει τα παραπάνω χαρακτηριστικά γιατί δεν υπάρχει σαφής ποσοτικοποίησή τους. Δηλαδή δεν μπορεί να πει ότι η «ποιότητά» του είναι 5. Η ασαφής όμως λογική μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο καθόσον χρησιμοποιεί λεκτικές μεταβλητές, οι οποίες διαχωρίζονται στο χώρο ορισμού τους. Κάποιες φορές δεν έχει σημασία λοιπόν η ακριβής τιμή, αλλά ένας ποιοτικός της χαρακτηρισμός.

Γιατί ασαφή;

- Ο κυρίαρχος τρόπος λειτουργίας της επιστήμης απαιτεί προτάσεις οι οποίες είναι είτε ΑΛΗΘΕΙΣ είτε ΨΕΥΔΕΙΣ.
- Ο τρόπος λειτουργίας της ανθρώπινης λογικής όμως δεν θέτει ακριβή όρια μεταξύ ΑΛΗΘΟΥΣ και ΨΕΥΔΟΥΣ

- Η ασαφής λογική προτάθηκε από τον Lotfi A Zadeh (UCLA, Berkeley)
- Πρόταση: Ο Γιώργος είναι νέος.
- Δεδομένο: Ο Γιώργος είναι 22 ετών. Η **ΑΛΗΘΕΙΑ** του ο Γιώργος είναι νέος είναι **θέμα βαθμού** (**matter of degree)**

Αρχή του ασυμβίβαστου

- Η ασαφής λογική δίνει μια ικανοποιητική λύση στη λεγόμενη αρχή του ασυμβίβαστου: «Καθώς η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνει, η ικανότητα μας να προβαίνουμε σε ακριβείς και σημαντικές δηλώσεις για τη συμπεριφορά του μειώνεται μέχρι που να φθάσουμε σε ένα όριο πέρα του οποίου ακρίβεια και σημαντικότητα καθίστανται σχεδόν αμοιβαίως αποκλειόμενα χαρακτηριστικά».

- Είναι προφανές ότι η αρχή αυτή είναι απόρροια της κβαντικής αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg.

Επισήμανση

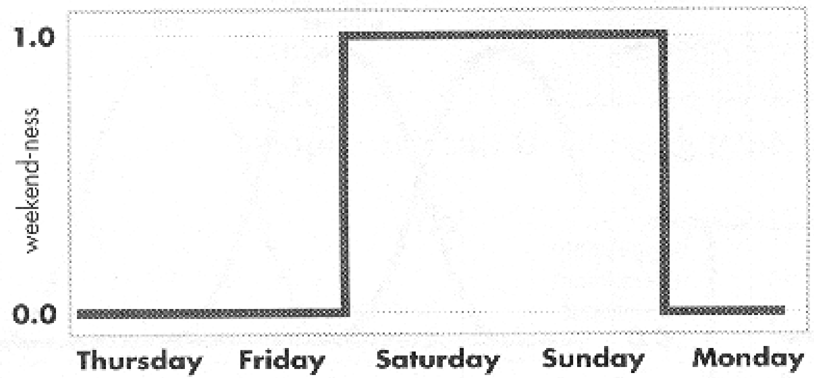
Οποιαδήποτε απεικόνιση μπορεί να επιτευχθεί χωρίς την χρήση ασαφούς λογικής. Η χρήση της όμως καθιστά ορισμένες λύσεις ταχύτερες και τις εφαρμογές οικονομικότερες.

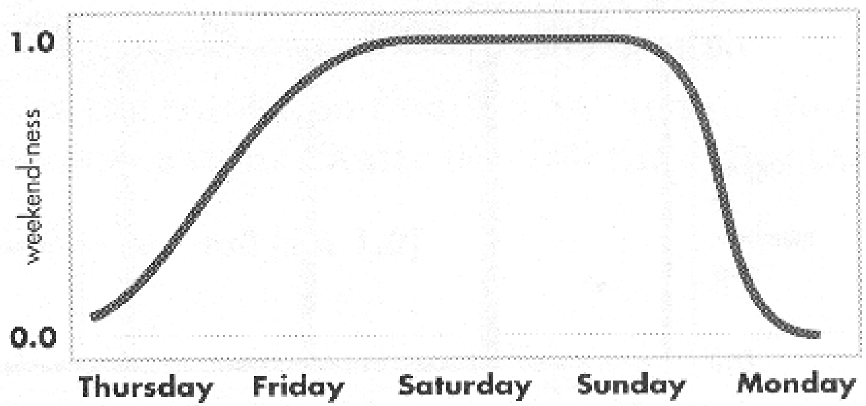
Είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματική για την αντιμετώπιση προβλημάτων μή γραμμικών, με αβεβαιότητα.

Βασικές Εννοιες

Κλασσικό Σύνολο: είτε περιλαμβάνει είτε δεν περιλαμβάνει ένα στοιχείο.

Ασαφές Σύνολο: Μπορεί να περιλαμβάνει κάποιο στοιχείο μέχρι κάποιο βαθμό.





Συμπέρασμα: Στην κλασσική λογική μία πρόταση ή είναι ή δεν είναι αληθής – Στην ασαφή λογική μιά πρόταση είναι αληθής μέχρι κάποιο βαθμό.

Ασαφή Vs Κλασσικά Σύνολα

- Σύνολα (Κλασσικά)
  - Ένα στοιχείο είναι μέλος ή όχι
  - Αληθές ή ψευδές είναι οι μόνες δυνατότητες
- Ασαφή Σύνολα
  - Ένα αντικείμενο μπορεί να ανήκει μερικώς σε ένα σύνολο
  - Ο βαθμός συμμετοχής στο σύνολο ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (membership function f(x))
  - f(x)=0 το αντικείμενο δεν ανήκει στο σύνολο
  - f(x)=1 είναι σίγουρα μέλος του συνόλου
  - Οι υπόλοιπες τιμές για την f(x) δείχνουν το βαθμό συμμετοχής

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- Ασαφές Σύνολο (fuzzy set) A: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x,u_A(x))$ όπου x ανήκει X και $u_A(x)$ ανήκει [0,1].
- Το σύνολο X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
- Η τιμή $u_A(x)$ λέγεται ***βαθμός αληθείας*** *(degree of truth),* συμβολίζει το βαθμό της συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1], κατά πόσο δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει το στοιχείο *x* στο σύνολο A
- Η συνάρτηση $u_A(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση συγγένειας** (membership function) και στην πράξη μπορεί να προέρχεται από:
  - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
  - Πεοκαθορισμένες και απλοποιημένες μορφές
  - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
  - Φυσικές μετρήσεις
  - Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως με νευρωνικά δίκτυα

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων (2)

- Παράδειγμα, η ιδιότητα «ζέστη» που προσδιορίζει πότε μια τιμή θερμοκρασίας θεωρείται ζεστή και πότε όχι μπορεί να εκφραστεί σαν ασαφές σύνολο

- Ζέστη={<10, 0.1>, <15, 0.5>, <20, 0.7>, <25, 0.8>, <30, 1>, <-1, 0>,....}

- Όταν η συνάρτηση συγγένειας ορίζεται έτσι ώστε

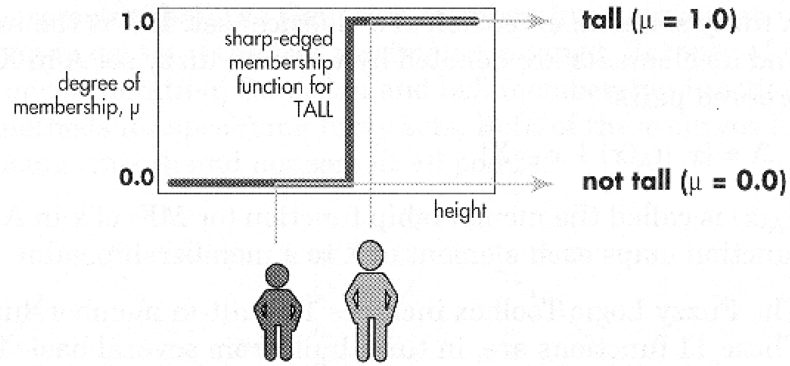
$u_A(x)=0$ 'η $u_A(x)=1$ τότε η θεωρία ασαφών συνόλων συμπίπτει με την κλασική λογική πρώτης τάξης.

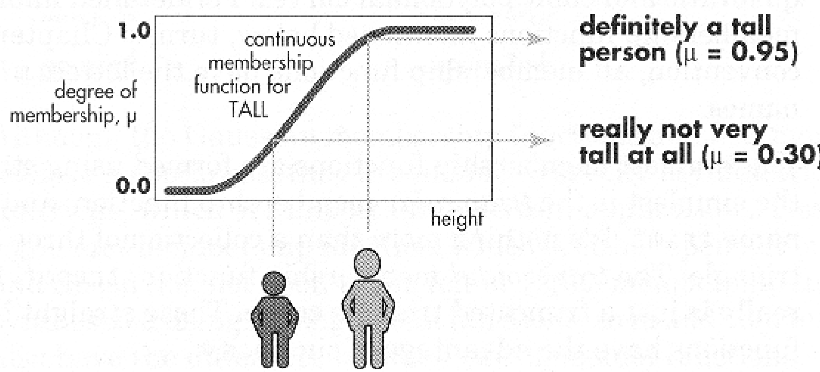
Συνάρτηση Συμμετοχής
(membership function)

- Εισαγωγή της ιδέας της μερικής συμμετοχής ενός στοιχείου σε κάποια έννοια.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή συμμετοχής A(x) τόσο περισσότερο τυπικά το x ανήκει στο A.

Συνάρτηση Συμμετοχής

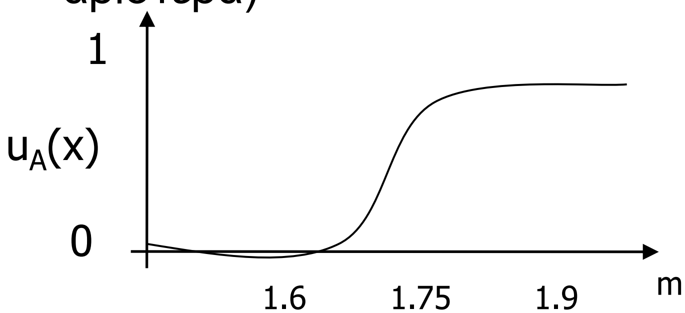
Η Συνάρτηση Συμμετοχής είναι μιά καμπύλη η οποία καθορίζει τον βαθμό στον οποίο κάθε σημείο του πεδίου ορισμού διαθέτει μιά συγκεκριμένη ιδιότητα. Η Συνάρτηση Συμμετοχής ορίζεται στο διάστημα [0,1].

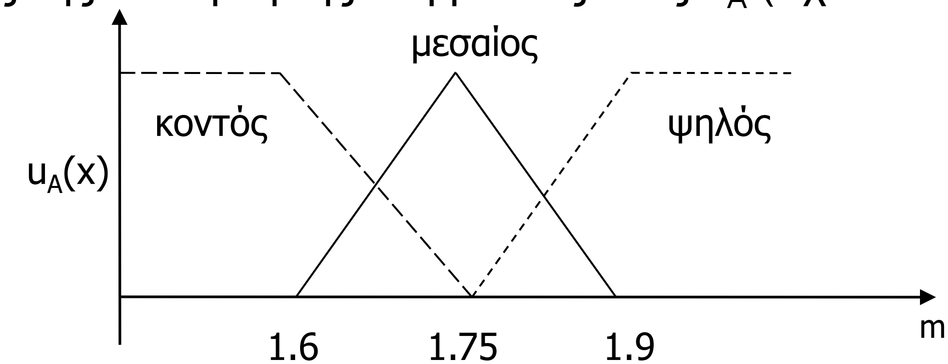




Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων

- Μέσω της αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης συγγένειάς τους u_A (σχ. αριστερά)

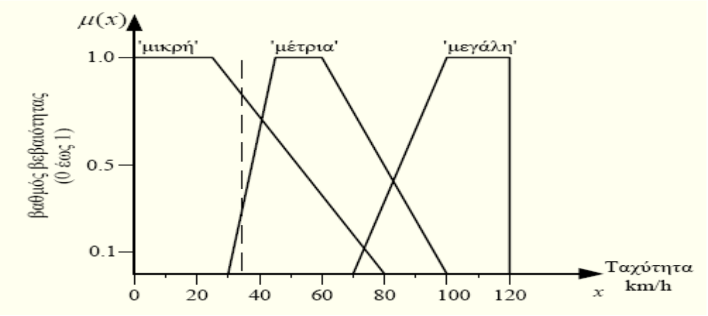




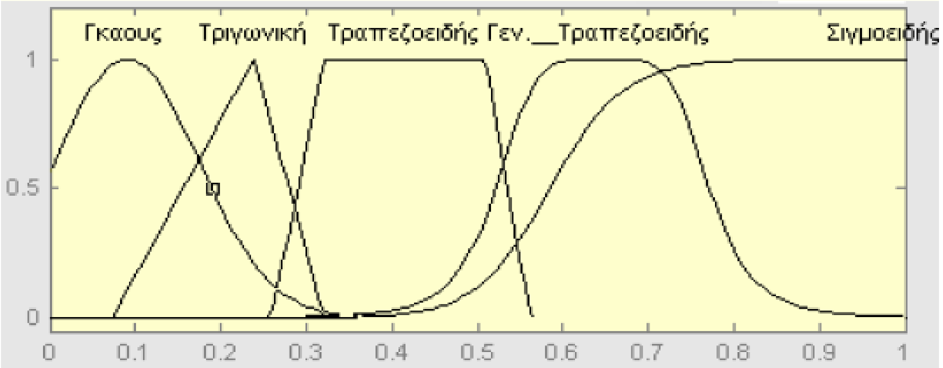
- Απλούστευση: τμηματικώς γραμμική απεικόνιση της συνάρτησης συγγένειας (σχ. δεξιά).
- Σύνολο ζευγών της μορφής $u_A(x)/x$ όπου x είναι το στοιχείο του συνόλου και $u_A(x)$ είναι ο βαθμός συγγένειάς του:
- Π.χ. Ψηλός={0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95}
- Με ζεύγη της μορφής (x, $u_A(x)$):
- Π.χ. Ψηλός={(1.7,0), (1.75,0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9,1), (1.95,1)}
- **Διαφορά**: *η αναλυτική έκφραση περιγράφει συνεχείς τιμές ύψους ενώ το Σύνολο Ζευγών περιγράφει μόνο κάποια συγκεκριμένα ύψη στο διάστημα ορισμού της u(x).*

Συνάρτηση Συμμετοχής

- *Οριζόντιος άξονας*: όλα τα πιθανά μέλη του συνόλου (ταξινομημένα αν είναι δυνατό)
- *Κάθετος άξονας*: τιμή συμμετοχής από 0 (καθόλου) έως 1 (πλήρως)



Τύποι Συναρτήσεων Συμμετοχής

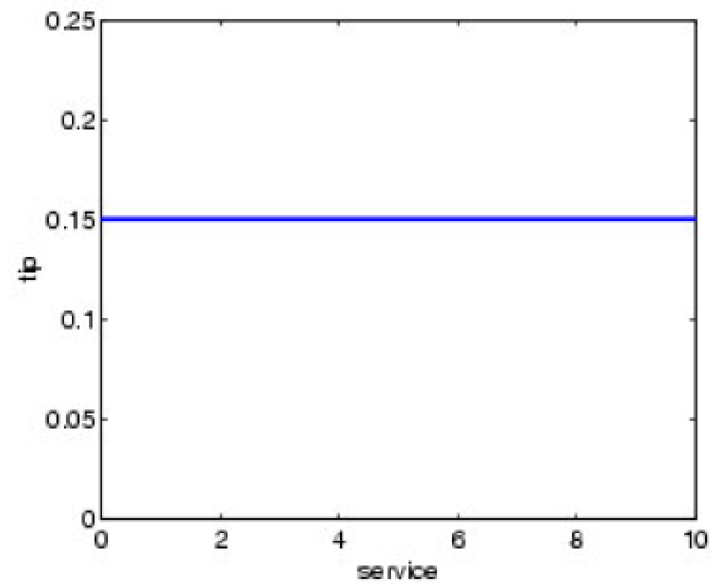


Παράδειγμα

- Θα εξεταστεί το πρόβλημα του φιλοδωρήματος: «Ποιο είναι το "σωστό" φιλοδώρημα για τον σερβιτόρο μας;»
- Λαμβάνοντας υπόψη έναν αριθμό μεταξύ 0 και 10 που αντιπροσωπεύει την ποιότητα της υπηρεσίας σε ένα εστιατόριο (όπου 10 είναι άριστα), ποιο θα έπρεπε να είναι το φιλοδώρημα;

Η μη-ασαφή προσέγγιση (1/)

- Αρχίζοντας με την απλούστερη πιθανή σχέση. Υποθέτουμε ότι το φιλοδώρημα είναι ίσο πάντα με 15% του συνολικού λογαριασμού
- Tip = 0.15



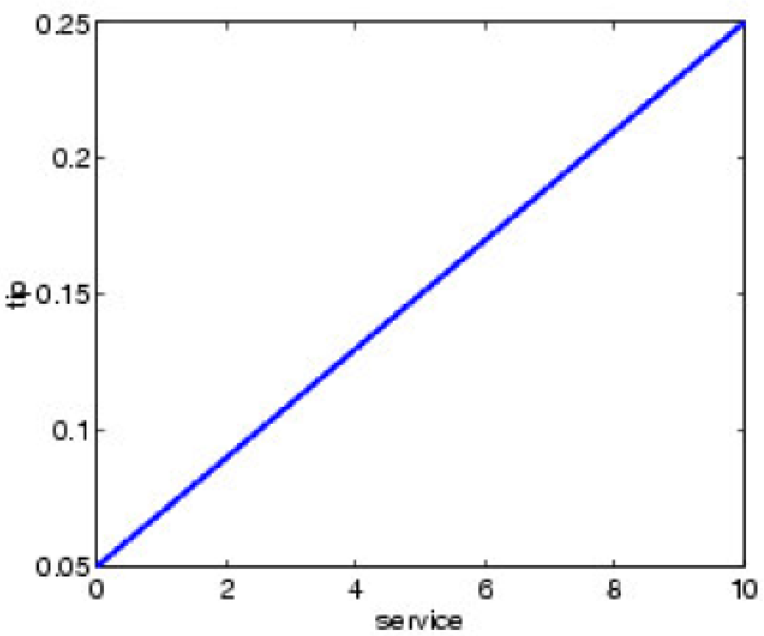
Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Αυτό δεν λαμβάνει υπόψη πραγματικά την ποιότητα της υπηρεσίας, έτσι πρέπει να προσθέσουμε έναν νέο όρο στην εξίσωση. Δεδομένου ότι η υπηρεσία εκτιμάται σε μια κλίμακα 0 έως 10, μπορεί να έχουμε το φιλοδώρημα να μεταβάλλεται γραμμικά από 5% εάν η υπηρεσία είναι κακή, σε 25% εάν η υπηρεσία είναι άριστη.

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Τώρα η σχέση μας μοιάζει με:

  Tip = 0.20/10*service+0.05



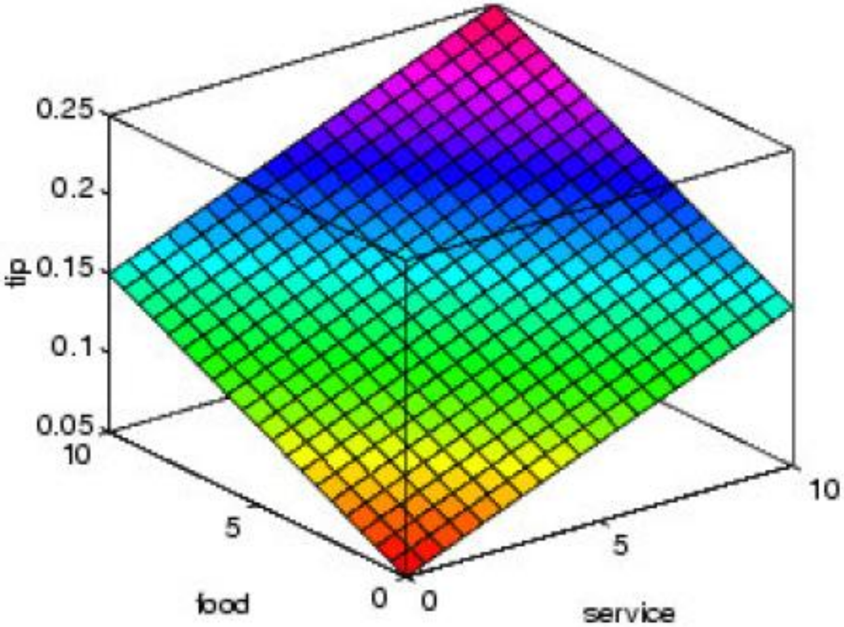
Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Ο τύπος είναι καλός και απλός. Εντούτοις, μπορούμε να θελήσουμε το φιλοδώρημα να εκφράζεται και ανάλογα με την ποιότητα των τροφίμων. Αυτή η επέκταση του προβλήματος καθορίζεται ως εξής.
- Λαμβάνοντας υπόψη δύο σύνολα αριθμών μεταξύ 0 και 10 (όπου 10 είναι άριστος) που αντιπροσωπεύει αντίστοιχα την ποιότητα της υπηρεσίας και την ποιότητα του φαγητού σε ένα εστιατόριο, ποιο θα πρέπει να είναι το φιλοδώρημα;

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Ο τύπος επηρεάζεται τώρα που έχουμε προσθέσει μια άλλη μεταβλητή.

Tip = 0.20/20*(service+food)+0.05;

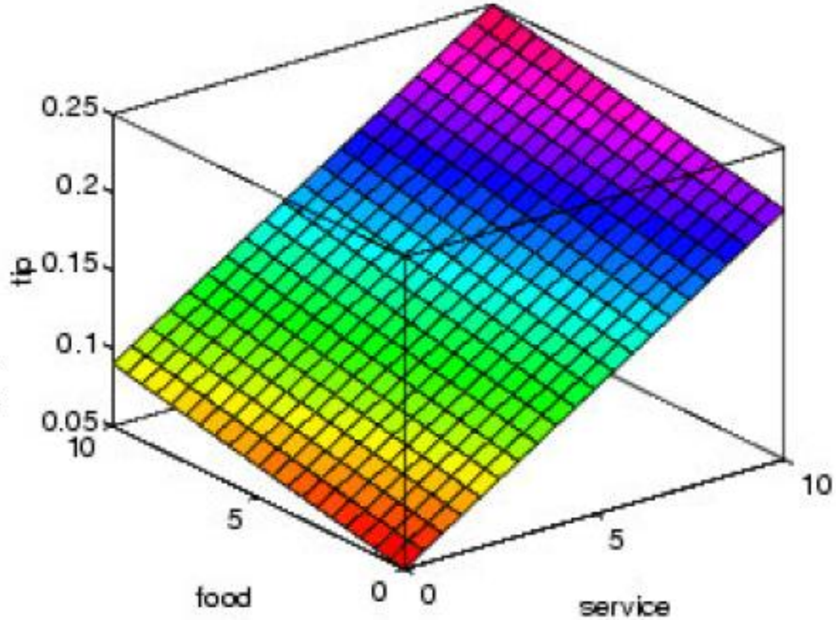


Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Σε αυτήν την περίπτωση, τα αποτελέσματα φαίνονται όμορφα, αλλά όταν εξεταστούν καλύτερα, δεν φαίνονται αρκετά καλά. Υποθέτουμε ότι θέλουμε την υπηρεσία να είναι σημαντικότερος παράγοντας από την ποιότητα του φαγητού.

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Ας υποθέσουμε ότι η υπηρεσία θα αποτελεί το 80% του γενικού φιλοδωρήματος και το φαγητό θα αποτελεί το άλλο 20%.



servRatio=0.8;

tip=servRatio*(0.20/10*service+0.05) +...

(1- servRatio)*(0.20/10*food+0.05)

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Η απάντηση είναι ακόμα κάπως ομοιόμορφα γραμμική. Υποθέτουμε ότι θέλουμε περισσότερο από μιας επίπεδης απάντησης στη μέση, δηλ. αν θέλουμε να δώσουμε ένα φιλοδώρημα 15% γενικά, και να ξεκινάει από αυτό το πλαφόν μόνο εάν η υπηρεσία είναι εξαιρετικά καλή ή κακή. Αυτό σημαίνει ότι εκείνες οι ωραίες γραμμικές χαρτογραφήσεις δεν ισχύουν πλέον.

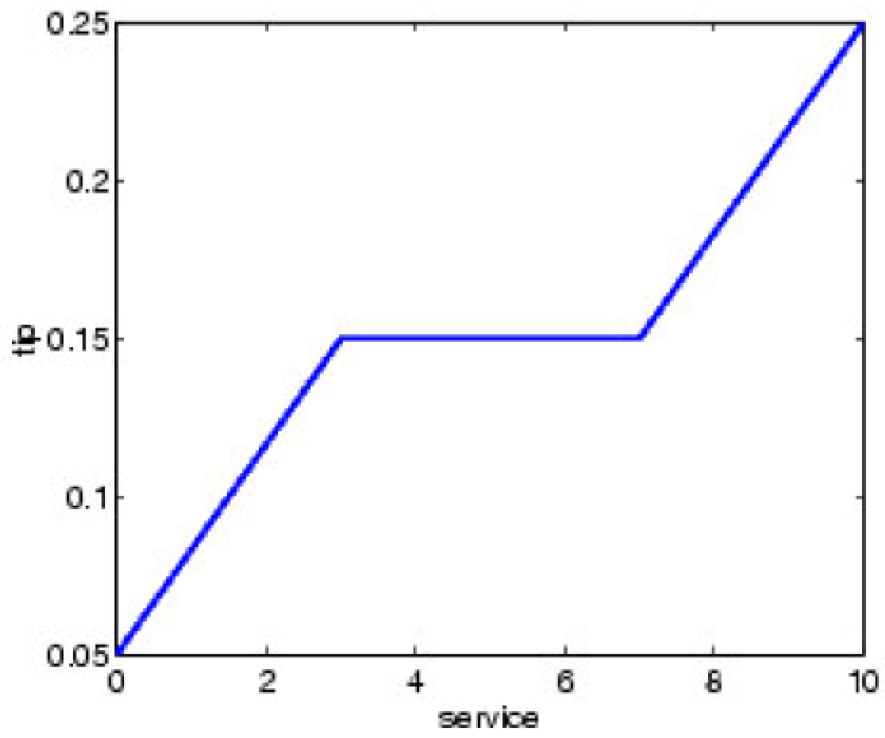
Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Μπορούμε ακόμα να σώσουμε τα πράγματα με τη χρησιμοποίηση μιας τμηματικά γραμμικής κατασκευής. Επιστρέφοντας στο μονοδιάστατο πρόβλημα μελετώντας μόνο την υπηρεσία.

```
if service<3,
    tip=(0.10/3)*service+0.05;
elseif service<7,
    tip=0.15;
elseif service<=10,
    tip=(0.10/3)*(service-7)+0.15;
end
```

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Τότε το σχέδιο θα μοιάζει με αυτό...



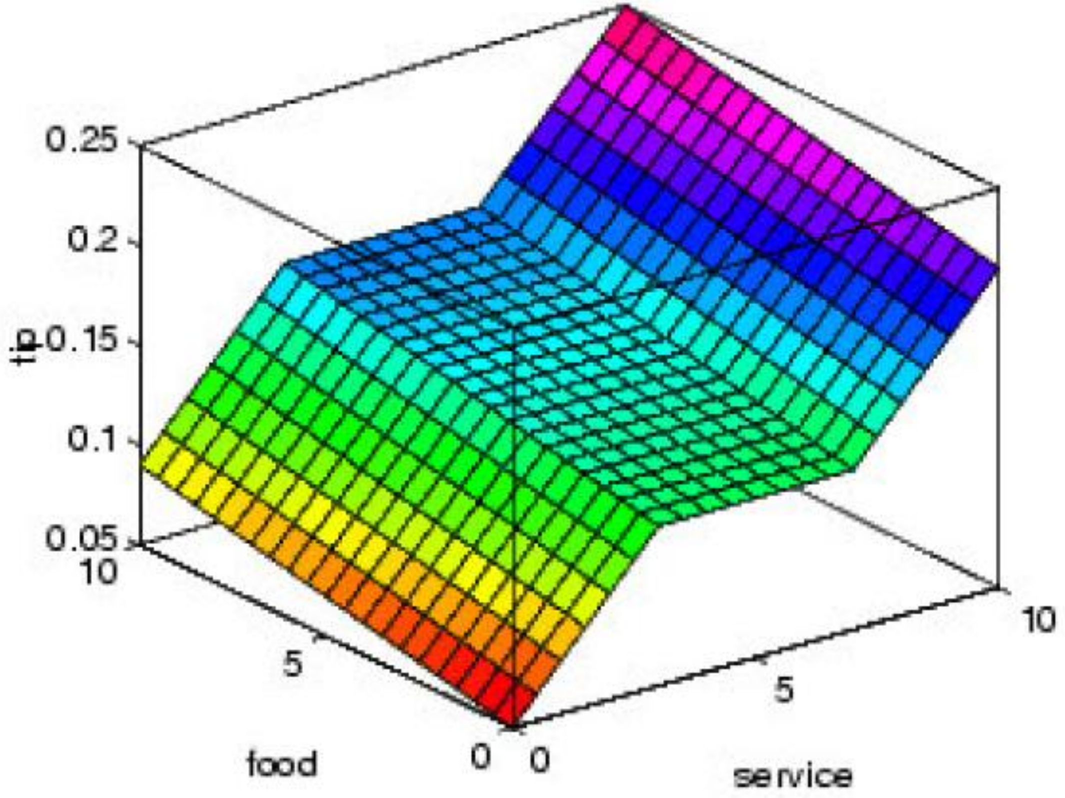
Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Εάν επεκτείνουμε αυτό σε δύο διαστάσεις, όπου λαμβάνουμε υπόψη πάλι το φαγητό, θα έχουμε:

```
servRatio=0.8;
if service<3,
    tip=((0.10/3)*service+0.05)*servRatio + ...
        (1-servRatio)*(0.20/10*food+0.05);
elseif service<7,
    tip=(0.15)*servRatio + ...
        (1-servRatio)*(0.20/10*food+0.05);
else,
    tip=((0.10/3)*(service-7)+0.15)*servRatio + ...
        (1-servRatio)*(0.20/10*food+0.05);
end
```

Η μη-ασαφή προσέγγιση

- Τότε το σχέδιο θα μοιάζει με αυτό...



Συμπέρασμα

- Το σχεδιάγραμμα φαίνεται καλό, αλλά η λειτουργία είναι εκπληκτικά περίπλοκη.
- Ήταν λίγο δυσνόητο να κωδικοποιηθεί αυτό σωστά, και δεν είναι σίγουρα εύκολο να τροποποιηθεί αυτός ο κώδικας στο μέλλον.
- Επιπλέον, είναι προφανές πώς ο αλγόριθμος λειτουργεί σε κάποιον που δεν επιβεβαίωσε την αρχική διαδικασία σχεδίου.

Η ασαφή προσέγγιση

- Θα ήταν ωραίο εάν θα μπορούσαμε να συλλάβουμε ακριβώς τις βασικές ανάγκες αυτού του προβλήματος, αφήνοντας κατά μέρος όλους τους παράγοντες που θα μπορούσαν να είναι αυθαίρετοι.

Η ασαφή προσέγγιση

- Εάν συντάξουμε μία λίστα με τι πραγματικά συμβαίνει στο πρόβλημα, θα καταλήξουμε στις ακόλουθες περιγραφές:
  1. Εάν η υπηρεσία είναι φτωχή, τότε το φιλοδώρημα είναι φτηνό
  2. Εάν η υπηρεσία είναι καλή, τότε το φιλοδώρημα είναι μέτριο
  3. Εάν η υπηρεσία είναι άριστη, τότε το φιλοδώρημα είναι γενναιόδωρο

Η ασαφή προσέγγιση

- Η διάταξη των κανόνων που παρουσιάζονται εδώ είναι αυθαίρετη. Δεν πειράζει ποιοι κανόνες εμφανίζονται πρώτα.
- Εάν θελήσαμε να περιλάβουμε την επίδραση του φαγητού στο φιλοδώρημα, μπορούμε να προσθέσουμε τους ακόλουθους δύο κανόνες.

4. Εάν το φαγητό είναι άγευστο, τότε το φιλοδώρημα είναι φτηνό
5. Εάν το φαγητό είναι εύγευστο, τότε το φιλοδώρημα είναι γενναιόδωρο

Η ασαφή προσέγγιση

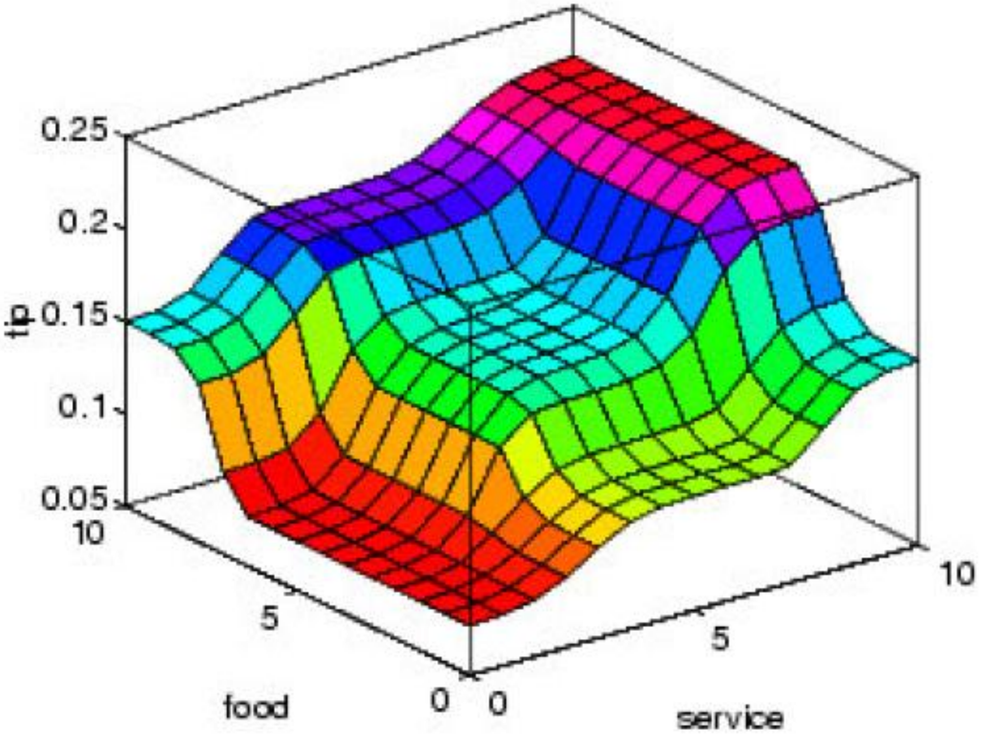
- Στην πραγματικότητα, μπορούμε να συνδυάσουμε τις δύο διαφορετικές λίστες κανόνων σε μία λίστα τριών κανόνων:
    1. Εάν η υπηρεσία είναι φτωχή ή το φαγητό είναι άγευστο, τότε το φιλοδώρημα είναι φτηνό
    2. Εάν η υπηρεσία είναι καλή, τότε το φιλοδώρημα είναι μέτριο
    3. Εάν η υπηρεσία είναι άριστη ή το φαγητό είναι εύγευστο, τότε το φιλοδώρημα γενναιόδωρο

Η ασαφή προσέγγιση

- Αυτοί οι τρεις κανόνες είναι ο πυρήνας της λύσης μας.
- Συμπτωματικά, καθορίσαμε μόλις και τους κανόνες για ένα σύστημα ασαφούς λογικής.
- Τώρα εάν δίνουμε το μαθηματικό νόημα στις γλωσσικές μεταβλητές (τι είναι ένα "μέτριο" φιλοδώρημα , παραδείγματος χάριν?) θα είχαμε ένα πλήρες ασαφές σύστημα συμπεράσματος.

Αποτέλεσμα

- Το σχέδιο θα μοιάζει με αυτό...



Ασαφή Σύνολα

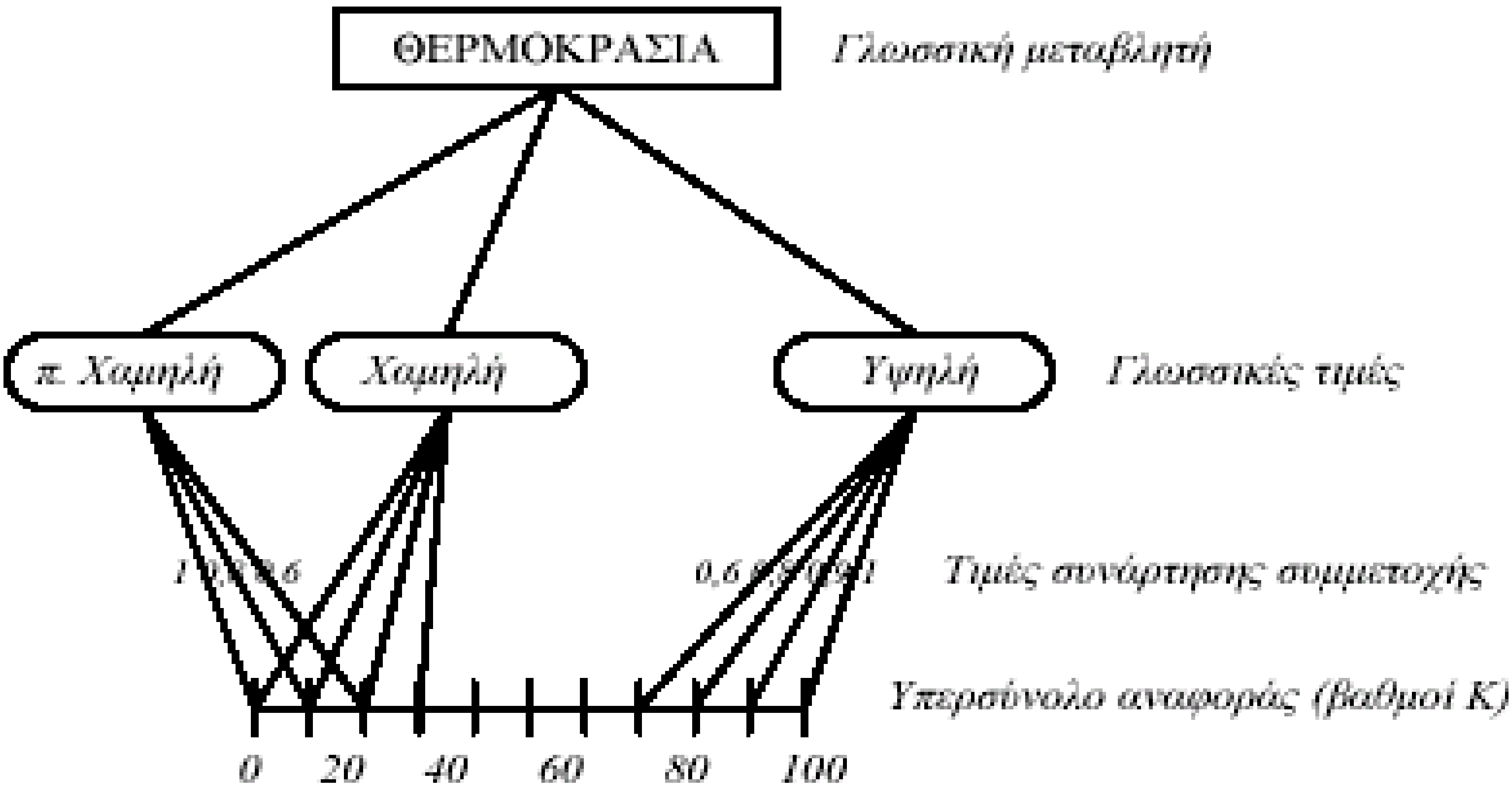
- Τα ασαφή σύνολα χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των λεκτικών μεταβλητών.
- Τα ασαφή σύνολα και οι λεκτικές μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν ποσοτικά έννοιες της φυσικής γλώσσας, τα οποία μπορούμε στη συνέχεια να χειριστούμε.
- Οι λεκτικές μεταβλητές χρησιμοποιούνται στους ευρεστικούς κανόνες.

Λεκτικές Μεταβλητές

Γενικότερα, οι τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής μπορεί να είναι προτάσεις σε κάποια προδιαγεγραμμένη γλώσσα με συνδυασμό ασαφών μεταβλητών, *λεκτικών περιγραμμάτων* (*linguistic descriptors*) και *υπεκφυγών* (*hedges*). Οι τιμές της μεταβλητής ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ του παραδείγματος μπορούν έτσι να εκφραστούν ως:

Υψηλή, όχι_Υψηλή, σχετικά_Υψηλή, όχι_πολύ_Υψηλή, πάρα_πολύ_Υψηλή, αρκετά_Υψηλή κ.ά. δηλαδή με προτάσεις αποτελούμενες από την ετικέτα *Υψηλή*, την άρνηση *όχι*, τα συνδετικά *και* άλλα καθώς και τα περιγράμματα *πολύ*, *σχετικά*, *αρκετά* κ.ά. Κατά τον τρόπο αυτό η μεταβλητή ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ είναι μια **λεκτική μεταβλητή.**

Λεκτική Μεταβλητή- ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ



Τελεστές Ασαφούς Λογικής

Οι τελεστές *min* και *max* δύο συνόλων *A* και *B* έχουν ως αποτέλεσμα τα σύνολα *Γ* και *Δ* αντίστοιχα, δηλαδή

$$\Gamma = A \wedge B = \{min\ (\alpha,\beta)\}\ \forall\ \alpha\in A,\ \beta\in B$$

$$\Delta = A \vee B = \{max\ (\alpha,\beta)\}\ \forall\ \alpha\in A,\ \beta\in B$$

΄Οταν οι τελεστές χρησιμοποιούνται ενιαία υπονοούν το ελάχιστο (*inf* ή *infinum*) ή το μέγιστο (*sup* ή *supremum*) όλων των στοιχείων ενός συνόλου, π.χ.

$$\alpha = \wedge A\ = inf(A)\ \ \alpha\in A$$

$$\alpha = \vee A\ = sup(A)\ \alpha\in A$$

Πράξεις με Ασαφή Σύνολα

Ένα ασαφές σύνολο B είναι ***υποσύνολο* (*subset*)** ενός συνόλου A αν η συνάρτηση συμμετοχής του B είναι μικρότερη ή ίση με αυτή του A παντού στο X, δηλαδή

$$B \subseteq A \text{ αν } \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \; \forall \, x \in X$$

Η ***ένωση* (*union*)** δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \; \forall \, x \in X$$

Η ***τομή* (*intersection*)** δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \; \forall \, x \in X$$

Το ***γινόμενο* (*product*)** δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως: $\mu_{A \bullet B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(\;)$

Πράξεις με Ασαφή Σύνολα

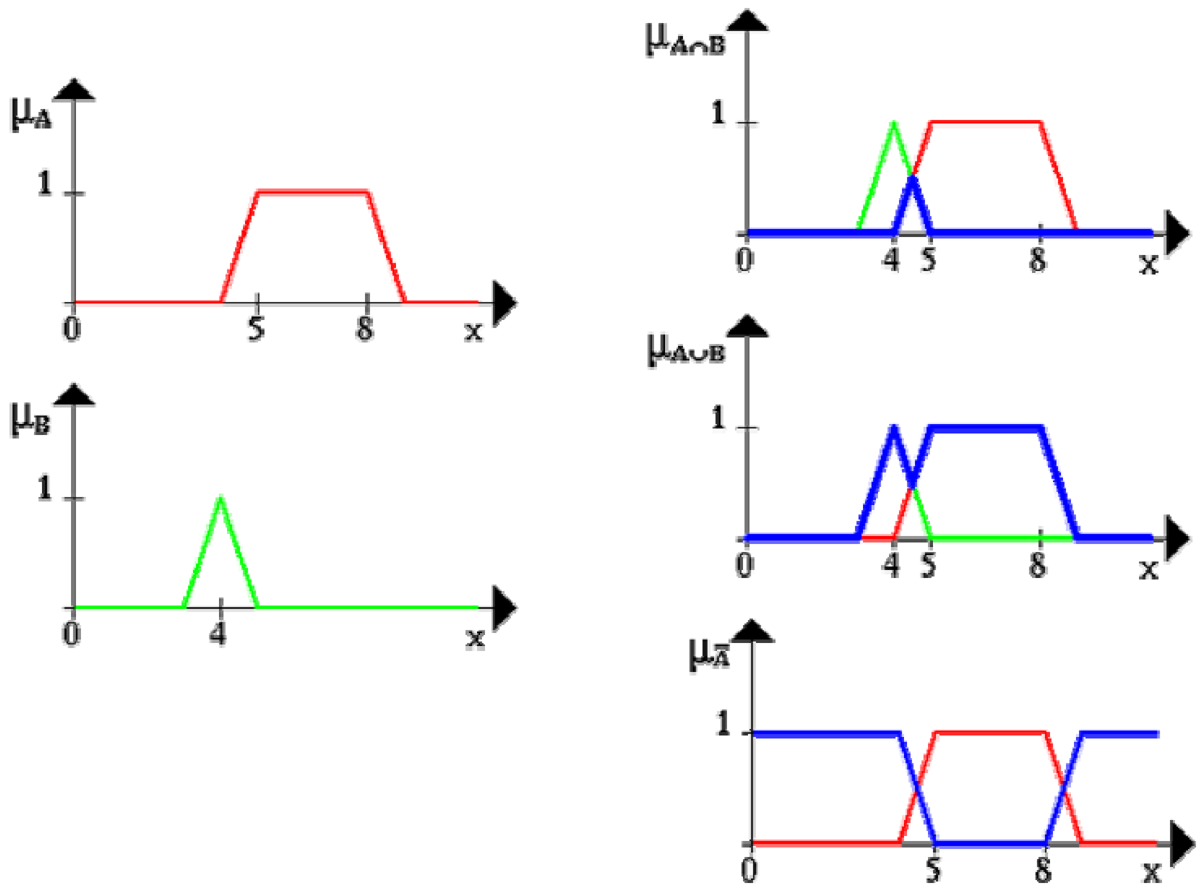
Ένα ασαφές σύνολο A του X θεωρείται *κενό* (*null*) αν η συνάρτηση συμμετοχής του είναι μηδενική παντού, δηλαδή

$$A = \emptyset \text{ αν } \mu_A(x) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

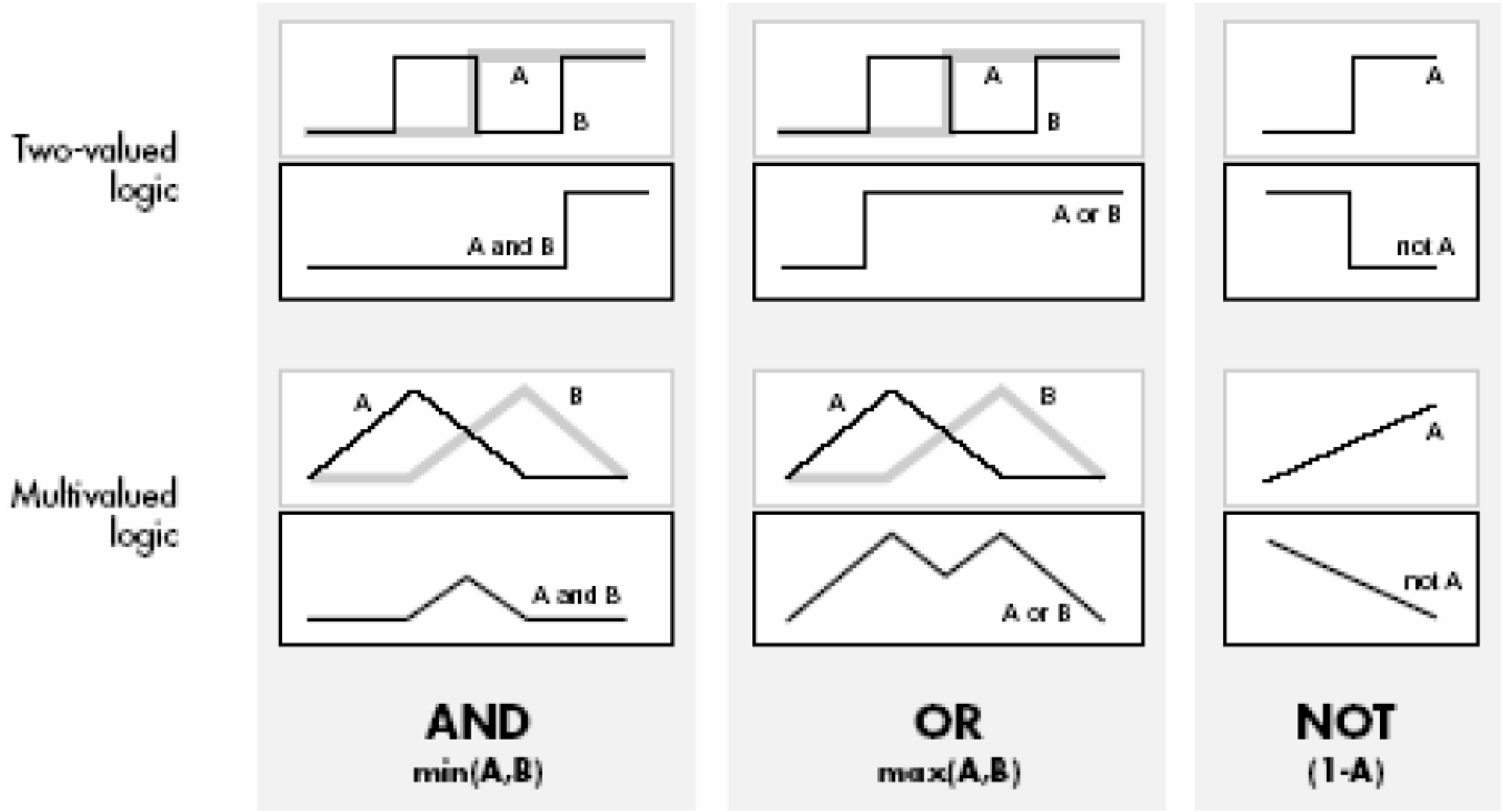
Το *συμπλήρωμα* (*complement*) $\bar{A}$ ενός ασαφούς συνόλου ορίζεται ως:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Τομή, ένωση, συμπλήρωμα- γραφικά

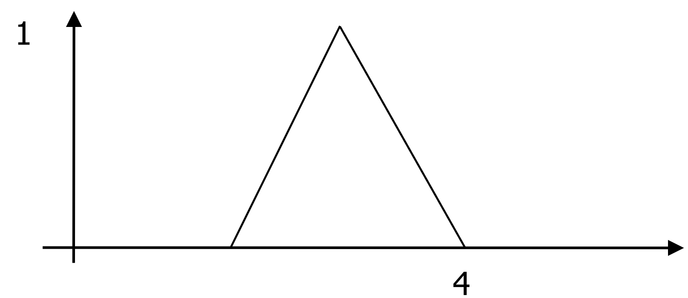


Δυαδική Λογική-Ασαφής Λογική



Ασαφείς μεταβλητές και ασαφείς αριθμοί

- Ασαφής Μεταβλητή (*fuzzy variable*): Μια μεταβλητή της οποίας οι τιμές ορίζονται με ασαφή σύνολα.
  - Π.χ. Τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής «ύψος».
  - Η μεταβλητή «ύψος» χαρακτηρίζεται και ως λεκτική (*linguistic*) μεταβλητή.
- Από ένα μικρό αρχικό αριθμό πρωταρχικών λεκτικών τιμών, να προκύψει ένας πολύ μεγαλύτερος αριθμός σύνθετων λεκτικών τιμών με τη χρήση λεκτικών τελεστών όπως AND, OR, NOT, VERY, κτλ.
- Ασαφείς αριθμοί (fuzzy numbers): ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Π.χ. «Ασαφές 3» στο σχήμα κάτω.
- Οι μη ασαφής τιμές κάποιου μεγέθους αποκαλούνται crisp (σαφείς, συγκεκριμένες).



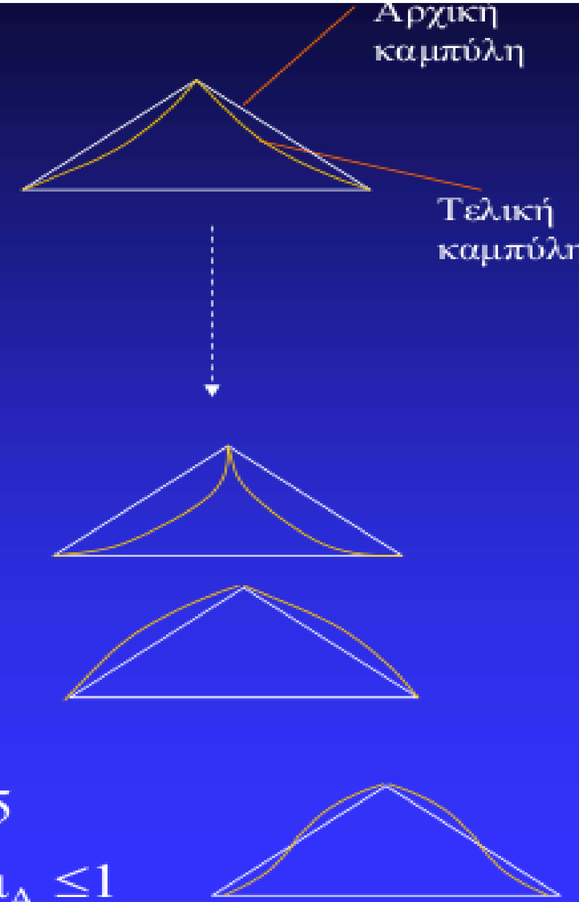
HEDGES (1)

Τα hedges είναι λεκτικοί τελεστές που προσαρτόμενοι (εφαρμοζόμενοι) σε μια λεκτική τιμή (ένα συνεχές ασαφές σύνολο) τροποποιούν το πεδίο τιμών της (τους βαθμούς συμμετοχής του).

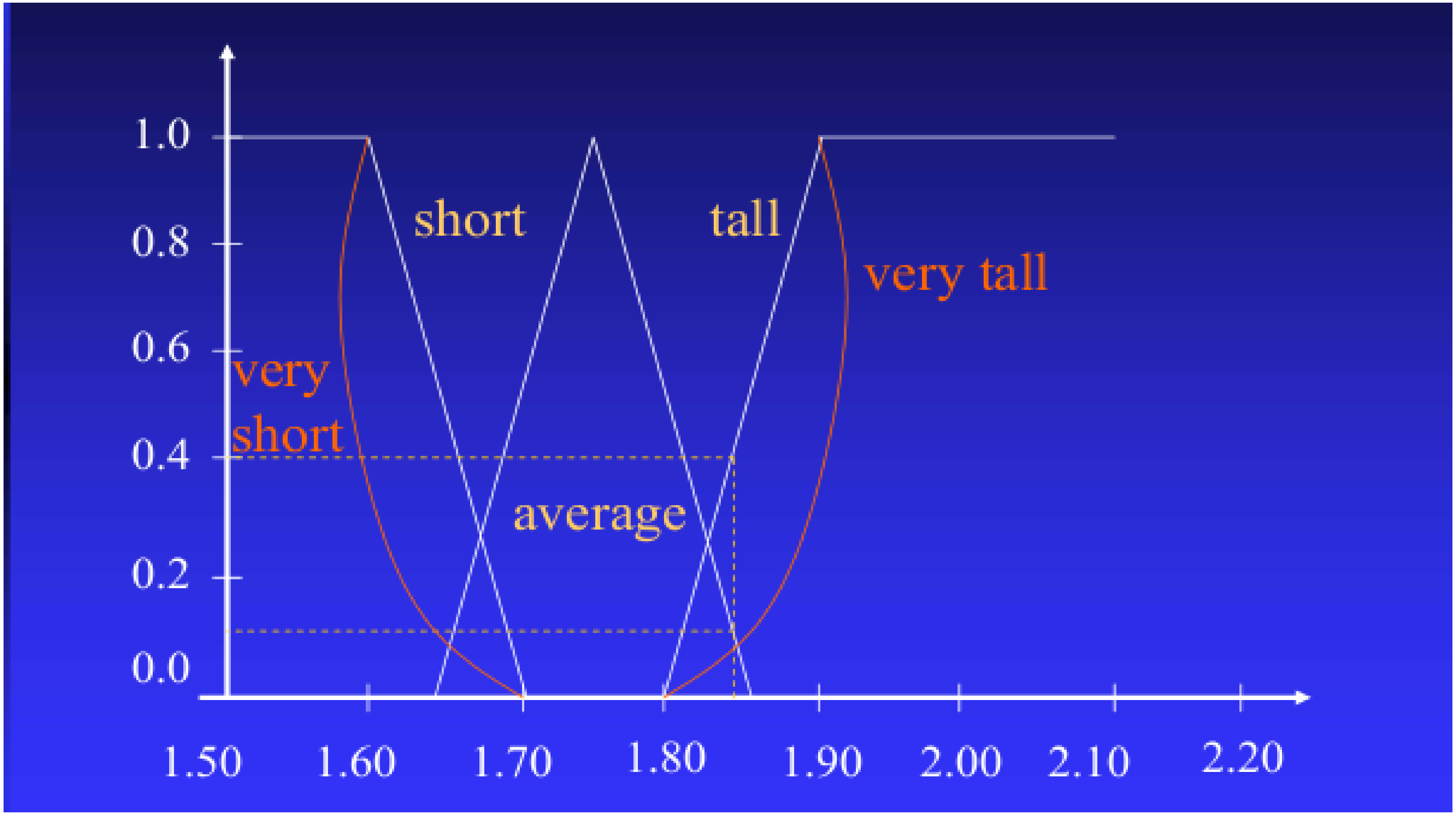
Τέτοιοι τελεστές είναι π.χ. οι slightly, very, extremely, somewhat κλπ. Η προσάρτησή/εφαρμογή τους στη λεκτική τιμή/ασαφές σύνολο π.χ. tall ενισχύει (π.χ. Very tall, extremely tall) ή εξασθενίζει (π.χ. Somewhat tall)την τιμή/το ασαφές σύνολο tall (δηλ. Τους βαθμούς συμμετοχής)

Hedges (2)

a little	$[\mu_A(x)]^{1.3}$
slightly	$[\mu_A(x)]^{1.7}$
very	$[\mu_A(x)]^{2}$
extremely	$[\mu_A(x)]^{3}$
very very	$[\mu_A(x)]^{4}$
more or less/ somewhat	$\sqrt{\mu_A(x)}$
indeed	$2[\mu_A(x)]^2$ για $0 \leq \mu_A \leq 0.5$ $1-2[1-\mu_A(x)]^2$ για $0.5 < \mu_A \leq 1$



Hedges (3)



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
short
tall
very tall
very short
average
1.50
1.60
1.70
1.80
1.90
2.00
2.10
2.20

Ασαφείς μεταβλητές και ασαφείς αριθμοί

- Έστω η ασαφής μεταβλητή Βάρος με πρωταρχικές λεκτικές τιμές {ελαφρύς, βαρύς}. Έστω Α η αρχική λεκτική τιμή «ελαφρύς» και Β η αρχική λεκτική τιμή «βαρύς».

Ένας τρόπος παραγωγής σύνθετων λεκτικών τιμών με λεκτικούς τελεστές συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Λεκτικός τελεστής	Επίδραση στη συνάρτηση συγγένειας
VERY A	$u_{VERY(A)}(x)=[u_A(x)]^2$
A AND B	$u_{A\_AND\_B}(x)=[u_A(x)\wedge u_B(x)]$
A OR B	$u_{A\_OR\_B}(x)=[u_A(x)\vee u_B(x)]$
NOT A	$u_{NOT\_A}(x)=[1-u_A(x)]$
PLUS A	$u_{PLUS(A)}(x)=[u_A(x)]^{1.25}$
MINUS A	$u_{MINUS(A)}(x)=[u_A(x)]^{0.75}$

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- *Ασαφής πρόταση* είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή.
  - Παράδειγμα: στην ασαφή πρόταση «Το ύψος του Νίκου είναι μέτριο», το «ύψος» είναι η ασαφής μεταβλητή και το «μέτριο» είναι ένα ασαφές σύνολο που είναι η τιμή της μεταβλητής.
  - Το κιβώτιο είναι βαρύ (ή Το βάρος του κιβωτίου έχει τιμή βαρύ)
  - Το δωμάτιο είναι κρύο (ή Η θερμοκρασία του δωματίου έχει τιμή κρύο)
  - Ο φοιτητής είναι άριστος (ή Η επίδοση του φοιτητή έχει τιμή άριστη)

Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- *Ασαφής κανόνας (fuzzy rule):* είναι μια υπο συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
  - Παράδειγμα 1 (στην πιο απλή εκδοχή mamdani):

    “if x is A then y is B”
  - Παράδειγμα 2: «Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια τότε η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια»
    - Τα «ταχύτητα» και «πίεση» είναι οι ασαφείς μεταβλητές
    - Το ασαφές σύνολο «μέτρια» είναι η τιμή των ασαφών συνόλων «ταχύτητα» και «πίεση»

ΑΣΑΦΕΙΣ ΚΑΝΟΝΕΣ

if x is A
then y is B

x, y : λεκτικές μεταβλητές

A, B : λεκτικές τιμές (ασαφή σύνολα)

Κλασσικός κανόνας

if speed is >100

then stop-distance is >50

Ασαφής κανόνας

if speed is fast

then stop-distance is long

Πιό σύνθετοι κανόνες: χρήση AND ή/και OR στις συνθήκες, ύπαρξη περισσότερων του ενός συμπερασμάτων.

ΑΣΑΦΗΣ ΕΞΑΓΩΓΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ (ΤΥΠΟΥ MAMDANI)

1. **Ασαφοποίηση (Fuzzification)**

   (Μετατροπή των ξερών-crisp εισόδων σε ασαφείς, δηλ. στους αντίστοιχους βαθμούς συμμετοχής)

2. **Εκτίμηση κανόνων (Rule evaluation)**

   2.1 Εκτίμηση συνθηκών

   (Υπολογισμός του συνδυασμένου βαθμού συμμετοχής)

   2.2 Εκτίμηση συμπεράσματος

   (Εφαρμογή του συνδυασμένου βαθμού στη συνάρτηση συμμετοχής του συμπεράσματος)

3. **Συνάθροιση εξόδων**

   (Consequents aggregation)

   (Συνδυασμός των παραχθέντων συναρτήσεων συμμετοχής των εμπλεκόμενων κανόνων σ' ένα ασαφές σύνολο)

4. **Αποασαφοποίηση (Defuzzification)**

   (Μετατροπή του αποτελέσματος της συνάθροισης σε ξερή-crisp τιμή)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

Ασαφείς κανόνες

R1

if x is A3

or y is B1

then z is C1

R2

if x is A2

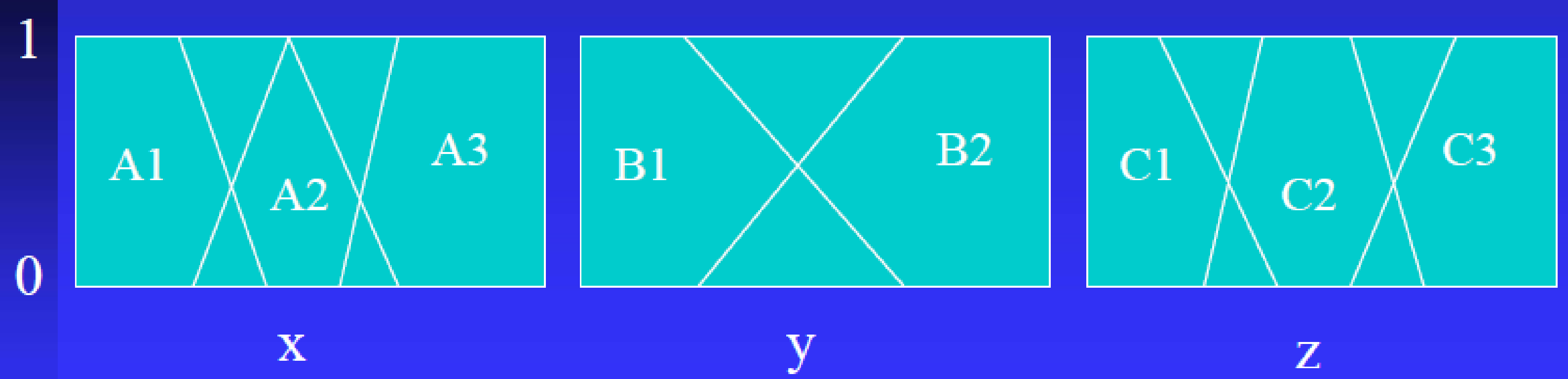
and y is B2

then z is C2

R3

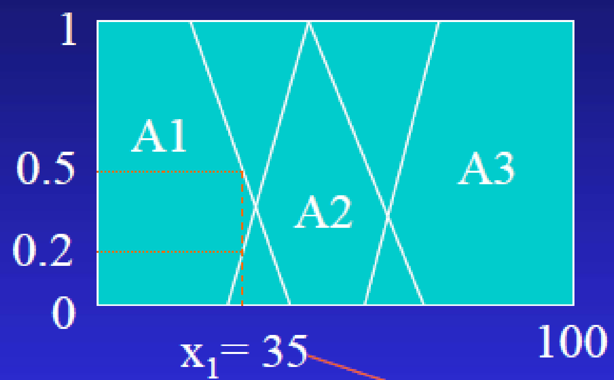
if x is A1

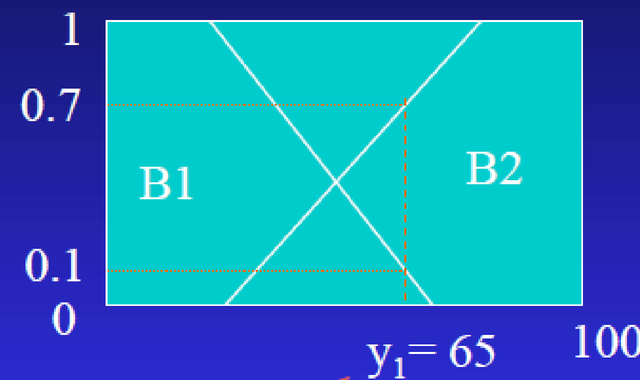
then z is C3



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

Βήμα 1 (Ασαφοποίηση)





είσοδοι

$$\mu_{A1}(x_1) = 0.5$$

$$\mu_{A2}(x_1) = 0.2$$

$$\mu_{A3}(x_1) = 0.0$$

$$\mu_{B1}(y_1) = 0.1$$

$$\mu_{B2}(y_1) = 0.7$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

Βήμα 2 (Εκτίμηση κανόνων)

Βήμα 2.1

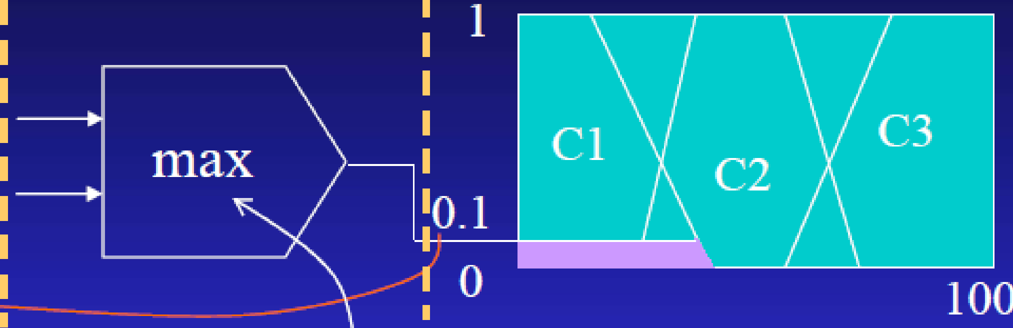
Βήμα 2.2

R1

if x is A3 (0.0)

or y is B1 (0.1)

then z is C1 (0.1)



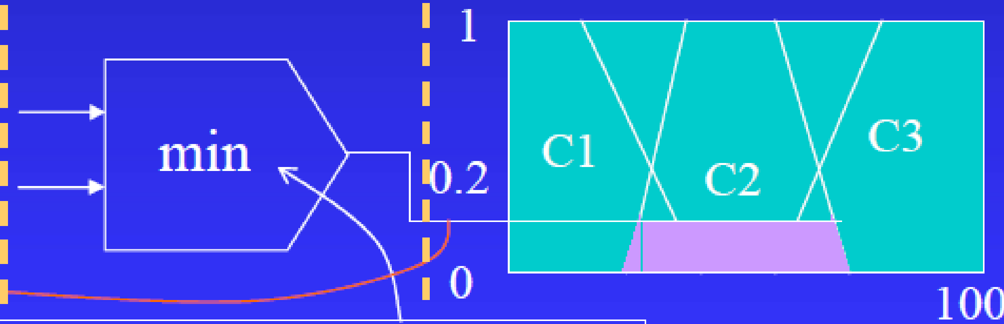
Εναλλακτικά, αντί της max(μ1, μ2), θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η asum(μ1, μ2) = μ1+μ2-μ1*μ2.

R2

if x is A2 (0.2)

and y is B2 (0.7)

then z is C2 (0.2)



Εναλλακτικά, αντί της min(μ1, μ2), θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η prod(μ1, μ2) = μ1*μ2.

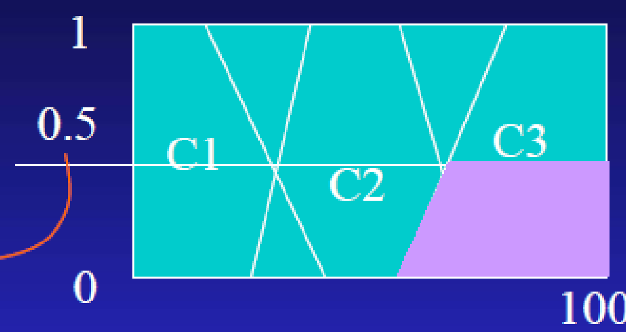
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (4)

Βήμα 2 (συν.)

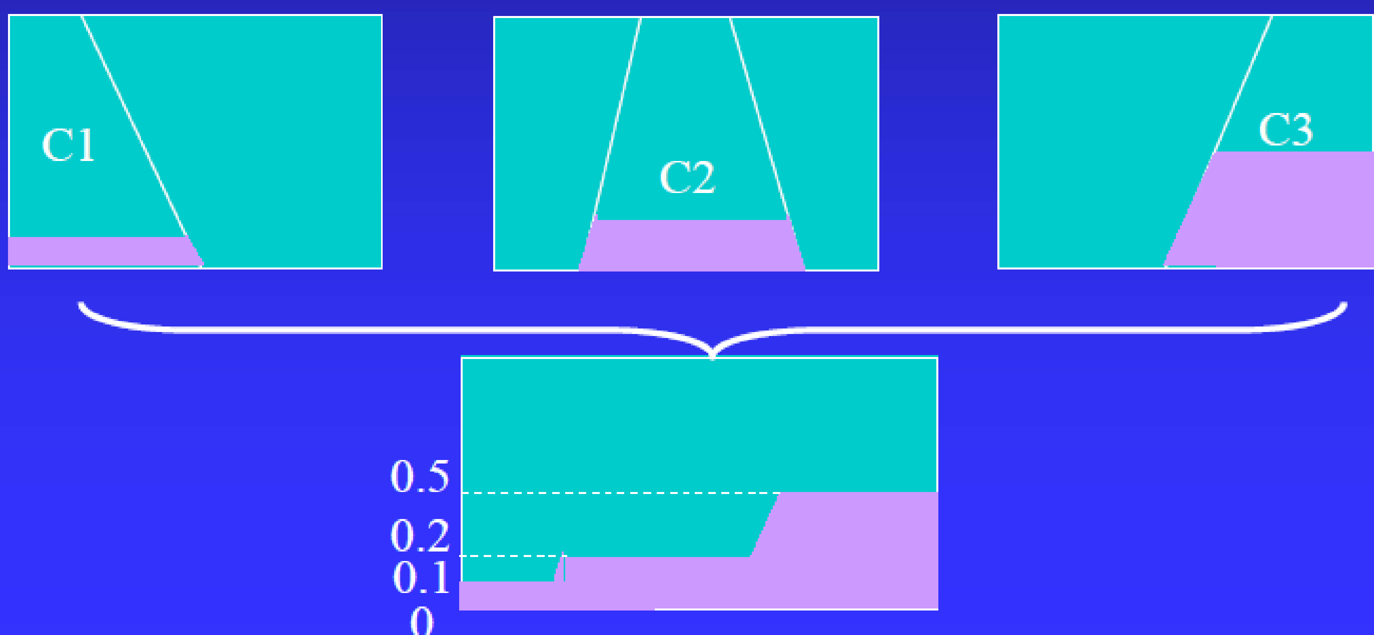
R3

if x is A1 (0.5)

then z is C3 (0.5)



Βήμα 3 (Συνάθροιση εξόδων)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (5)

<u>Βήμα 4</u> (Αποασαφοποίηση)

Υπάρχουν πολλοί μέθοδοι αποασαφοποίησης. Η πιο δημοφιλής είναι η centroid, που βρίσκει την τεταγμένη του κέντρου βάρους της επιφάνειας μεταξύ της καμπύλης (από τη συνάθροιση) και των αξόνων. Αυτή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$g = \frac{\int_a^b \mu_A(x)\, x\, dx}{\int_a^b \mu_A\, dx}$$

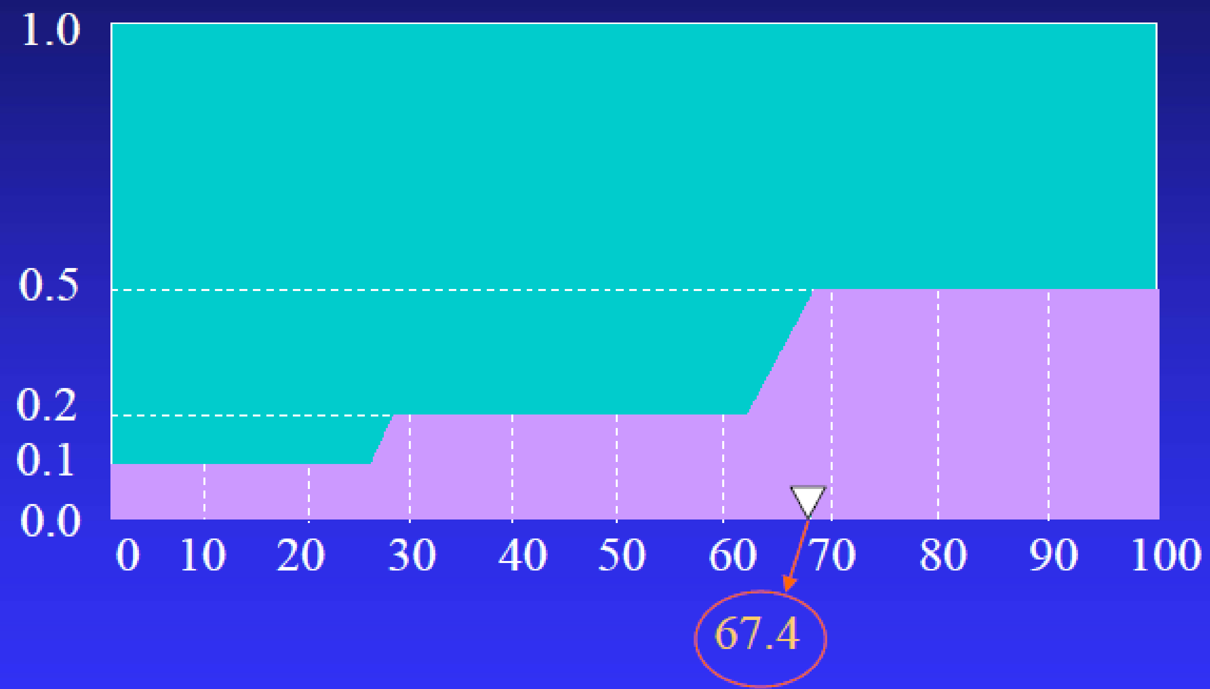
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (6)

Στην πράξη όμως χρησιμοποιούμε ένα δείγμα σημείων για τον υπολογισμό και όχι συνεχείς τιμές της συνάρτησης (για λόγους αποφυγής της πολυπλοκότητας), οπότε χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος:

$$g = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)\, x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (7)

Εφαρμόζουμε τον τύπο στην περίπτωσή μας (a=0, b=100):



$$g = \frac{(0+10+20)\times 0.1 + (30+40+50+60)\times 0.2 + (70+80+90+100)\times 0.5}{(0.1+0.1+0.1)+(0.2+0.2+0.2+0.2)+(0.5+0.5+0.5+0.5)} = \frac{209}{3.1} = 67.4$$