ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ευστάθεια BIBS, BIBO

BIBS : όταν $\|u(k)\| \le N \left(\equiv \left(\sum_{i=1}^{?} u_i^2(k)\right)^{1/2}\right)$, $\forall\ k$

πρέπει $\|x(k)\| \le M$, $\forall\ k$

BIBO : $\|u(k)\| \le N \Rightarrow \|y(k)\| \le M$, $\forall\ k$

Ασυμπτωτική Ευστάθεια : (έννοια) $\forall\ u(k)$, $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$

$\left(\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x_e\| = 0\right)$

(Σύστημα Δειγματοληπτ. Δεδομένων)

$G(s) \leadsto G^*(s)$: ευστάθεια $\Longleftrightarrow$ $s \in \mathbb{C}^-$ ($\equiv$ συστ. συνεχούς χρόνου)

Με την αντικατάσταση : $z = e^{sT}$ → $(s = \sigma + j\omega)$

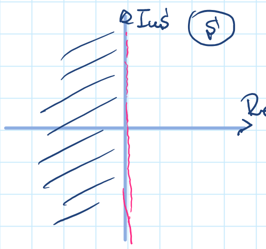
$$\Rightarrow z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| \angle z$$

$$\boxed{\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T} \\ \angle z &= \omega T \end{aligned}}$$

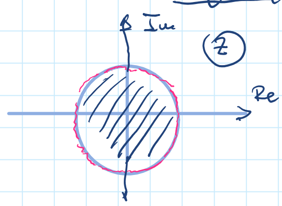
Ευστάθεια $\Rightarrow \sigma < 0 \Longleftrightarrow \boxed{|z| < 1}$ ⇒ περιοχή ευστάθειας ≡ μοναδιαίος κύκλος

- **Οριακή Ευστάθεια** ($s \in j\omega$-άξονα)

$\sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1$ ⇒ <u>περιφέρεια</u> μοναδιαίου κύκλου

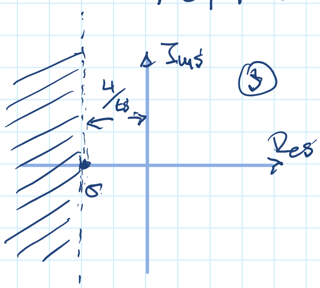


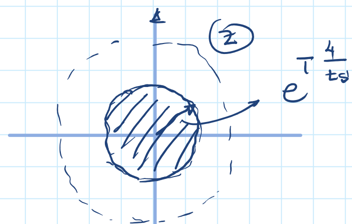
$\leadsto$



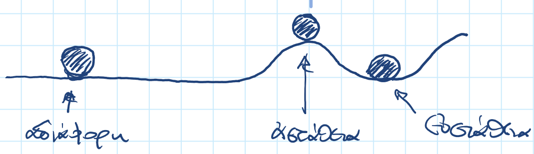
Π.χ. Για μέγιστο χρόνο αποκατάστασης

$$|\sigma_i| \ge \frac{4}{t_s} \leadsto |z_i| \le e^{T\frac{4}{t_s}}$$





Ευστάθεια Lyapunov :



Σ.Ι. x_e : $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$

x_e : $f(x_e, 0, k) = 0$

Ευστάθεια Lyapunov : αν δοθέντος $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon, k_0) > 0$:

αν $\|x(k_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(k) - x_e\| < \varepsilon$, $\forall\ k \geq k_0$

Ασυμπτωτική Ευστάθεια Lyapunov : x_e: α) ευσταθές / Lyapunov

β) $\forall\ k_0$, $x(k_0)$:

$\|x(k_0) - x_e\| \leq \delta(k_0) \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \|\Phi(x(k_0)) - x_e\| = 0$

$\hookrightarrow x(k)$

Γ.Χ.Α : $x(k+1) = A\,x(k)$

$\rightsquigarrow \Phi(k) = A^k$ με ιδιοτιμές λ_i^k (Γραμμ. Άλγεβρα)

$\Rightarrow$ ασυμπτ. ευστάθεια $\lim_{k\to+\infty} \|\Phi(k)\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$ ( )

$\Rightarrow \boxed{|\lambda_i| < 1}$

π.χ. (Όλες οι ιδιοτιμές επάνω στον μοναδιαίο κύκλο πρέπει να είναι απλές)

$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(k)$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

διπλός πόλος στο +1 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$

$\lambda(\lambda-2)+1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

έξοδος : $y(k) = (1\ \ 0)\,x(k) \rightsquigarrow y(k)$ μη - φραγμένη

αν $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (\equiv A\,x(0)) \Rightarrow x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(0) = (1\ \ 0)\,x(0) = 1$

$y(1) = 0$

$y(2) = -1$ $\Rightarrow y \rightsquigarrow -\infty$ $\Rightarrow$ σύστημα ασταθές

$y(3) = -2$

⋮

Παρατήρηση : για $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y(\infty)$ είναι φραγμένο

Παρατήρηση : Για να είναι ευσταθές πρέπει να είναι και BIBO και ευσταθές/Lyapunov

π.χ. $x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2{,}5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$

$y(k) = (-1\ \ 0{,}5)\,x(k) + u(k)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2,5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 0,5$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (\rightsquigarrow \neq \text{ευσταθές/εσωτερικά})$$

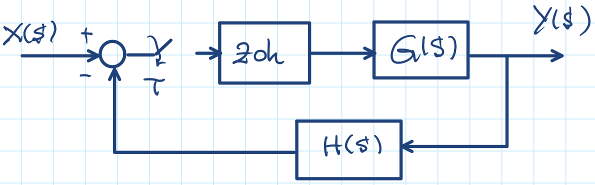
$$G(z) = 1 + \frac{0,5z-1}{z^2-2,5z+1} = \dots = \frac{z^2-2z}{z^2-2,5z+1} = \frac{z(z-2)}{(z-0,5)(z-2)} = \frac{z}{z-0,5}$$

$\Rightarrow$ <u>BIBO ευσταθές</u>

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Γ.Χ.Α. κ. <u>SISO</u> συστήματα

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)}$$



Χ.Ε.: $P(z) = 1 + GH(z) = 0$

ευστάθεια $\Rightarrow$ 1) ρίζες Χ.Ε. $\equiv$ μέσα στον μοναδιαίο κύκλο z-επίπεδο

2) απλές ρίζες (πόλους) $z=1$ ή $z=-1$

3) μηδενικά δεν επηρεάζουν την ευστάθεια

ΚΡΙΤΗΡΙΟ JURY

$$F(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \,, \quad \underline{\alpha_n} > 0 \qquad (\text{monic}: \alpha_n = 1)$$

<u>Μήτρα Jury</u>:

z^0	z^1	z^2	$\dots$	z^n
α_0	α_1	α_2	$\dots$	α_n
α_n	α_{n-1}	α_{n-2}	$\dots$	α_0
b_0	b_1	b_2	$\dots b_{n-1}$	$\times$
b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_0	
c_0	c_1			

$$b_k = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-k} \\ \alpha_n & \alpha_k \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\text{Αριθμός Γραμμών μήτρας Jury} = 2n-3}$$

Συνθήκες:

1) $F(1) > 0$

2) $(-1)^n F(-1) > 0$

$\rightarrow$ 3) $|\alpha_0| < \alpha_n$ $\quad \rightarrow (|\alpha_0| < 1)$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

5) $|c_0| > |c_{n-2}|$

$\vdots$

Ευστάθεια $\Rightarrow$ ισχύουν <u>ΟΛΕΣ</u>

$\rightarrow$ $n+1$ συνθήκες ($n+1$ συντελεστές $\rightsquigarrow F(z)$)

− $\alpha_0 \equiv$ γινόμενο όλων των ριζών $\rightsquigarrow$ $|\alpha_0| < 1$ ρίζες $\in$ μοναδ. κύκλο

Παράδειγμα: $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)}$, $H(s) = 1$

Να βρεθεί η περιοχή των $\in K$: σύστημα ευσταθές

$$G(s) = \left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\right]\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] \Rightarrow \dots \quad G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[\frac{(e^{-T}+T-1)z^2 + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)^2(z-e^{-T})}\right]$$

Για: $T = 1\,sec \Rightarrow G(z) = \dfrac{0{,}0048z + 0.0048}{(z-1)(z-0{,}905)}$

Χ.Ε.: $1 + KG(z) = 0 \Rightarrow 1 + K(\_\_\_\_\_\_\_\_) = 0$

$$\Rightarrow F(z) = z^2 + (0{,}368K - 1{,}368)z + (0{,}368 + 0.264K) = 0$$

$n = 2 \rightsquigarrow$ γραμμές μ. Jury $= 1$

Συνθήκες: 1) $F(1) > 0 \Rightarrow 1 + (0{,}368K - 1{,}368) + (0{,}368 + 0{,}264K) > 0$

$$\Rightarrow K > 0$$

2) $(-1)^2F(-1) > 0 \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow K < 26{,}3$

3) $|\alpha_0| < \alpha_2 \Rightarrow K < 2{,}39$

Περιοχή τιμών: $\boxed{0 < K < 2{,}39}$

Παράδειγμα: $F(z) = \underset{\alpha_3}{z^3} - \underset{\alpha_2}{1{,}8z^2} + \underset{\alpha_1}{1{,}052z} - \underset{\alpha_0}{0{,}2}$

1) $F(1) > 0 \Rightarrow 1 - 1{,}8 + 1{,}05 - 0{,}2 = 0{,}05 > 0$ Ισχύει

2) $(-1)^3F(-1) > 0 \Rightarrow -1 - 1{,}8 - 1{,}05 - 0{,}2 = -4{,}05$

$-F(-1) = 4{,}05 > 0$ Ισχύει

3) $|\alpha_0| = 0{,}2 < 1$ Ισχύει

4) μήτρα Jury:

z^0	z^1	z^2	z^3
−0,2	1,05	−1,8	1
1	−1,8	1,05	−0,2
−0,96 (b_0)	1,59 (b_1)	−0,69 (b_2)	

$|b_0| = 0{,}96 > |b_2| = 0{,}69$ Ισχύει

Άρα, σύστημα <u>ευσταθές</u>

Παράδειγμα: $F(z) = z^3 - 3z^2 + 2,25z - 0,5$

1) $F(1) > 0 \Rightarrow F(1) = -0,25$ δεν ισχύει

$\Rightarrow$ Σύστημα **Ασταθές**

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ROUTH - HURWITZ

(Υπολογίζει τα πρόσημα των πραγματικών μερών των ριζών του Χ.Π.)

Διγραμμικός Μετασχηματισμός

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}, \quad w = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1} \qquad \left(T = 1\sec:\ z = \frac{1+w}{1-w},\ w = \frac{z-1}{z+1}\right)$$

$F(z) = \dots \leadsto F(w) \in (s)$

$\in (z)$

$$F(w) = b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \dots + b_1 w + b_0$$

Κριτήριο Routh: μήτρα Routh:

w^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	...
w^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...
$\vdots$	c_1	c_2	c_3	...
w^0				

$$c_1 = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}} \quad \dots$$

Παράδειγμα:

$$G(z) = \frac{0,0048z + 0,00468}{(z-1)(z-0,905)} \leadsto G(w) \equiv G(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} =$$

$$= \frac{-0,00016w^2 - 0,187w + 3,81}{3,81w^2 + 3,80w}$$

Χ.Ε.: $1 + KG(w) = (1-0,0381K)w^2 + (0,924 - 0,386K)w + 0,924K = 0$

μήτρα Routh:

w^2	$1-0,0381K$	$0,924K$
w^1	$0,924-0,386K$	
w^0	$0,924K$	

Για καμμία αλλαγή προσήμου: $\boxed{0 < K < 2,39}$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΩΝ ΤΟΥ S-ΕΠΙΠ. ΣΤΟ Z-ΕΠΙΠΕΔΟ

Σύστημα 2ης τάξης: $\boxed{S_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0} \equiv -\sigma \pm j\omega_d$ $\left(\sigma = \zeta\omega_0, \ \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 \right)$

$0 \leq \zeta \leq 1$, ω_0

Νά εξετάσουμε σε ποιά σημεία τού Z-επιπέδου μετασχηματίζονται $\Big|_{z=e^{sT}}$ τά σημεία:

1. Σημεία μέ σταθερό πραγματικό μέρος (s), $\sigma = \zeta\omega_0 = σταθ.$

$$S_{1,2}\Big|_{z=e^{sT}} \rightsquigarrow \boxed{z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_0 T} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 T}}$$

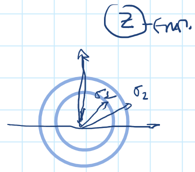
$$|z_{1,2}| = e^{-\zeta\omega_0 T}, \quad \angle z_{1,2} = \pm\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 T \equiv \pm\omega_d T$$

$$\left(\omega_d \triangleq \sqrt{1-\zeta^2}\cdot\omega_0 \right)$$

Θ. Δειγματοληψίας: $0 \leq \omega_d \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{T}$

$0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$ $\rightsquigarrow$ ω_d μεταβάλλεται $\Rightarrow$? $z_{1,2}$

- $\omega_d \to 0 \Rightarrow \angle z_{1,2} \to 0$
- $\omega_d \to \frac{\pi}{T} \Rightarrow \angle z_{1,2} \to \pm\pi$



Άρα, σημεία μέ σταθερό $\sigma_1 = \zeta\omega_0$ $\rightsquigarrow$ κύκλο ακτίνας $e^{-\sigma_1 T}$

2. Σημεία με σταθερό $\zeta \equiv \zeta_0$

$$|z_{1,2}| = e^{-\zeta\omega_0 T}$$

$$\angle z_{1,2} = \pm\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 T \rightsquigarrow \omega_0 = \mp\frac{\angle z_{1,2}}{\sqrt{1-\zeta^2}\,T}$$

$$\Rightarrow |z_{1,2}| = e^{\pm\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\angle z_{1,2}}{T}}$$

Σταθερό $\underline{\zeta = \zeta_0}$ $\Rightarrow$ $|z_{1,2}| = e^{\pm\frac{\zeta_0}{\sqrt{1-\zeta_0^2}}\frac{\angle z_{1,2}}{T}}$ $\leftarrow$ (λογαριθμική σπείρα)

$$0 \leq \omega_0 \leq \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}}$$

όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$ $\rightsquigarrow$ ω_0 : $0 \leq \omega_0 \leq \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}}$

Επειδή $0 \leq \zeta \leq 1$ $\rightsquigarrow$ <u>περιπτώσεις</u>:

- $\zeta_0 = 0$ $\rightsquigarrow$ $S_{1,2} = \pm j\omega_0$ $\Rightarrow$ $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T}$

Ισχύει: $|z_{1,2}| = 1$. Όταν $\omega_0 \to 0 \Rightarrow z_{1,2} \to 1$

$$\omega_0 \to \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}} = \frac{\pi}{T} \ (\zeta_0 = 0) \Rightarrow z_{1,2} \to e^{\pm j\pi} = 1\angle{\pm\pi}$$

▫ όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$ για $\zeta_0 = 0$ κινούμαστε πάνω στον <u>μοναδιαίο κύκλο</u>

- $\zeta_0 = 1$ $\rightsquigarrow$ $S_{1,2} = -\omega_0$ $\Rightarrow$ $z_{1,2} = e^{-\omega_0 T}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \omega_0 \to 0 \Rightarrow z_{1,2} \to 1 \\ \pi \end{cases}$

• $\zeta_0 = 1 \rightsquigarrow s_{1,2} = -\omega_0 \Rightarrow z_{1,2} = e^{-\omega_0 T} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \to 0 \Rightarrow z_{1,2} \to 1 \\ \omega_0 \to \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}} \to \infty \Rightarrow z_{1,2} \to 0 \end{cases}$

□ όταν $0 \le \omega_d \le \frac{\pi}{T}$, $\frac{\zeta_0 = 1}{0 \le \omega_0 < \infty}$ τότε $z_{1,2} \in [0, 1] \subset \mathrm{Re}\, z$

□ όταν $0 < \zeta_0 < 1$ τότε όταν $0 \le \omega_d \le \frac{\pi}{T} \to z_{1,2} \in$ λογαριθμική σπείρα

3. Σημεία με σταθερό ω_0

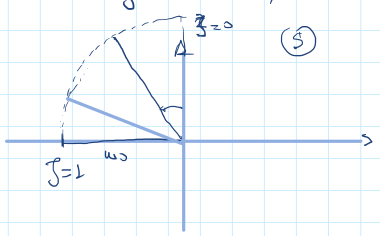
Ισχύει $\omega_0^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 \rightsquigarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_d = -\sigma \pm j\omega_d$

$\Rightarrow z_{1,2} = s_{1,2}\Big|_{z = e^{sT}} = e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \omega_d^2}\,T} \cdot e^{\pm j\omega_d T}$, $\omega_0 =$ σταθερό

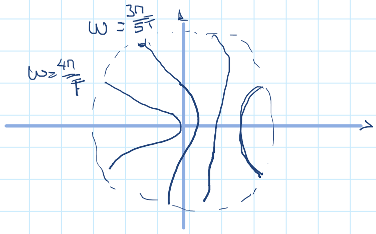
Τότε, $0 \le \omega_d \le \frac{\pi}{T} \Rightarrow 0 \le \omega_0 \le \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}}$, $0 \le \zeta \le 1$

- $\zeta = 0$, $\omega_0 =$ σταθερό $\rightsquigarrow e^{\pm j\omega_0 T} \equiv$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$\zeta = 1$, —//— $\rightsquigarrow e^{-\omega_0 T} \equiv \in \mathrm{Re}\, z$



$\Rightarrow$



σημεία με σταθερό ω_0