Άσκηση 3

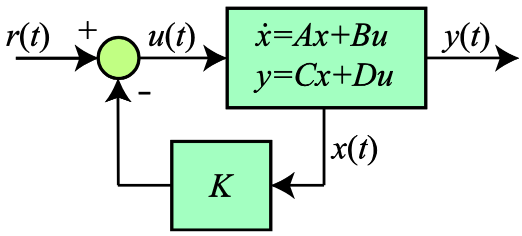
Έλεγχος ανατροφοδότησης κατάστασης dc κινητήρα

Έλεγχος ανατροφοδότησης κατάστασης

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα όπως γνωρίζουμε, μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου μέσω του καταστατικού προτύπου

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

όπου *x, u, y* αποτελούν την κατάσταση, την είσοδο και την έξοδο του συστήματος αντίστοιχα. Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις ουσιαστικά μας δείχνει τον τρόπο που αλλάζει κατάσταση το σύστημα, ενώ η δεύτερη είναι ό,τι μετράμε, δηλαδή πώς «βλέπουμε» αυτήν την μεταβολή στην έξοδό μας. Για να βρεθούν οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος χρειαζόμαστε πρωταρχικά να ορίσουμε ένα διάνυσμα κατάστασης. Η κατάσταση του συστήματος ουσιαστικά είναι οι μεταβλητές, η γνώση των οποίων μπορεί να μας δώσει πλήρη περιγραφή για το εκάστοτε στιγμιότυπο του συστήματος. Η αλλαγή της δυναμικής του συστήματος έγκειται στην αλλαγή του πίνακα A και πιο συγκεκριμένα των ιδιοτιμών του. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τον ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης του οποίου η αρχική μορφή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1: Ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης

Ο νόμος ελέγχου δίνεται από την εξής σχέση:

$$u(t) = -Kx(t) + r(t)$$

Όπως γνωρίζουμε σε ένα LTI σύστημα σε μηδενική είσοδο το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $x_e = 0$. Μηδενίζοντας το σήμα αναφοράς r(t) ο νόμος ελέγχου που προκύπτει καταφέρνει την επίτευξη ρύθμισης του συστήματος. Το πρόβλημα της ρύθμισης (regulation) ενός συστήματος στην γενική περίπτωση προσδιορίζεται ως η δημιουργία ενός νόμου ελέγχου έτσι ώστε για μια τιμή x^* της κατάστασης, αυτή η κατάσταση να μετατραπεί σε ευσταθή κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

Άρα, στην περίπτωση ρύθμισης του συστήματος σε μια κατάσταση $x^*(t)$ ο νόμος ελέγχου θα πάρει την εξής μορφή:

$$u(t) = -K\left[x(t) - x^*(t)\right] + u^*(t)$$

Πράγματι εισάγοντας τον παραπάνω νόμο ελέγχου στην πρώτη εκ των καταστατικών εξισώσεων του συστήματος έχουμε:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B\left(u^* - K\left(x - x^*\right)\right) = \left(A - BK\right)x + Bu^* + BKx^*$$

Αλλά αφού το $x^*(t)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος έχουμε:

$$\dot{x}^* = 0 = Ax^* + Bu^*$$

Συνεπώς το σφάλμα $\sigma = x - x^*$ (το οποίο είναι διάνυσμα) διέπεται από την γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\sigma} = (A - BK)\sigma$$

Άρα το σφάλμα θα συγκλίνει στο μηδέν, δηλαδή η κατάσταση θα συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή. Για να μπορέσουμε να επιτύχουμε τον έλεγχο αυτό όμως θα πρέπει το σύστημα να είναι ελέγξιμο.

Ελέγξιμο είναι ένα σύστημα όταν η τάξη του πίνακα $E = [B\ AB\ A^2B\ \ldots A^{n-1}B]$ είναι *n* (όπου *n* ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος). Στην περίπτωση αυτή πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε μια είσοδο ώστε το διάνυσμα της κατάστασης να μεταβεί σε μια επιθυμητή τιμή.

Παρατηρήσιμο είναι ένα σύστημα του οποίου η τάξη του πίνακα $O = [C\ CA\ CA^2\ \ldots CA^{n-1}]^T$ είναι *n*. Σε ένα παρατηρήσιμο σύστημα η κατάσταση μπορεί να εξαχθεί από την είσοδο και την έξοδο σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Η παρατηρησιμότητα είναι μια ιδιότητα που είναι απαραίτητη σε ένα σύστημα ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τον προαναφερθέν ελεγκτή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κατάσταση δεν είναι γνωστή, αλλά πρέπει να εξαχθεί με κάποιον τρόπο. Το σύστημα που χρησιμοποιούμε/υλοποιούμε ώστε να εξάγουμε εκτίμηση της κατάστασης ονομάζεται παρατηρητής, οι καταστατικές εξισώσεις του οποίου είναι:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + Du$$

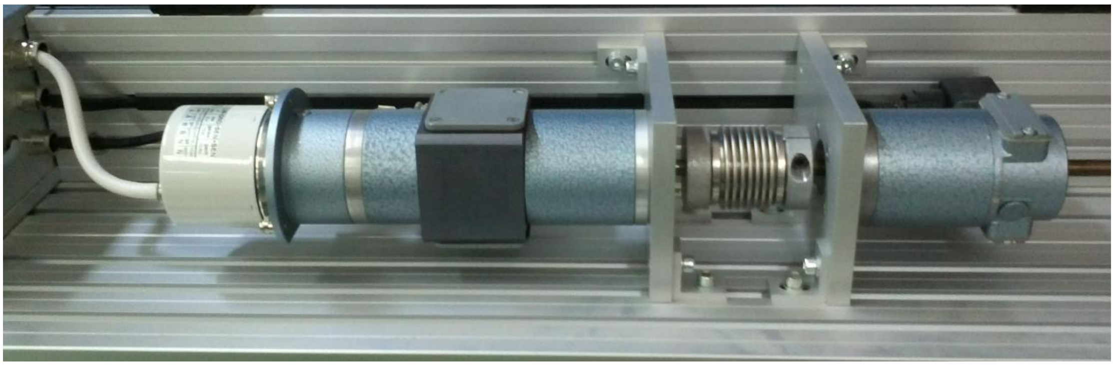
Ο πίνακας *L* (στην γενική περίπτωση) είναι αυτός που ουσιαστικά μας επιτρέπει να επέμβουμε στο ρυθμό σύγκλισης της εκτιμώμενης κατάστασης στην πραγματική κατάσταση. Έστω e το σφάλμα της πραγματικής κατάστασης από την εκτιμώμενη ως $e = x - \hat{x}$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - \left(A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})\right) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \Longrightarrow$$
$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα *A-LC* πρέπει να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη έτσι ώστε η εκτίμηση του παρατηρητή να συγκλίνει στην πραγματική κατάσταση. Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι $x \equiv \hat{x}$ (μιας και $x \to \hat{x}$), ο έλεγχος που περιγράφηκε προηγουμένως είναι πλέον εφαρμόσιμος.

Καταστατικό μοντέλο DC κινητήρα

Το σύστημα που θα μελετηθεί είναι ένας dc κινητήρας DR 300 της εταιρείας AMIRA.



Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική ενός dc κινητήρα δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_t i$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K_e\frac{d\theta}{dt}$$

Ορίζοντας ως καταστάσεις τις $x_1 = \omega = \dot{\theta}$, $x_2 = i$ και είσοδο $u = V$ τελικά καταλήγουμε στις εξής καταστατικές εξισώσεις για το σύστημα:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{b}{J} & -\dfrac{K_t}{J}\\ -\dfrac{K_e}{J} & -\dfrac{R}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Για την συγκεκριμένη διάταξη, καθώς το προαναφερθέν καταστατικό μοντέλο δεν την περιγράφει επακριβώς, χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι αναγνώρισης συστήματος για την εξαγωγή ενός προσεγγιστικού μοντέλου. Έτσι το εν λόγω σύστημα προσσεγίστηκε με την εξής δευτεροβάθμια συνάρτηση μεταφοράς, έχοντας ως είσοδο την τάση V σε Volts και ως έξοδο την γωνιακή ταχύτητα ω σε krpm:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1.865s+24.77}{s^2+16.49s+15.49}$$

Εφαρμογές

Για την εκτέλεση του πειράματος, θα σας δωθούν κατά την διάρκεια του εργαστηρίου ένα template vi και ένα subvi το οποίο υλοποιεί τον παρατηρητή.

1. Αρχικά χρησιμοποιώντας την συνάρτηση μεταφοράς, εξάγετε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος. Είναι το σύστημα ελέγξιμο; Είναι παρατηρήσιμο;
2. Δείτε αρχικά την απόκριση του συστήματος για βηματική είσοδο πλάτους A=1. Τι παρατηρείτε; Μεταβάλλετε το πλάτος της βηματικής σε A=2. Αποθηκεύστε τα δεδομένα [t,u,y] σε ένα txt αρχείο. Με βάση την συμπεριφορά που παρατηρήσατε, είναι το σύστημα γραμμικό;
3. Οδηγείστε το σύστημα με ένα ημίτονο $u(t)=2+A\sin\omega t$ όπου ω=1rad/sec και A=1. Αποθηκεύστε τα δεδομένα [t,u,y] σε ένα txt αρχείο, και σημειώστε τις παρατηρήσεις σας στην απόκριση του συστήματος.
4. Χρησιμοποιήστε το subvi που σας δώθηκε για να κάνετε εκτίμηση των καταστάσεων του συστήματος. Τοποθετήστε τους πόλους του παρατηρητή στο διάστημα [-1,-5]. Τι παρατηρείτε στην λειτουργία του παρατηρητή; Γιατί συμβαίνει αυτό; Τι θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν στην επιλογή των πόλων του παρατηρητή; Επιλέξτε κατάλληλους πόλους στον παρατηρήτη και εκτιμείστε την κατάσταση. Αποθηκεύστε τα δεδομένα [t,x_1,x_2] σε αρχείο.
5. Κατασκευάστε ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης, χρησιμοποιώντας τον παρατηρητή. Θέστε τους πόλους του παρατηρητή (-30,-40) και τους επιθυμητούς πόλους του συστήματος (-5,-6). Για είσοδο βηματική πλάτους A=2, αποθηκεύστε τα δεδομένα [t,r,y] σε ένα txt αρχείο. Συγκρίνετε την συμπεριφορά του συστήματος σε

σχέση με το αρχικό. Χωρίς την περαιτέρω αλλαγή των πόλων του συστήματος, πως μπορείτε να βελτιώσετε τον ελεγκτή;

6. Για σήμα αναφοράς το ημίτονο του ερωτήματος 3, αποθηκεύστε τα δεδομένα [t,r,y] σε ένα txt αρχείο. Συγκρίνετε την συμπεριφορά του συστήματος σε σχέση με το αρχικό. Πετυχαίνουμε καλύτερη παρακολούθηση του σήματος εισόδου σε σχέση με το αρχικό σύστημα; Πως μπορεί να εξηγηθεί αυτό θεωρητικά;