ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- "Έμμεσες" Τεχνικές : σχεδιάζεται ο ελεγκτής $D(s)$ (π.χ. Laplace) στο συνεχές $D(s) \rightsquigarrow D(z)$ (μετασχ. το σύστημα συνεχ. χρόνου $D(s) \rightsquigarrow$ διακριτού χρ. $D(z)$)

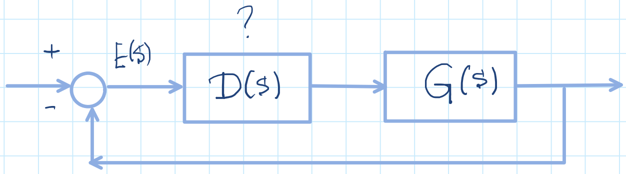
  ↓

  "μετασχ. αναλογικών φίλτρων σε ψηφιακά"

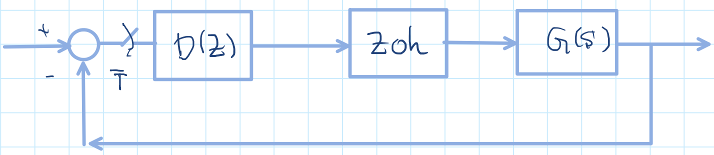
  ⇝ "σύστημα δειγματοληπτικών δεδομένων με $D(z)$"

- "Άμεσες" Τεχνικές : συστ. δειγματοληπτικών δεδομένων $G(z)$ ...
  σχεδιάζεται ο κατάλληλος $\underline{D(z)}$ ...

ΕΜΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ



Σκοπός : να μετασχ. $D(s) \rightsquigarrow D(z)$:



Συστήματα ισοδύναμα !

Βήμα 1 : Έλεγχος συμπεριφοράς του συστ. συνεχούς χρόνου όταν έχω -zoh-

"zoh" ⇝ καθυστέρηση $(\ldots e^{-sT})$

προσέγγιση : $$\frac{1-e^{-sT}}{s} \simeq \frac{T}{\underbrace{1+\frac{sT}{2!}}+\frac{s^2T^2}{3!}+\cdots} \approx \frac{T}{1+\frac{sT}{2}}$$

⇝ αν η καθυστέρηση = αμελητέα ⇒ ...

⇝ —"— = σημαντική ⇒ πίσω στο σύστημα συνεχούς χρόνου κ επανασχεδιάζω $D(s)$

Βήμα 2 : Μετασχημ. $D(s) \rightarrow D(z)$

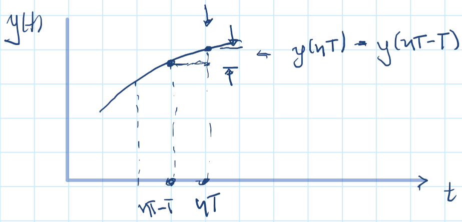
Βήμα 3 : Επαλήθευση ικανοποίησης προδιαγραφών ?

Βήμα 4 : Υλοποίηση του ψηφ. ελεγκτή $D(z) \rightsquigarrow$ ψηφιακό αλγόριθμο

ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

- τεχνικές : αριθμητικές λύσεις σε διαφορικές - ολοκληρωτικές
  - προσέγγιση (αριθμητικά) παραγώγων - ολοκληρωμάτων

□ "Παραγώγιση" ~ "Οπισθεν διαφορά" + "Εμπροσθεν Διαφορά"



$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t+T)-y(t)}{T}$$

ΜL

$\Rightarrow \quad sY(s) = \frac{Y(s) - e^{-sT}Y(s) + y(0)}{T}$

$y(0) <<$ μικρό $\quad \Rightarrow \quad s = \frac{1-e^{-sT}}{T} \Rightarrow$

$$\boxed{s = \frac{1-z^{-1}}{T}, \quad z = \frac{1}{1-sT}}$$

$$\boxed{s = \frac{z-1}{T}, \quad z = \cdots}$$

π.χ. (όπισθεν διαφορά) : $D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$

$$\downarrow$$

$\frac{s}{s+a} \rightarrow \cdots\cdots$

Ιδιότητα των Μετασχηματισμών

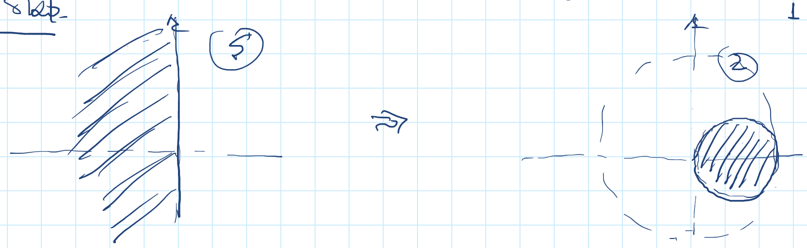
□ απλοί πράξεις

□ ευσταθές $D(s)$ → μετασχηματίζεται σε ευσταθές $D(z)$ (όπισθεν διαφορά)

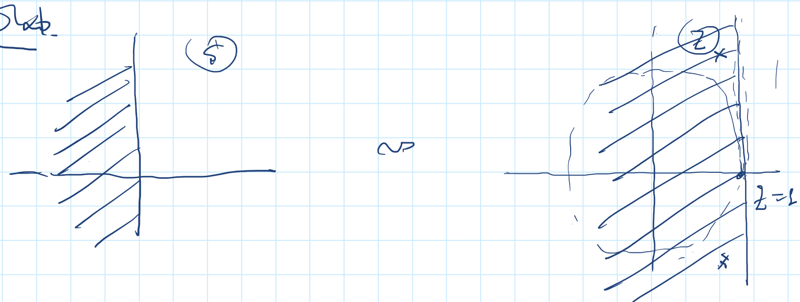
$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad \cdots \quad s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1}{1-j\omega T} = \cdots\cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\theta}$

$(\theta = \tan^{-1}(\omega T))$

όπισθεν διαφ.



Έμπροσθεν διαφ.



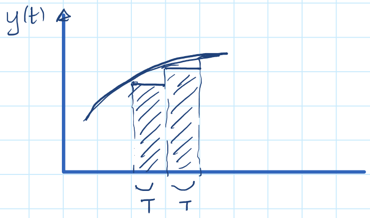
ευσταθή $D(s)$ → ασταθή $D(z)$ (Έμπροσθεν διαφ.)

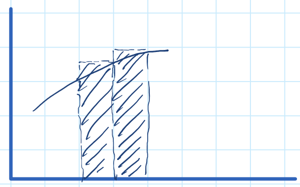
ακριβή $D(s) \rightarrow$ -//- $D(z)$

□ Δεν διατηρούν αμετάβλητη την κρουστική απόκριση, ούτε την απόκριση συχνότητας

$$D(z) \neq \mathcal{Z}\{D(s)\}$$

- "Ολοκλήρωση" Αριστερόπλευρος κανόνας Δεξιόπλευρος κανόνας





$$y(t) = \int_0^t x(t)\,dt \quad , \quad t = nT$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(t)\,dt$$

$$y(nT) = T \sum_{i}^{n-1} x(iT)$$

$$y(nT+T) = T \sum_{i}^{n} x(iT) = T \sum_{i}^{n-1} x(iT) + T\,x(nT)$$

$$\longrightarrow \quad y(nT+T) = y(nT) + T\,x(nT)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1} \quad \ldots$$ "έμπροσθεν διαφορά" "όπισθεν διαφορά"

Τραπεζοειδής κανόνας :

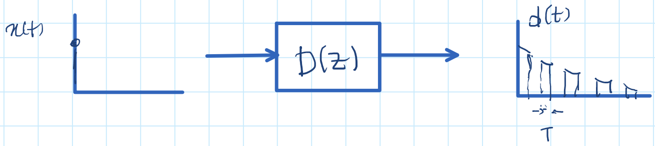
$$y(nT) = T/2 \sum_{i=0}^{n-1} [x(iT) + x(iT+T)]$$

$$\boxed{\frac{1}{s} \cong \frac{T}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \sim \text{διγραμμικός μετασχηματισμός}}$$

□ δεν διατηρεί την κρουστική απόκριση, ούτε την απόκριση συχνότητας

Κρουστική Αμεταβλητότητας (Μετ. Z)

(συνεχούς χρόνου)



(διακριτού χρόνου)

$$g(nT) \equiv d(nT)$$

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d(nT)\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\,z^{-n} = G(z) \equiv \mathcal{Z}\{G(s)\}$$

□ διατηρεί την κρουστική απόκριση,

□ δεν διατηρεί την απόκριση συχνότητας

Βηματική Αμεταβλητότητα

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) D(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} G(s)\right]\Big|_{t=kT} \Rightarrow \boxed{D(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

("Σ.Μ. + zoh")

□ δεν διατηρεί την κρουστική αποκρ. ούτε την απόκριση συχνότητας

- Διγραμμικός Μετασχ. με Αναδίπλωση Συχνότητας (frequency prewarping)

$$D(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightsquigarrow D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

- δεν διατηρεί την απόκριση συχνότητας

Ερώτημα: Ποιά είναι η απόκριση της D(z) σε σχέση με την απόκριση συχν. της D(s) ;

($\underline{\Omega}$ ~ συχν. συστήματα συνεχούς χρόνου
ω ~ -"- διακριτού χρόνου)

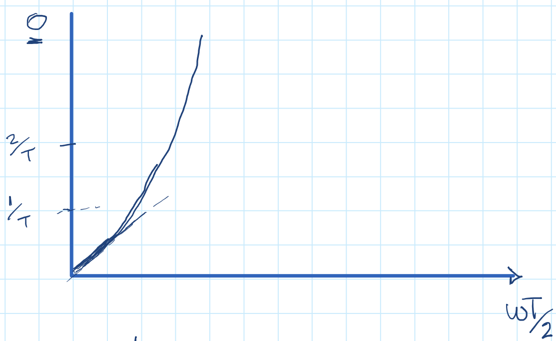
- Να συγκρίνουμε την $D(j\underline{\Omega})$ με την $D(e^{j\omega T})$

(αντικατάσταση: $s = j\underline{\Omega}$
$z = e^{j\omega T}$)

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow j\underline{\Omega} = \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{+j\omega T}} \Rightarrow \text{(de Moivre)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\Omega} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}}$$

□ ο διγραμμ. μετασχ. παραμορφώνει την απόκριση συχνότητας



ωT<< μικρό ⇒

$$\tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\Omega} \approx \omega}$$

$|D(s)|\big| = |D(z)|\big|$ ...

$\omega T/2$

$$|D(s)|\Big|_{s=j\Omega} = |D(z)|\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

πλάτος $D(s)/\Omega$ — πλάτος $D(z)/\omega$

Άρα, η παραμόρφωση της συχνότητας όταν $\frac{\omega T}{2}$ δεν είναι πολύ μικρό, πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη (στον σχεδιασμό του ελεγκτή)

Επανασχεδιασμός Ελεγκτή:

– Αναλογικός Αντισταθμιστής (σαν φίλτρο) ⇝ σημεία αποκοπής (να μην έχουμε παραμόρφωση συχνότητας)

↓ να πάρουν νέες τιμές

Βήμα 1: ∀ πόλο/μηδενικό $s+\alpha$: αντικαθιστώ α με $\alpha' = \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}$

$$s+\alpha \rightsquigarrow s+\alpha' \Big|_{\alpha' = \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}$$

Βήμα 2: Μετασχηματίζω $D(s,\alpha') \rightsquigarrow D(z,\alpha)$

$$D(z,\alpha) = D(s,\alpha')\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

"scaling" συχνότητας

"scaling" πλάτους : για dc κέρδος $=1$

(Θ. τελικής τιμής)

- χαμηλές συχνότητες : $z=1$ $\left(\lim_{z\to 1}(\ )\right)$
- υψηλές —"— : $z=-1$ $\left(\lim_{z\to -1}(\ )\right)$

$$\left(\begin{array}{l} t\to+\infty,\ \omega\to 0,\ \Rightarrow z=1 \\ t\to 0,\ \omega\to\infty \Rightarrow z=-1 \end{array}\right)$$

Παράδειγμα: $D(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha}$

Βήμα 1: $D(s,\alpha') = \dfrac{\alpha}{s+\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}$

Βήμα 2: αντικαθιστώ: $\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:

$$D(z) = D(s)\Big|_{s=\dots} = K\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}} = \dots$$

Για το K: θεωρούμε $D_{ss} = 1$

$$\lim_{t\to+\infty} D(z)\cdot\frac{1}{z-1} = \lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{1}{(z-1)}\right\} K\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\frac{\cdots}{\cdots}+\cdots} = K\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}{\alpha}}$$

Άρα, $$\boxed{D(z) = \frac{\tan\frac{\alpha T}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{\alpha T}{2}}}$$

- ευσταθές $D(s) \Rightarrow$ ευσταθές $D(z)$
- όχι αναδίπλωση (παραμόρφωση απόκριση συχνότητας)
- διατηρεί την απόκριση συχνότητας στα σημεία αποκοπής
- δεν διατηρεί την κρουστική απόκριση

Ταυτόσημος Μ.Ζ. (matched Z-transform)

"ταυτοποίηση πόλων/μηδενικών" $D(s) \rightsquigarrow D(z)$

$$\left(s_1 \longrightarrow z_1 = e^{s_1 T} \; ? \quad \equiv \text{απόκριση με την } s_1 \right)$$

$$\boxed{D(z) \stackrel{\Delta}{=} D(s)\Big|_{s+\alpha = (1 - z^{-1}e^{-\alpha T})}}$$

$$\begin{cases} s+\alpha \rightsquigarrow 1 - z^{-1}e^{-\alpha T} \\ s+\alpha \pm jb \rightsquigarrow 1 - 2z^{-1}e^{-\alpha T}\cos bT + e^{-2\alpha T}z^{-2} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις: - τοποθετεί τους πόλους όπως ο Μ.Ζ. ($\equiv$ κρουστική αμετάβλητα με ΖΟΗ)
τα μηδενικά μετασχηματίζονται σε άλλες θέσεις

- κέρδος χρειάζεται scaling
- $D(s) =$ γινόμενο παραγόντων

Παράδειγμα: $D(s) = \frac{s}{s+\alpha}$

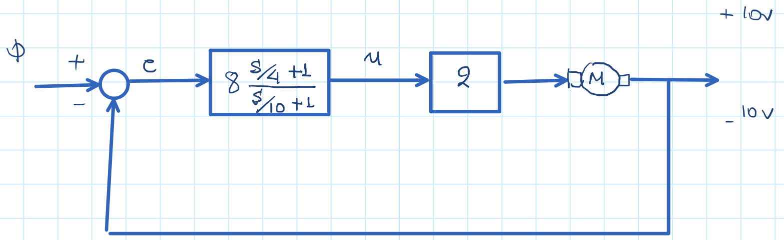
$D(z) = K' \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-\alpha T}}$ (υψηλο-διαβατό φίλτρο) $\Rightarrow z = -1$

άρα $\lim_{z \to -1} D(z) = K' \text{\_\_\_\_\_\_} = 1 \Rightarrow \boxed{K' = \frac{1-e^{-\alpha T}}{2}}$

Άρα, $\boxed{D(z) = \frac{1-e^{-\alpha T}}{2} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-\alpha T}}}$

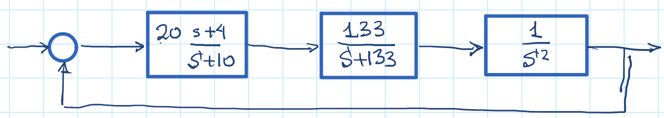
- □ στα μηδενικά παρατηρείται αναδίπλωση συχνότητας
- □ μία Σ.Μ. χωρίς μηδενικά θα περιγράφει σωστά το αναλογικό φίλτρο

Σχεδιαστικό Παράδειγμα:



- προσέγγιση καθυστέρησης zoh: $T = 0,015$ sec

$$\frac{1-e^{-sT}}{s} \simeq K \frac{2}{s+\frac{2}{T}} = \frac{133}{s+133}$$



Γ.Τ.Ρ.

$s = -133 \Rightarrow$ ο zoh δεν επηρεάζει την δυναμική κλειστού βρ. (τιμή T)

- $D(s) = \frac{s/\alpha + 1}{s/b + 1}$, $\alpha = 4$, $b = 10$

Ταίριασμα Μ.Ζ. $\Rightarrow D(z) = K \frac{z - e^{-\alpha T}}{z - e^{-bT}}$, $e^{-\alpha T} = e^{-4 \times 0.015} = 0,94$

$e^{-bT} = e^{-10 \times 0.015} = 0,86$

Άρα, $D(z) = K \frac{z - 0,94}{z - 0,86}$

(χαμηλές συχν.) : $K = \lim_{s \to 0} D(s) \,/\, \lim_{z \to 1} D(z) \Rightarrow$

$$K = 8 \, \frac{1-0.86}{1-0.94} \Rightarrow K \simeq 19{,}1$$

Τέλος, $\boxed{D(z) = 19{,}1 \, \frac{z-0{,}94}{z-0{,}86}}$