Ψηφιακός Έλεγχος

Μετάδοση Θορύβου Κβαντισμού

Δυαδική αριθμητική και μήκος λέξης

Ένας αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί απο C+1 bits που ονομάζονται λέξη . Το μήκος της λέξης είναι πάντα πεπερασμένο , για αυτό το λόγο δημιουργούνται λάθη τα οποία μπορούν να επηρεάσουν τη συμπεριφορά ενός ψηφιακού ελεγκτή.

C bits χρειάζονται για την τιμή του αριθμού και 1 bit για το πρόσημο.

Για παράδειγμα:

$$11.01 = 1\times 2^{1} + 1\times 2^{0} + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} = 2+1+0+0.25 = 3.25$$

Ανάλογα με τον τρόπο που αναπαριστούμε τους αρνητικού αριθμούς υπάρχουν τρεις τύποι αριθμητικής σταθερού σημείου:

α) αναπαράσταση μεγέθους – προσήμου. Σε αυτήν την περίπτωση το πρώτο bit δηλώνει το πρόσημο, 0 για θετικό και 1 για αρνητικό. Για παράδειγμα:

$$3.25 = 011.01$$

$$-3.25 = 111.01$$

Σημείωση: ο αριθμός 0 έχει δυο αναπαραστάσεις, 000.00 και 100.00

Δυαδική αριθμητική και μήκος λέξης

β) αναπαράσταση αντιστροφής 2. Οι θετικοί αριθμοί είναι όπως στην αναπαράσταση μεγέθους προσήμου. Ο αρνητικός ενός θετικού υπολογίζεται αντιστρέφοντας όλα τα bits και προσθέτοντας 1 στο λιγότερο σημαντικό bit. Για παράδειγμα:

$$-(111.01)=(000.10)+(000.01)=000.11$$

$$-(000.11)=(111.00)+(000.01)=111.01$$

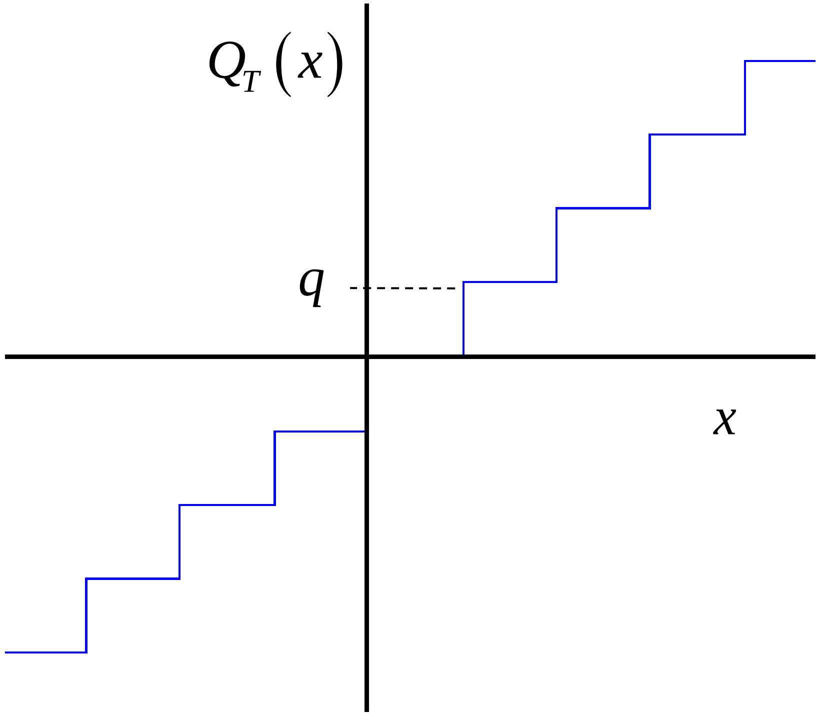
β) αναπαράσταση αντιστροφής 1. Οι θετικοί αριθμοί είναι όπως στην αναπαράσταση μεγέθους προσήμου. Οι αρνητικοί αριθμοί υπολογίζονται αντιστρέφοντας όλα τα bits του θετικού αριθμού. Π.χ.

$$-(111.01)=000.10$$

Δυαδική αριθμητική και μήκος λέξης

Αποκοπή

Στην αποκοπή όλα τα bits μικρότερα από το λιγότερο σημαντικό αγνοούνται. Η συνάρτηση της αποκομμένης τιμής x και του αποκομένου αριθμού Q(x) φαίνεται



Το σφάλμα αποκοπής ορίζεται ως

$$\varepsilon_T = Q_T(x) - x$$

$$q = 2^{-C}\,(L.S.B.)$$

Δυαδική αριθμητική και μήκος λέξης

Για την περίπτωση αναπαράστασης αντιστροφής 2 το σφάλμα αποκοπής είναι

$$-2^{-C} < \varepsilon_T < 0$$

Για την αναπαράσταση αντιστροφής 1 και την μεγέθους προσήμου :

$$0 < \varepsilon_T < 2^{-C} \qquad ,x < 0$$

$$-2^{-C} < \varepsilon_T < 0 \quad ,x > 0$$

Στρογγύλευση

Η στρογγύλευση ενός δυαδικού αριθμού γίνεται διαλέγοντας τον αριθμό με C bits που είναι πλησιέστερος της μη στρογγυλευμένης ποσότητας. Το σφάλμα στρογγύλευσης είναι ίδιο και στους τρεις τύπους αριθμητικής:

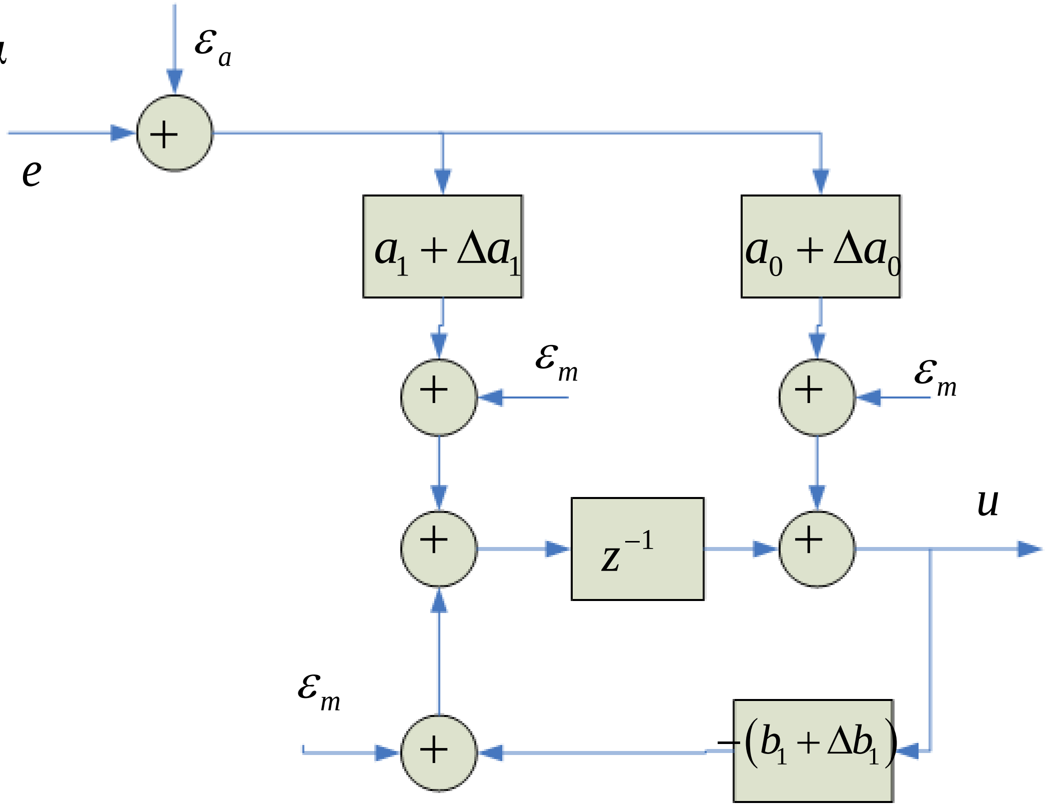
$$\varepsilon_\sigma = Q_\sigma(x) - x$$

$$\frac{-2^{-C}}{2} < \varepsilon_\sigma < \frac{2^{-C}}{2}$$

Σφάλματα

Τα σφάλματα προέρχονται από τρεις βασικές πηγές:

1. Σφάλματα σε A/D μετατροπείς
2. Σφάλματα αποκοπής ή στρογγύλευσης σε αριθμητικές πράξεις (πολλαπλασιασμός)
3. Σφάλματα σε παραμέτρους κα



Στο παρακάτω παράδειγμα ενός συστήματος πρώτης τάξης:

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

ε_a σφάλμα A/D

ε_m σφάλμα πολλαπλασιασμού

Σφάλματα

Παρατηρήσεις:

1. Τα γρήγορα μεταβαλλόμενα σφάλματα αποκοπής $(\varepsilon_a, \varepsilon_m)$ δημιουργούν θόρυβο στην έξοδο αλλά δεν επηρεάζουν την ευστάθεια.

2. Αλλαγές στους συντελεστές επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος και την ευστάθεια.

3. Η επιρροή του ε_a στην έξοδο δεν εξαρτάται απο τη δομή του συστήματος αλλά μόνο απο τη συνάρτηση μεταφοράς.

4. Η δημιουργία και μετάδοση σφαλμάτων πολλαπλασιασμού εξαρτάται από τη συγκεκριμένη υλοποίηση.

Σφάλματα

Υποθέσεις:

1. Η ακολουθία $\left\{e\left(kT\right)\right\}$ είναι μια στάσιμη τυχαία στοχαστική διαδικασία

2. Το σφάλμα e έχει ομοιόμορφα κατανεμημένη πυκνότητα πιθανότητας.

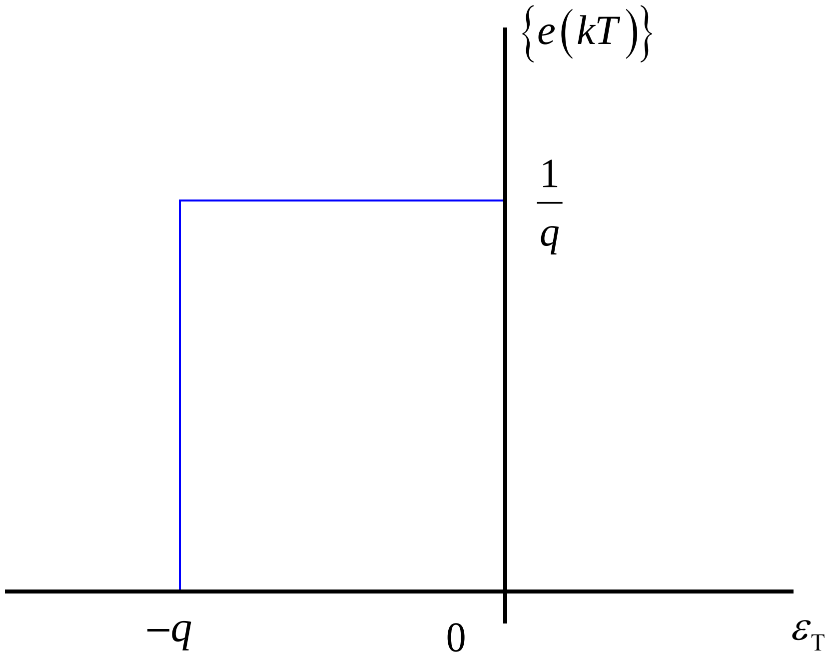
3. Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ διάφορων πηγών σφάλματος και σήματος εισόδου

$$E\left\{e\left(kT\right)x\left(kT\right)\right\}=E\left\{e\left(kT\right)\right\}E\left\{x\left(kT\right)\right\}$$

$$E\left\{e_a\left(kT\right)e_m\left(kT\right)\right\}=E\left\{e_a\left(kT\right)\right\}E\left\{e_m\left(kT\right)\right\}$$

Στατιστικά σφαλμάτων

Η πυκνότητα πιθανότητας για τα σφάλματα αποκοπής στην αριθμητική αντιστροφής 2 φαίνεται στο σχήμα:



μέση τιμή

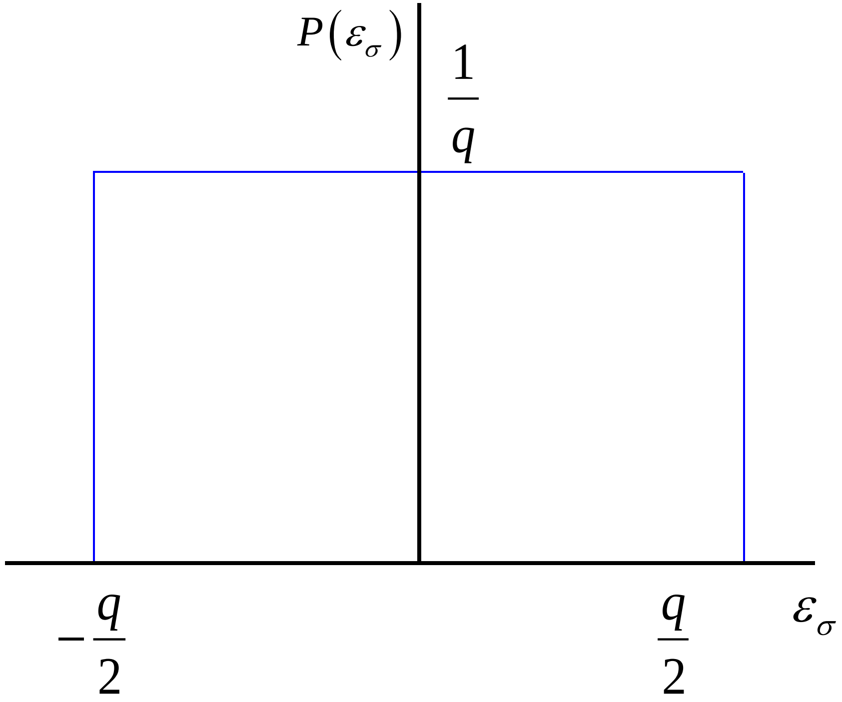
$$\bar{\varepsilon}_T = E\{\varepsilon_{T}\} = -\frac{q}{3}$$

διασπορά

$$\sigma^2_{\varepsilon_T} = E\{\varepsilon^2_{T}\} = \int_{-q}^{0} \frac{1}{q}\left(\varepsilon - \bar{\varepsilon}\right)^2 d\varepsilon = \frac{q^2}{12}$$

Στατιστικά σφαλμάτων

Η πυκνότητα πιθανότητας για τα σφάλματα στρογγύλευσης φαίνεται από το σχήμα



μέση τιμή

$$\bar{\varepsilon}_\sigma = E\{\varepsilon_\sigma\} = 0$$

διασπορά

$$\sigma^2_{\varepsilon_\sigma} = E\{\varepsilon^2{}_\sigma\} = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q}\varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{q}{12}$$

Μετάδοση σφάλματος

Η μετάδοση του θορύβου κβαντισμού εξαρτάται απο τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ του σημείου που δημιουργείται το σφάλμα και την έξοδο. Έτσι, έχοντας τη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου στην είσοδο θέλουμε να ξέρουμε την στατιστική συμπεριφορά του στην έξοδο, δηλαδή θέλουμε να εξετάσουμε αν ο αλγόριθμος ενισχύει ή αποσβένει το σφάλμα.

Για ένα ευσταθές γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (με κρουστική απόκριση hi) η μέση τιμή του σήματος εξόδου είναι

$$\bar{u} = E\{u_i\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k E\{\varepsilon_{i-k}\} = \bar{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} h_k$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς

$$u(z) = D(z)\bar{\varepsilon}(z)$$

Εφόσον η $\bar{\varepsilon}$ είναι σταθερή , χρησιμοποιώντας το θεώρημα τελικής τιμής

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \lim_{z \to 1} zD(z)$$

Μετάδοση σφάλματος

Παράδειγμα

Έχουμε $u(k) = bu(k-1) + e(k)$

Η κρουστική απόκριση είναι $h(k) = b^k$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης :

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} b^i = \frac{\bar{\varepsilon}}{1-b}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα τελικής τιμής έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$D(z) = \frac{z}{z-b}$$

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \lim_{z \to 1} z \frac{z}{z-b} = \frac{\bar{\varepsilon}}{1-b}$$

Μετάδοση σφάλματος

Για να υπολογίσουμε τη διασπορά

$$\sigma^2{}_u = E\left\{u^2{}_i\right\}, \quad \text{όπου } u_i = \sum_{k=0}^{i} h_k \varepsilon_{i-k}$$

$$\sigma^2{}_u = \sigma^2{}_\varepsilon \sum_{k=0}^{i} \left|h_k\right|^2$$

Έναλλακτικά, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Parseval

$$\sigma^2{}_u = \sigma^2{}_\varepsilon \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} D(z) D\left(z^{-1}\right) z^{-1} dz$$

Μετάδοση σφάλματος

Παράδειγμα

Έχουμε $u(k)=bu(k-1)+e(k)$ Η κρουστική απόκριση είναι $h(k)=b^k$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $D(z)=\dfrac{1}{1-bz^{-1}}$

Χρησιμοποιώντας τη συνέλιξη:

$$\sigma^2{}_u=\frac{q^2}{12}\sum_{k=0}^{\infty}b^{2k}=\frac{q^2}{12}\frac{1}{1-b^2}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval:

$$\sigma^2{}_u=\sigma^2{}_\varepsilon-\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\frac{1}{1-bz^{-1}}\frac{1}{1-bz}z^{-1}dz$$

υποθέτουμε |β|<1

έχουμε $\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z-b}\dfrac{1}{1-bz}dz=\operatorname{Re}s(b=z)=\dfrac{1}{1-bz}\Big|_{z=b}$

άρα $\sigma^2{}_u=\sigma^2{}_\varepsilon\dfrac{1}{1-b^2}$

Μετάδοση σφάλματος

Παρατήρηση:

Ο θόρυβος κβαντισμού μπορεί να ενισχυθεί με γρήγορη δειγματοληψία:

$$\frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{s+b} \longrightarrow \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \qquad \beta = e^{-bT}$$

η μετάδοση θορύβου είναι

$$\sigma^2{}_u = \sigma^2{}_\varepsilon \frac{1}{1-b^2}$$

Υποθέτοντας $b=1, \quad T<<1, \qquad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \;\; \beta \approx 1-bT$

έχουμε

T	β	$\frac{1}{1-\beta^2}$
0.1	0.9	5
0.01	0.990	50
0.001	0.999	500

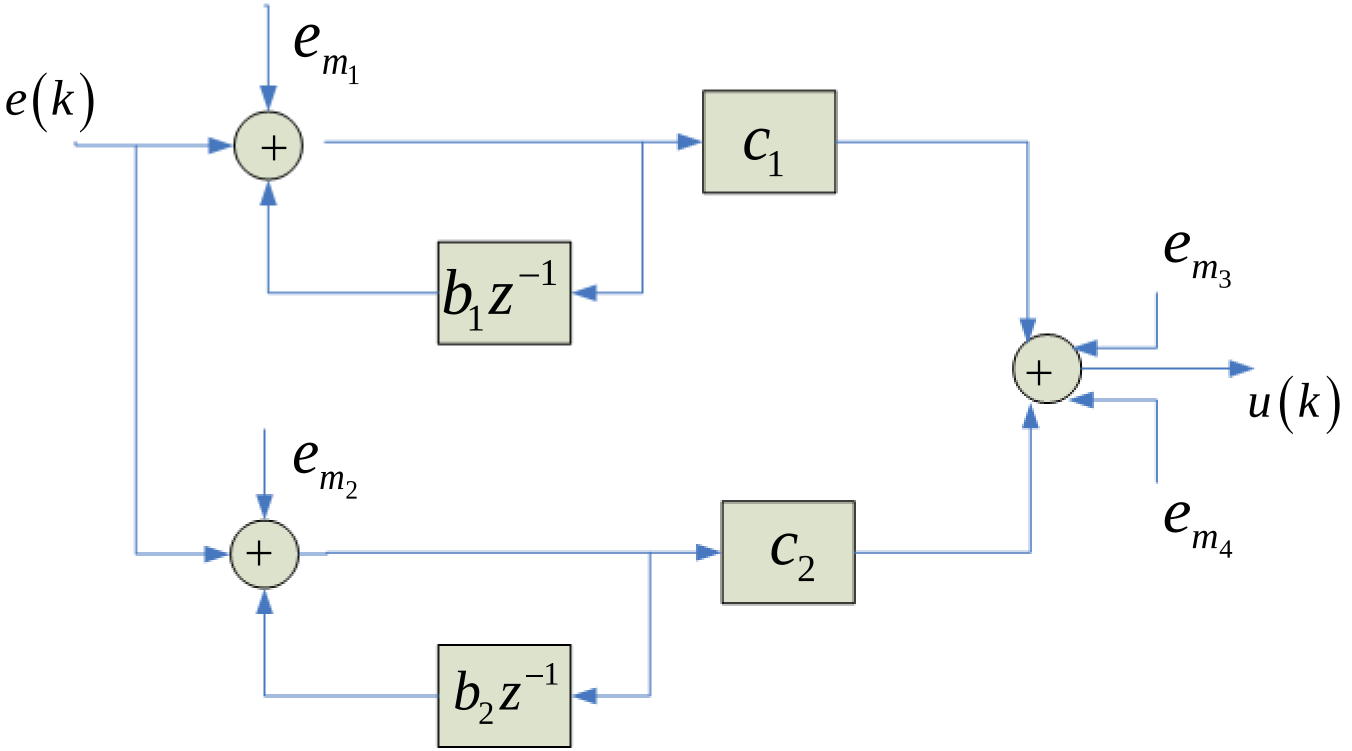
Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Η μετάδοση και ενίσχυση του θορύβου κβαντισμού εξαρτάται απο τον τρόπο υλοποίησης του ψηφιακού ελεγκτή (δομή του αλγορίθμου). Θα δούμε τα σφάλματα που παράγονται απο τους τρόπους υλοποίησης:

Παράλληλη υλοποίηση

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{c_1}{1-b_1 z^{-1}} + \frac{c_2}{1-b_2 z^{-1}}$$

1η περίπτωση:



Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Θα μελετήσουμε τον πολλαπλασιαστικό θόρυβο που δημιουργείται απο την αποκοπή των αριθμών σε καταχωρητές πεπερασμένου μήκους λέξεως.

Ο θόρυβος κβαντισμού στην αριθμητική αντιστροφής 2 έχει μέση τιμή $\bar{\varepsilon}_\pi = q/2$

και διασπορά $\sigma_\varepsilon{}^2 = q^2/12$

Η μετάδοση του $\bar{\varepsilon}_\pi$, $\bar{u}$ δίνεται απο $\bar{u} = \bar{\varepsilon}\lim_{z\to 1} zD(z)$

Αφού η μέση τιμή προστίθεται ως συνάρτηση, έχουμε συνολικά $\bar{u} = \bar{\varepsilon}_\pi z\sum_{k=1}^{4} D_k(z)$

όπου $D_i(z) = \dfrac{u(z)}{e_{m_i}(z)}, \qquad i = 1,2,3,4$

$$D_1(z) = \frac{c_1}{1-b_1 z^{-1}} \qquad D_2(z) = \frac{c_2}{1-b_2 z^{-1}}$$

$$D_3(z) = 1 \qquad D_4(z) = 1$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Τελικά, $$\bar{u} = \bar{\varepsilon}_\pi \left[\frac{c_1}{1-b_1} + \frac{c_2}{1-b_2} + 1 + 1 \right]$$

Για να υπολογίσουμε τη διασπορά, χρησιμοποιούμε τη σχέση

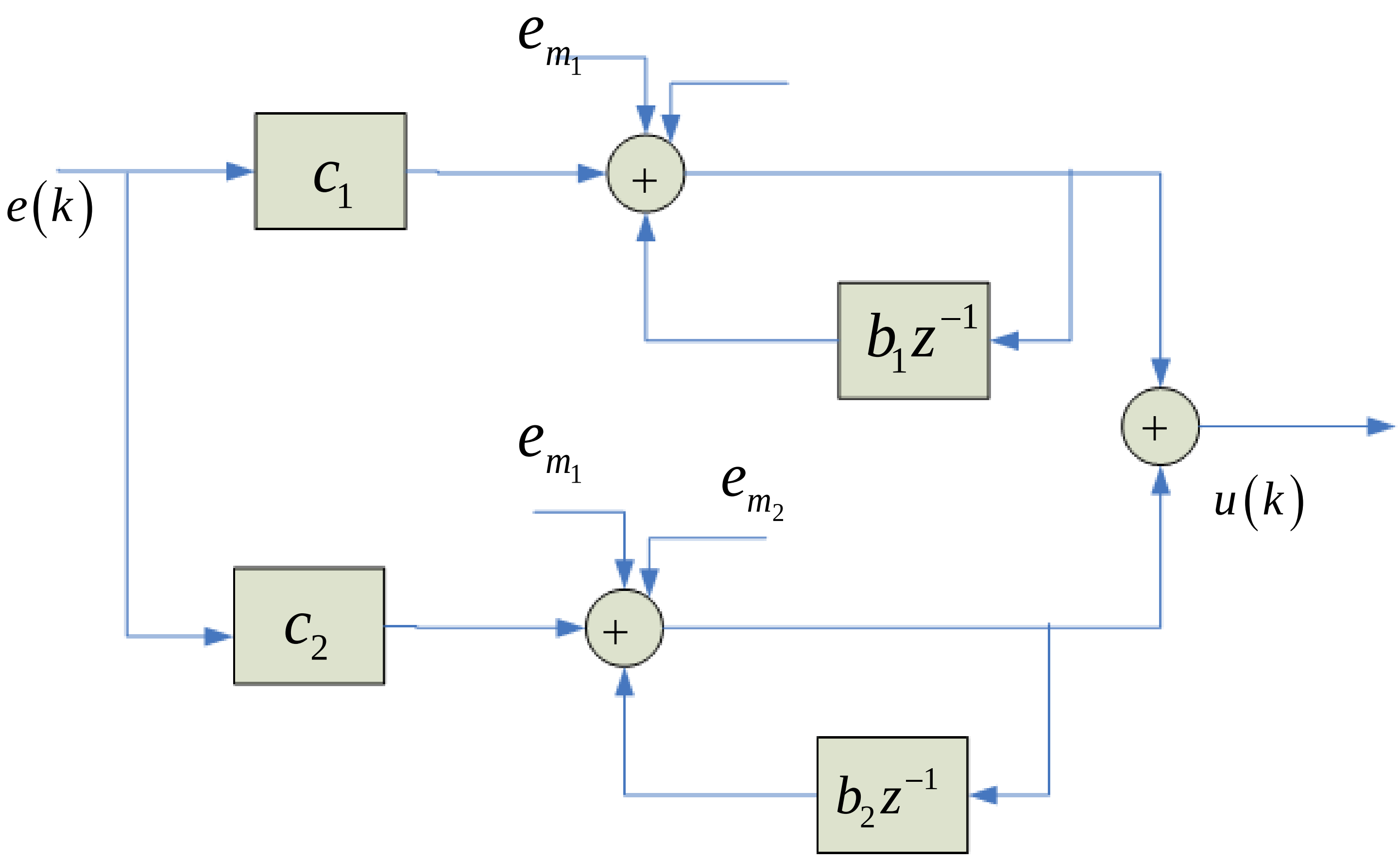
$$\sigma_u^{\;2} = \sigma_\varepsilon^{\;2} \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{4} \oint D_k\left(z\right) D_k\left(z^{-1}\right) z^{-1} dz$$

Επειδή και η διασπορά προστίθεται, έχουμε

$$\sigma_u^{\;2} = \frac{q^2}{12} \left(\frac{c_1^{\;2}}{1-b_1^2} + \frac{c_2^{\;2}}{1-b_2^2} + 2 \right)$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Παράλληλη υλοποίηση, 2η περίπτωση:



Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο $\bar{u} = \bar{\varepsilon} z \sum_{k=1}^{2} 2 D_k(z)$

όπου $D_1(z) = \dfrac{c_1}{1 - b_1 z^{-1}}$ $\quad D_2(z) = \dfrac{c_2}{1 - b_2 z^{-1}}$

έτσι $\bar{u} = 2\bar{\varepsilon}_\pi \left[\dfrac{1}{1-b_1} + \dfrac{1}{1-b_2} \right]$

Η διασπορά είναι $\sigma_u^{\,2} = \sigma_\varepsilon^{\,2} \dfrac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{2} 2 \oint D_k(z) D_k\left(z^{-1}\right) z^{-1} dz$

οπότε $\sigma_u^{\,2} = 2\sigma_\varepsilon^{\,2} \left(\dfrac{1}{1-b_1^2} + \dfrac{1}{1-b_2^2} \right)$

<u>Παρατήρηση:</u>

Για μεγαλύτερα c, η δεύτερη υλοποίηση δημιουργεί χαμηλότερο θόρυβο κβαντισμού

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Απευθείας υλοποίηση, πολλαπλασιαστικά σφάλματα

Για την απευθείας υλοποίηση, αλλάζουμε τη μορφή της συναρτησης μεταφοράς:

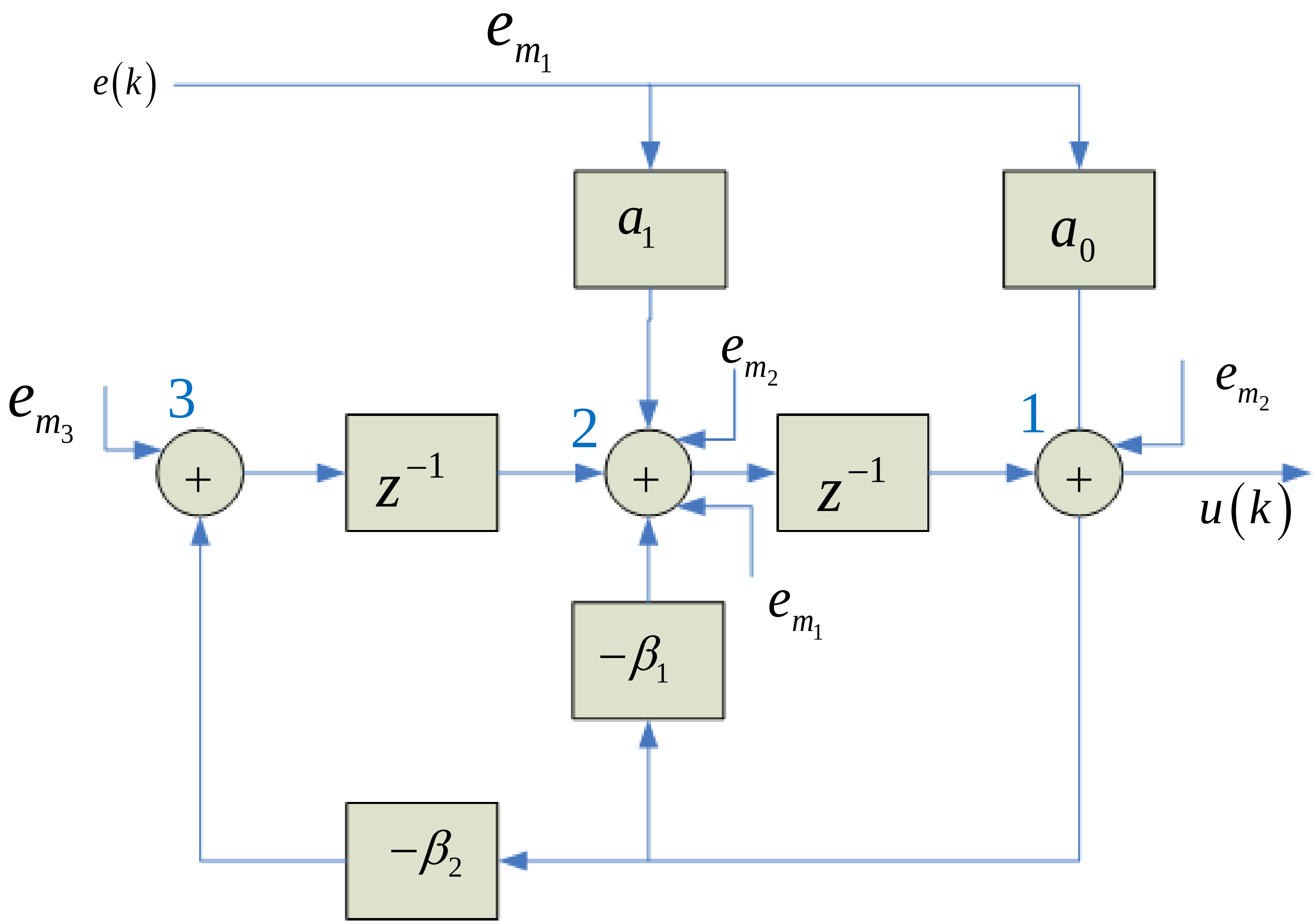
$$D(z) = \frac{c_1}{1-b_1 z^{-1}} + \frac{c_2}{1-b_2 z^{-1}} = \frac{(c_1+c_2)-(c_1 b_2 + c_2 b_1) z^{-1}}{1-(b_1+b_2) z^{-1} + b_1 b_2 z^{-2}}$$

ή $D(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1+\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}$ όπου

$$a_0 = c_1 + c_2$$
$$a_1 = -(c_1 b_2 + c_2 b_1)$$
$$\beta_1 = -(b_1 + b_2)$$
$$\beta_2 = b_1 b$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο πολλαπλασιαστικός θόρυβος δημιουργείται σε 3 κόμβους:



Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Η συνάρτηση μεταφοράς , η μέση τιμή και η διασπορά σε κάθε κόμβο είναι

κόμβος 1

$$\frac{u_1(z)}{\varepsilon_{\pi 1}(z)} = \frac{1}{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)} \qquad \bar{u}_1 = \bar{\varepsilon}_{\pi 1}\frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_{\pi 1}}^2 \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)}\left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^{\,2}} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2^{\,2}}\right]$$

κόμβος 2

$$\frac{u_2(z)}{\varepsilon_{\pi 2}(z)} = \frac{z^{-1}}{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}} = \frac{z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)} \qquad \bar{u}_2 = \bar{\varepsilon}_{\pi 2}\frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma_{u_2}^2 = \sigma_{\varepsilon_{\pi 2}}^2 \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)}\left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^{\,2}} - \frac{\beta_2}{1-\beta_2^{\,2}}\right]$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

κόμβος 3

$$\frac{u_3(z)}{\varepsilon_{\pi 3}(z)} = \frac{z^{-2}}{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}} = \frac{1}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)} \qquad \overline{u}_3 = \overline{\varepsilon}_{\pi 3}\frac{1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

$$\sigma_{u_3}^2 = \sigma_{\varepsilon_{\pi 3}}^2 \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)}\left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1{}^2}-\frac{\beta_2}{1-\beta_2{}^2}\right]$$

Η ολική μέση τιμή του u που δημιουργείται απο τους θορύβους λόγω αποκοπής έχουμε

$$\overline{u}_\pi = \overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 + \overline{u}_3 = \frac{4\overline{\varepsilon}_\pi}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Η ολική διασπορά είναι

$$\sigma_u^2 = \sigma_{\varepsilon_\pi}^2 \frac{4}{(\beta_1-\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)}\left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^{\,2}}-\frac{\beta_2}{1-\beta_2^{\,2}}\right]=$$

$$=4\sigma_{\varepsilon_\pi}^2 \frac{1+\beta_1\beta_2}{(1-\beta_1\beta_2)(1-\beta_1^{\,2})(1-\beta_2^{\,2})}\left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1^{\,2}}-\frac{\beta_2}{1-\beta_2^{\,2}}\right]$$

Συγκρίνοντας με το θόρυβο που προκύπτει απο την παράλληλη υλοποίηση έχουμε

$$\frac{\sigma_u^2(\pi\alpha\rho.)}{\sigma_u^2(\varepsilon\upsilon\theta.)} \approx \frac{(2-\beta_1^{\,2}-\beta_2^{\,2})(1-\beta_1\beta_2)}{(1+\beta_1\beta_2)}$$

Τρόπος υλοποίησης-σφάλματα

Παρατήρηση

Για μεγάλες τιμές της περιόδου δειγματοληψίας οι αριθμητικές τιμές των β1, β2 είναι πολύ κοντα στο 1. Έτσι από την προηγούμενη σχέση βλέπουμε ότι η παράλληλη υλοποίηση έχει μικρότερη ενίσχυση του θορύβου πολλαπλασιασμού.

Η σύγκριση της μέσης τιμής όπως μεταδίδεται μέσα απο την παράλληλη και την ευθεία υλοποίηση είναι:

$$\frac{\bar{u}\left(\pi\alpha\rho.\right)}{\bar{u}\left(\varepsilon\upsilon\theta.\right)} \approx \frac{\left(1-\beta_1\right)\left(1-\beta_2\right)}{2}$$

Σφάλματα στους συντελεστές

Λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης, οι συντελεστές του ελεγκτή μπορεί να είναι διαφορετικοί απο την αρχική υπολογισμένη τιμή τους. Η διαφορά αυτή δημιουργεί μεταβολές στις θέσεις των πόλων και των μηδενικών του ελεγκτή. Η ευαισθησία αυτή εξαρτάται απο τη συγκεκριμένη υλοποίηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$D(z) = \frac{N(z)}{1 + \sum_{k=1}^{n} b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{z^{-1}}{z_j}\right)}$$

b_k είναι οι συντελεστές του φίλτρου που προσδιορίζουν τους πόλους

z_j είναι οι πόλοι της *D(z)*

$N(z)$ προσδιορίζει τα μηδενικά

Σφάλματα στους συντελεστές

Η καινούρια θέση του πόλου zm συναρτήσει της μεταβολής των συντελεστών υπολογίζεται απο την παρακάτω σχέση:

$$\Delta z_m = \frac{z_m^{k+1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n}\left(1-\frac{z_m}{z_j}\right)}\Delta b_k \qquad \text{(Kaiser-Kuo)}$$

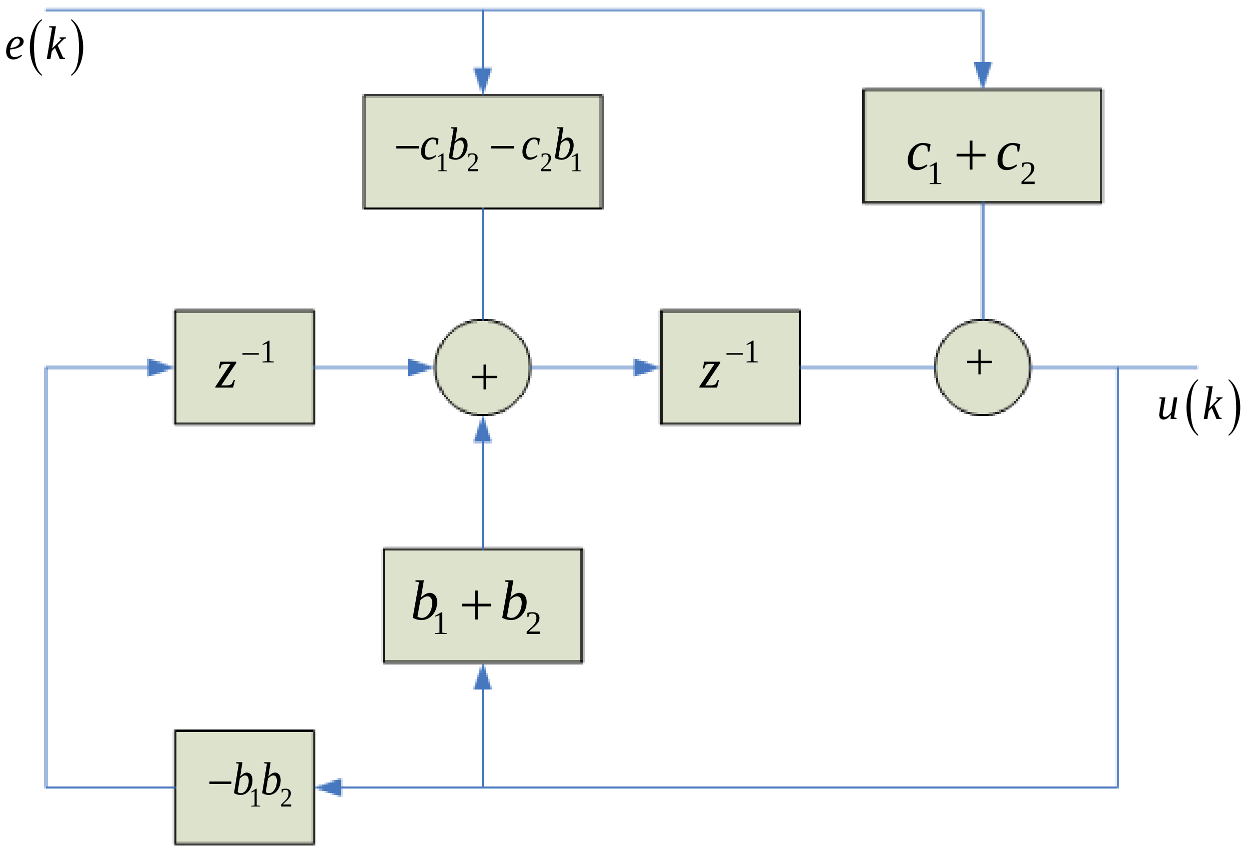
Δοθέντος ενός φίλτρου δεύτερης τάξης, υλοποιημένου παράλληλα θα συγκρίνουμε τρεις διαφορετικές υλοποιήσεις.

$$D(z) = \frac{c_1}{1-b_1 z^{-1}} + \frac{c_2}{1-b_2 z^{-1}} = \frac{c_1+c_2-\left(c_1 b_2 + c_2 b_1\right) z^{-1}}{1-\left(b_1+b_2\right) z^{-1} + b_1 b_2 z^{-2}}$$

Σφάλματα στους συντελεστές

α) ευθεία 1

$$u(k)=(b_1+b_2)u(k-1)-b_1b_2u(k-2)+(c_1+c_2)e(k)-(c_1b_2+c_2b_1)e(k-2)$$



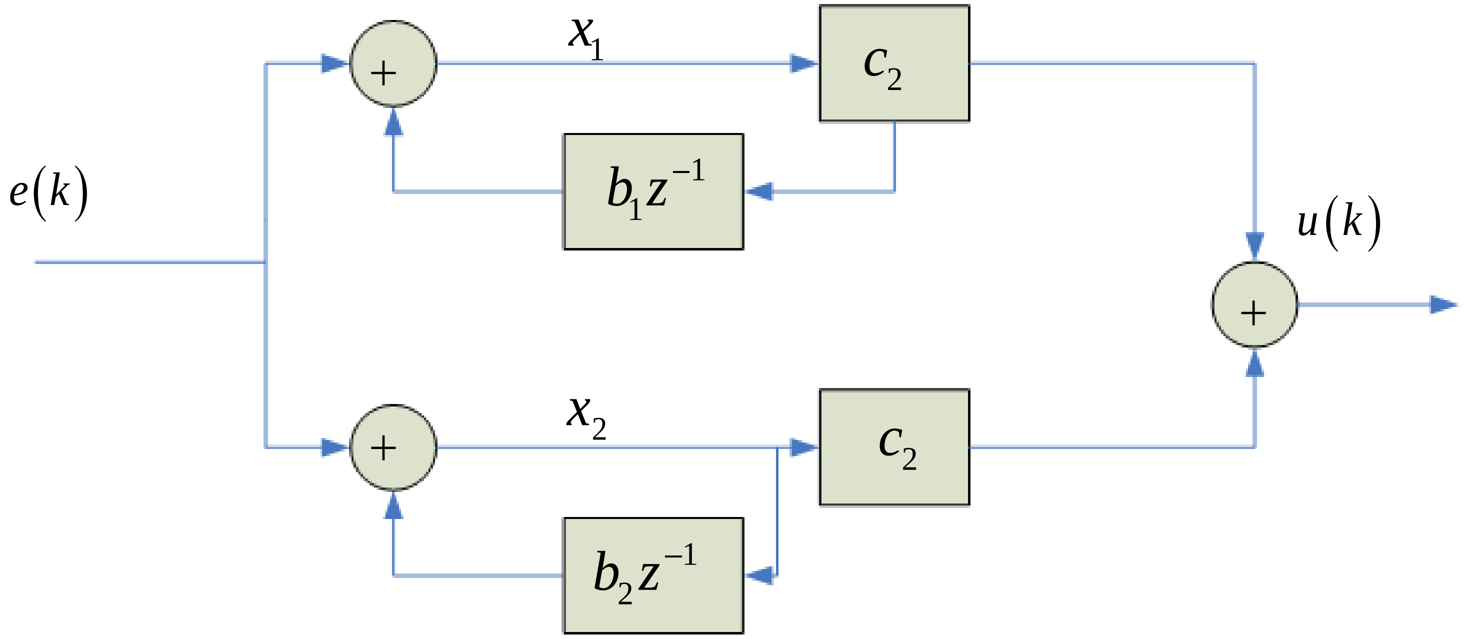
Σφάλματα στους συντελεστές

β) παράλληλη

$$x_1(k) = b_1 x_1(k-1) + e(k)$$

$$x_2(k) = b_2 x_2(k-1) + e(k)$$

$$u(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k)$$



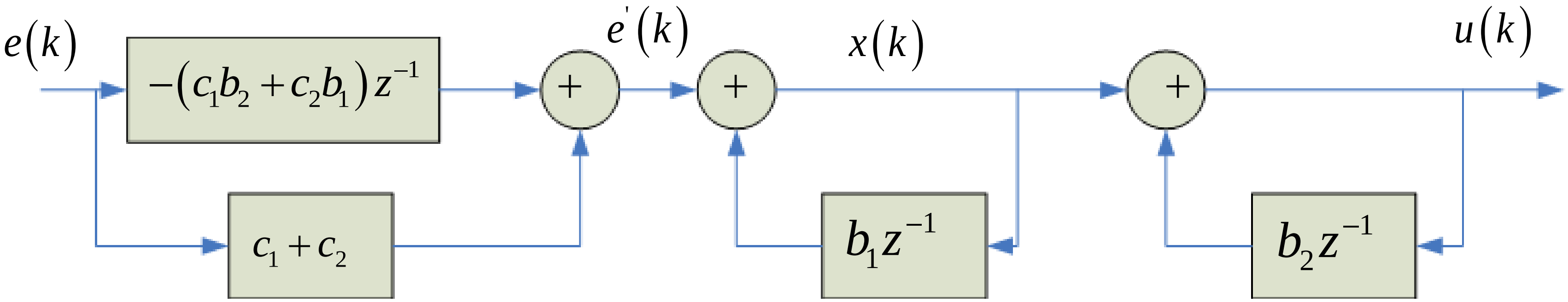
Σφάλματα στους συντελεστές

γ) εν σειρά

$$e'(k) = (c_1 + c_2)e(k) - (c_1 b_2 + c_2 b_1)e(k-1)$$

$$x(k) = b_1 x(k-1) + e'(k)$$

$$u(k) = b_2 u(k-1) + x(k)$$



Σφάλματα στους συντελεστές

Οι συντελεστές των πόλων στην εν σειρά και παράλληλη υλοποίηση βασίζονται στα b_1, b_2

Στην ευθεία υλοποίηση είναι $b_1 b_2, b_1 + b_2$

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση *P(z,λ)* όπου οι τιμές του λ είναι οι συντελεστές.
Μια μεταβολή λ+δλ συνεπάγεται αλλαγή θέσης των πόλων στα $z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \ldots$

$$P\left(z_j + \delta z_j, \lambda + \delta\lambda\right) = P\left(z_j, \lambda\right) + \frac{\partial P}{\partial z_j}\delta z + \frac{\partial P}{\partial \lambda}\delta\lambda$$

όμως $P\left(z_j + \delta z_j, \lambda + \delta\lambda\right), P\left(z_j, \lambda\right)$ είναι μηδέν λόγω ορισμού της χαρακτηριστικής εξίσωσης

έτσι $$\delta z_j = -\frac{\partial P / \partial \lambda}{\partial P / \partial z}\Big|_{z=z_j}$$

Σφάλματα στους συντελεστές

α) η ευθεία υλοποίηση δίνει $P = z^2 - (b_1 + b_2)z + b_1 b_2 = z^2 - \lambda_1 z + \lambda_2$

η μερική παραγώγιση δίνει $\dfrac{\partial P}{\partial \lambda_1} = -z \qquad \dfrac{\partial P}{\partial \lambda_2} = 1 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2z - \lambda_1$

Έτσι, $\dfrac{\partial z}{\partial \lambda_1} = \dfrac{-z}{2z - \lambda_1}\Big|_{z=b_1} = \dfrac{b_1}{2b_1 - (b_1 + b_2)} = \dfrac{b_1}{b_1 - b_2}$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = \frac{-1}{2z - \lambda_1}\Big|_{z=b_1} = \frac{-1}{b_1 - b_2}$$

Φαίνεται καθαρά ότι για πόλους που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους $(b_1 \approx b_2)$ η ευθεία υλοποίηση είναι πολύ ευαίσθητη σε μεταβολές των συντελεστών.

α) για την εν σειρά και παράλληλη υλοποίηση, οι συντελεστές που δημιουργούνται απο την υλοποίηση είναι οι ίδιοι οι πόλοι

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Ο μετατροπέας από αναλογικό σε ψηφιακό κβαντίζει το σήμα εισόδου. Το ψηφιακό μήκος λέξης C+1 του μετατροπέα προσδιορίζεται με δύο τρόπους,

α) δυναμική ζώνη του αναλογικού σήματος εισόδου

β) θόρυβος κβαντισμού του μετατροπέα

α) η δυναμική ζώνη προσδιορίζεται απο το λόγο της μέγιστης τιμής $e_{\max}$ του αναλογικού σήματος προς την ελάχιστη τιμή του, $e_{\min}$. Υποθέτοντας $e_{\max} = 1$ το επίπεδο κβαντισμού είναι $q = e_{\min}/e_{\max}$ όπου $q = 2^{-C}$, δηλαδή το λιγότερο σημαντικό ψηφίο

Λύνοντας ως προς C έχουμε

$$C = \log_2 \frac{e_{\max}}{e_{\min}}$$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

β) η επίδραση του θορύβου κβαντισμού του μετατροπέα, Η διασπορά για τα σφάλματα αποκοπής και στρογγύλευσης είναι

$$\sigma_a^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2C_a}}{12} \quad \text{(αποκοπή)}$$

$$\sigma_\sigma^2 = \frac{q}{12} = \frac{2^{-(C_\sigma+1)}}{12} \quad \text{(στρογγύλευση)}$$

Οι υπολογισμοί θα γίνουν για την αποκοπή (παρόμοιοι για την στρογγύλευση αν αντικαταστήσουμε $C_a = C_\sigma + 1$)

Υποθέτουμε ότι το αναλογικό σήμα είναι ένα στοχαστικό Gaussian σήμα με μέση τιμή 0.5 και πλάτος 1.

Η διασπορά του είναι $\sigma^2 = \frac{1}{9}$

Ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι $$\frac{\sigma^2}{\sigma_a^2} = \frac{1/9}{1/12\left(2^{-2C_a}\right)} = \frac{2^{2C_a}}{12}$$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Μετατρέποντας σε dB έχουμε $F(dB) = 10\log_{10}\frac{\sigma^2}{\sigma_a^2} = 10\log_{10}\frac{2^{2C_a}}{12}$

$$F(dB) = 20C_a \log_{10} 2 - 10\log_{10} 12$$

Λύνοντας ως προς C : $C_a = \frac{F + 10\log_{10} 12}{20\log_{10} 2} = \frac{F}{6} + 0.8$

Το μήκος λέξης του μετατροπέα προσδιορίζεται απο τη μέγιστη τιμή του e:

$$C_a \geq \max\left\{\left(1 + \log_2 \frac{e_{\max}}{e_{\min}}\right), \left(\frac{F(dB)}{6} + 0.8\right)\right\}$$

Παράδειγμα:

Το σήμα εισόδου έχει λόγο κορεσμού προς κατώφλι 250 (που αντιστοιχεί σε διακριτότητα 0.4%). Ο απαιτούμενος λόγος σήματος προς θόρυβο είναι 40dB. Οι τιμές αυτές δίνουν

$$C_a \geq \max\{(1+9), (7.47)\}$$

$$C_a \geq 9 bits$$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Μήκος λέξης αριθμητική μονάδας

Ο θόρυβος κβαντισμού που δημιουργείται απο το μετατροπέα ενισχύεται στην αριθμητική μονάδα. Ο λόγος θορύβου κβαντισμού στην είσοδο $\bar{\varepsilon}^2$ και στην έξοδο σ_u^2 είναι

$$K_m = \frac{\sigma_u^2}{\bar{\varepsilon}^2} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} D(z) D\left(z^{-1}\right) z^{-1} dz$$

D(z) συνάρτηση μεταφοράς

και $\bar{\varepsilon}^2$

$$\bar{\varepsilon}_\sigma^2 = \frac{2^{-2C_a}}{12} \quad \text{(στρογγύλευση)}$$

$$\bar{\varepsilon}_\sigma^2 = \frac{2^{-2\left(C_\sigma+1\right)}}{12} \quad \text{(αποκοπή)}$$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Υποθέτοντας ότι το επεξεργαζόμενο σήμα είναι Gaussian με μέγιστο πλάτος 1, ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι

$$F\left(dB\right)=10\log_{10}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\sigma_u^2}=10\log_{10}\frac{1/9}{\left[2^{-2C_a}\right]K_m/12}$$

Λύνοντας ως προς C έχουμε

$$C_a \geq \frac{F\left(dB\right)}{6}+0.8+\frac{10}{6}\log_{10}K_m$$

Παράδειγμα:

Έστω $D\left(z\right)=\dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$ Θέλουμε F=40dB

Έχουμε $K_m=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} D\left(z\right)D\left(z^{-1}\right)z^{-1}dz=\dfrac{1}{1-\left(0.9\right)^2}=5.26$

Έτσι $C_a \geq 6.7+0.8+1.2=8.7$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Μήκος λέξης μνήμης

Θα υπολογίσουμε την επίδραση του μήκους λέξης των συντελεστών στη θέση των πόλων. Η μέγιστη επιτρεπόμενη αλλαγή θέσης ενός πόλου *P* στο s-επίπεδο είναι ΔP. Η αντίστοιχη αλλαγή θέσης στο z-επίπεδο είναι

$$\Delta z = e^{-(P+\Delta P)T} - e^{-(P-\Delta P)T} = 2e^{-PT}\sinh(\Delta PT)$$

Για *Δz* ίσο με το ελάχιστο σημαντικό ψηφίο $\left(\Delta z = 2^{-C}\right)$

έχουμε $2^{-C} = 2e^{-PT}\sinh(\Delta PT)$ ή $C = -\log_2 PTe^{-PT} - \log_2 \frac{2\Delta P}{P}$

Παράδειγμα:

Για θέση πόλου στο P=1.5 rad/sec περίοδο δειγματοληψίας T=4msec και 1% μέγιστη ευαισθησία πόλου, έχουμε

$$C \ge 7.4 + 5.6$$

$$C \ge 13 bits$$

$$C + 1 \ge 14 bits$$

Μήκος λέξης και A/D μετατροπείς

Μήκος λέξης μετατροπέα απο ψηφιακό σε αναλογικό

Η συνάρτηση μεταφοράς του μηδενικού ανακατασκευαστή χαρακτηρίζεται απο

$$\left|H_{ZOH}(f)\right| = \frac{\left|\sin\dfrac{f}{f_s}\right|}{\dfrac{f}{f_s}} \qquad \text{όπου} \qquad f_s = \frac{1}{T_s}$$

Και μια καθυστέρηση φάσης $\phi_{ZOH}(f) = \dfrac{180^0 f}{f_s}$

Για κάποιο σήμα χαμηλής συχνότητας το κέρδος είναι σχεδόν μονάδα . Αντιθέτως, η καθυστέρσησ φάσης μπορεί να είναι σημαντκή. Το μήκος λέξης προσδιορίζεται απο τη δυναμική ζώνη του αναλογικού αισθητήρα,

$C = \log_2 \dfrac{u_{sat}}{u_{th}}$ όπου u_{sat} είναι η μέγιστη τιμή αυτού του αισθητήρα