Ψηφιακός Έλεγχος

διάλεξη

Υλοποίηση Ψηφιακών Φίλτρων

Υλοποίηση Ψηφιακών φίλτρων

Το πρακτικό ενδιαφέρον της υλοποίησης ψηφιακών ρυθμιστών είναι μεγάλο καθώς λαμβάνονται υπόψιν θέματα όπως το κόστος του κυκλώματος, ο χώρος μνήμης στο ψηφιακό υπολογιστή, η κβαντοποίηση σημάτων και συντελεστών, η στρογγυλοποίηση (round off) αριθμών, ο βέλτιστος αλγόριθμος, η επιλογή του μικροεπεξεργαστή και άλλα.

Η κυκλωματική υλοποίηση του ψηφιακού ελεγκτή είναι γίνεται στην πράξη χρησιμοποιώντας καθυστερητές, πολλαπλασιαστές και αθροιστές.

Οι κυριότεροι τύποι υλοποίησης είναι:

Απευθείας μορφή (εν σειρά)

Απευθείας μορφή (κανονική)

Εν σειρά υλοποίηση

Παράλληλη υλοποίηση

Υλοποίηση σκάλας

Απευθείας μορφή (εν σειρά)

Η συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται ως λόγος δύο πολυωνύμων:

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j z^{-j}}{1+\sum_{j=1}^{n} b_j z^{-j}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}$$

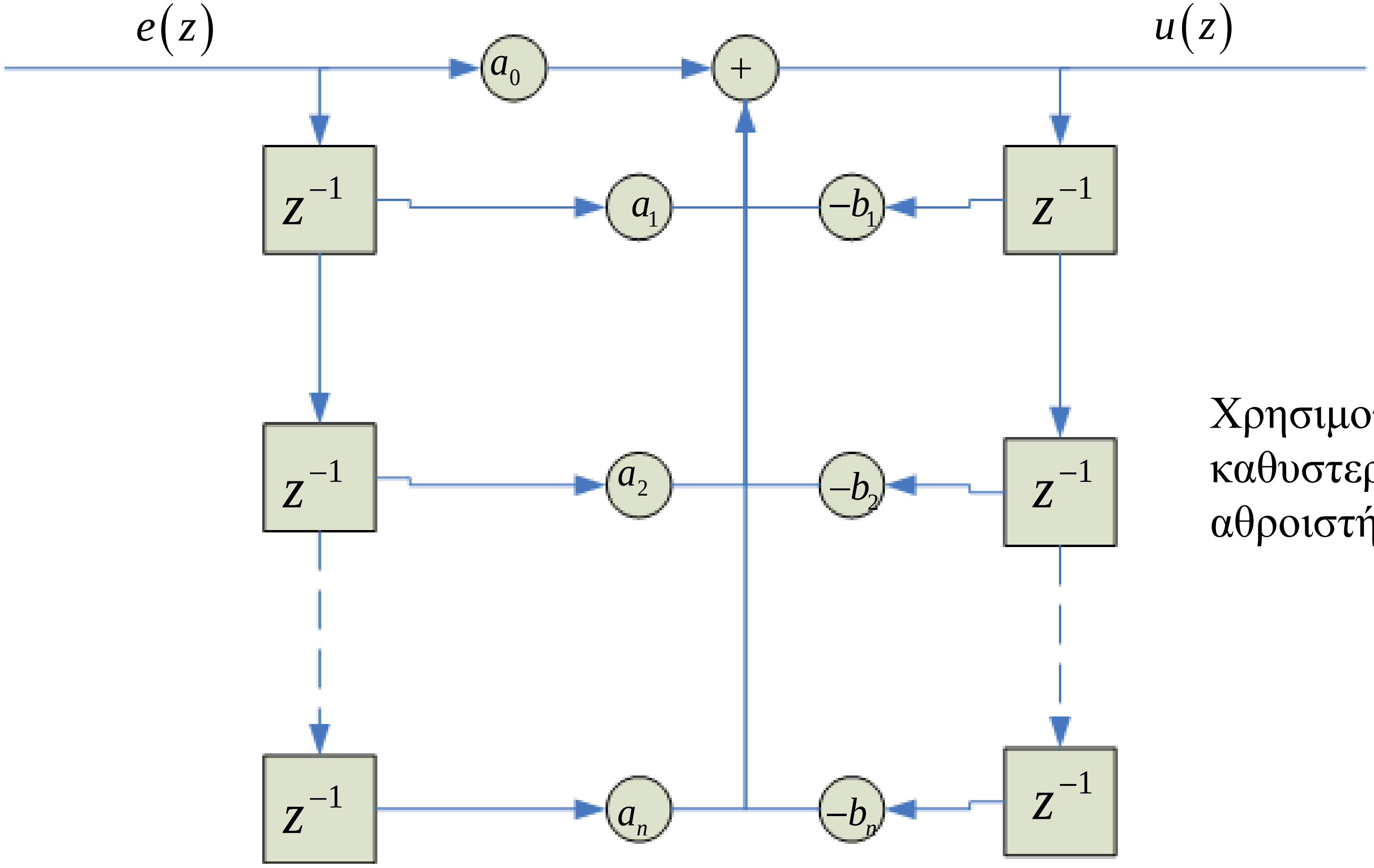
$$u(z) = a_0 e(z) + a_1 z^{-1} e(z) + \ldots + a_n z^{-n} e(z) - b_1 z^{-1} u(z) - \ldots b_n z^{-n} u(z)$$

ή

$$u(k) = a_0 e(k) + a_1 e(k-1) + \ldots + a_n e(k-n) - b_1 u(k-1) - \ldots b_n u(k-n)$$

Απευθείας μορφή (εν σειρά)

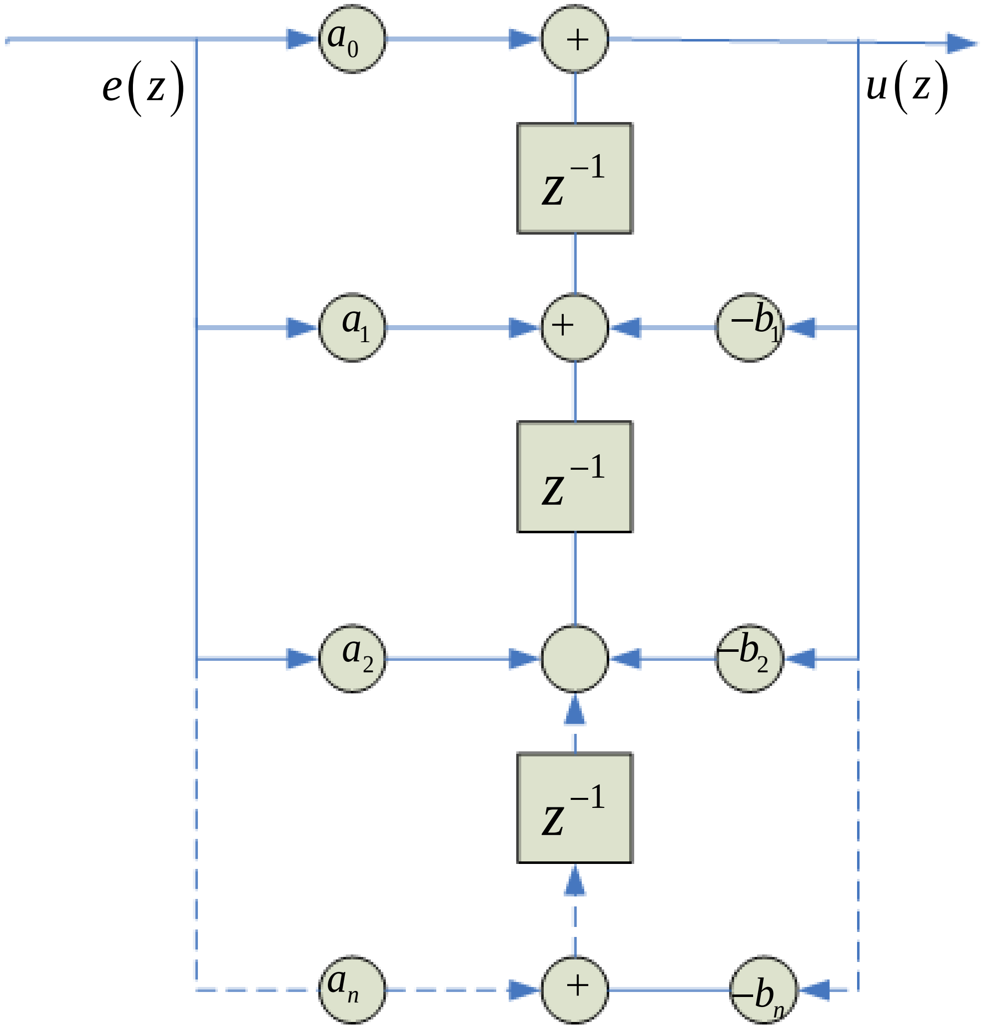
Η υλοποίηση (μη κανονική) φαίνεται στο σχήμα :



Χρησιμοποιούνται 2n καθυστερητές και 1 αθροιστής

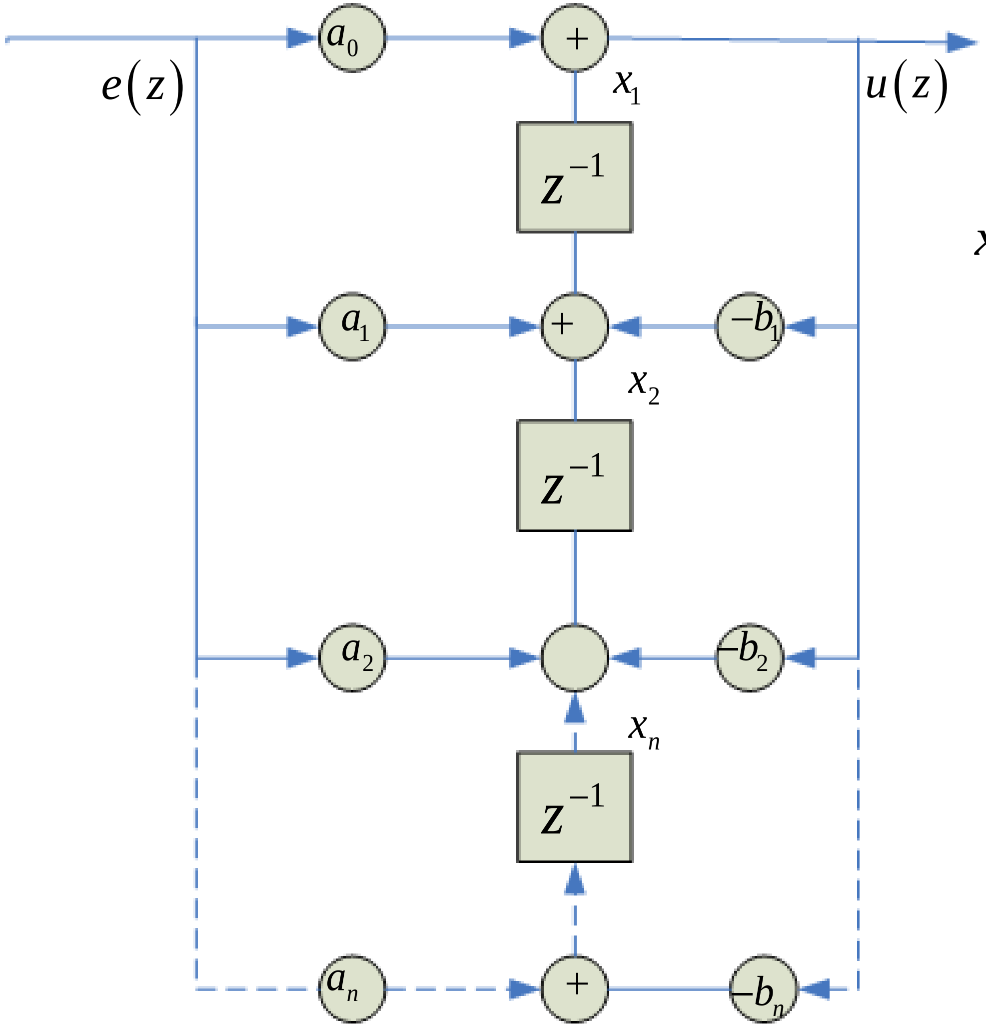
Απευθείας μορφή (εν σειρά)

Μια εναλλακτική μορφή υλοποίησης με n+1 αθροιστικά σημεία και n καθυστερητές είναι



Απευθείας μορφή (εν σειρά)

Αν θέσουμε μεταβλητές κατάστασης βλέπουμε ότι :



$$x_1(k+1) = -b_1x_1 + x_2 + a_1e(k) - a_0b_1e(k)$$

$$x_2(k+1) = -b_2x_1 + x_3 + a_2e(k) - a_0b_2e(k)$$

.

.

.

Απευθείας μορφή (εν σειρά)

Σε μορφή πινάκων έχουμε:

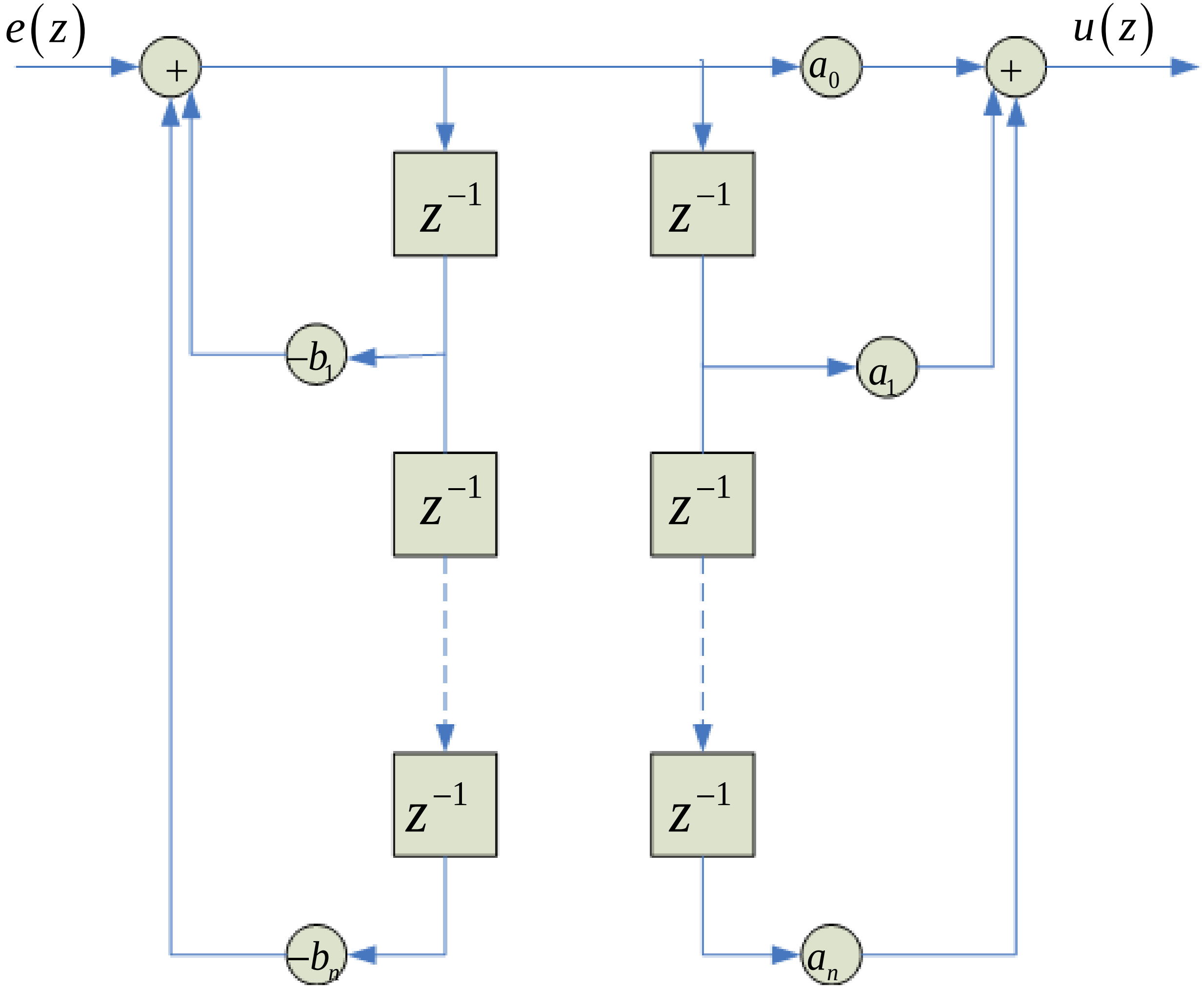
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ . \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & . & . \\ -b_2 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -b_n & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 - a_0 b_1 \\ a_2 - a_0 b_2 \\ . \\ . \\ a_n - a_0 b_n \end{bmatrix} e(k)$$

και

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + a_0 e(k)$$

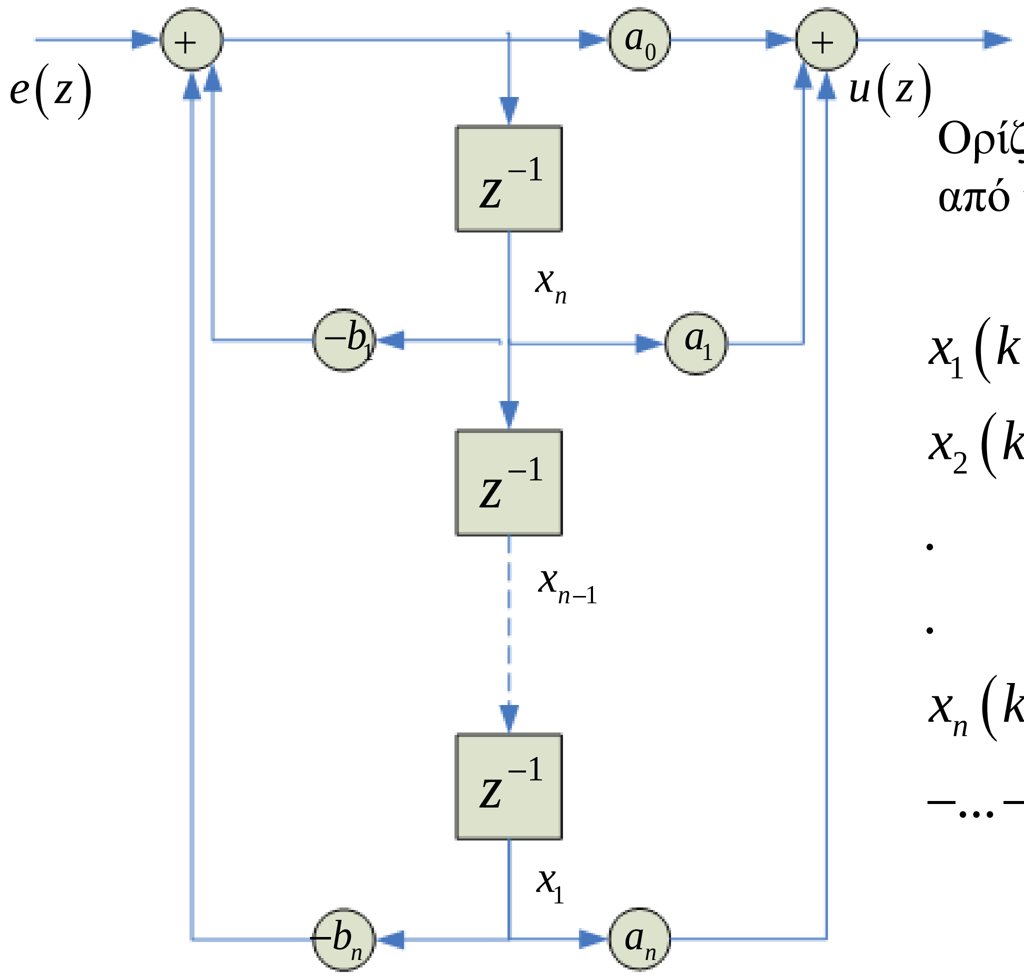
Απευθείας μορφή (κανονική)

Ένας άλλος τρόπος υλοποίησης είναι ο παρακάτω (2 αθροιστές, 2n καθυστερητές) είναι:



Απευθείας μορφή (κανονική)

Ένας εναλλακτικός τρόπος υλοποίησης χρησιμοποιώντας τους μισούς καθυστερητές είναι



Ορίζοντας μεταβλητές κατάστασης από κάτω προς τα πάνω έχουμε:

$$x_1(k+1) = x_2$$

$$x_2(k+1) = x_3$$

.

.

$$x_n(k+1) = -b_n x_1(k) - b_{n-1} x_2(k) -$$
$$-\ldots - b_1 x_n(k) + e(k)$$

Απευθείας μορφή (κανονική)

Σε μορφή πινάκων έχουμε:

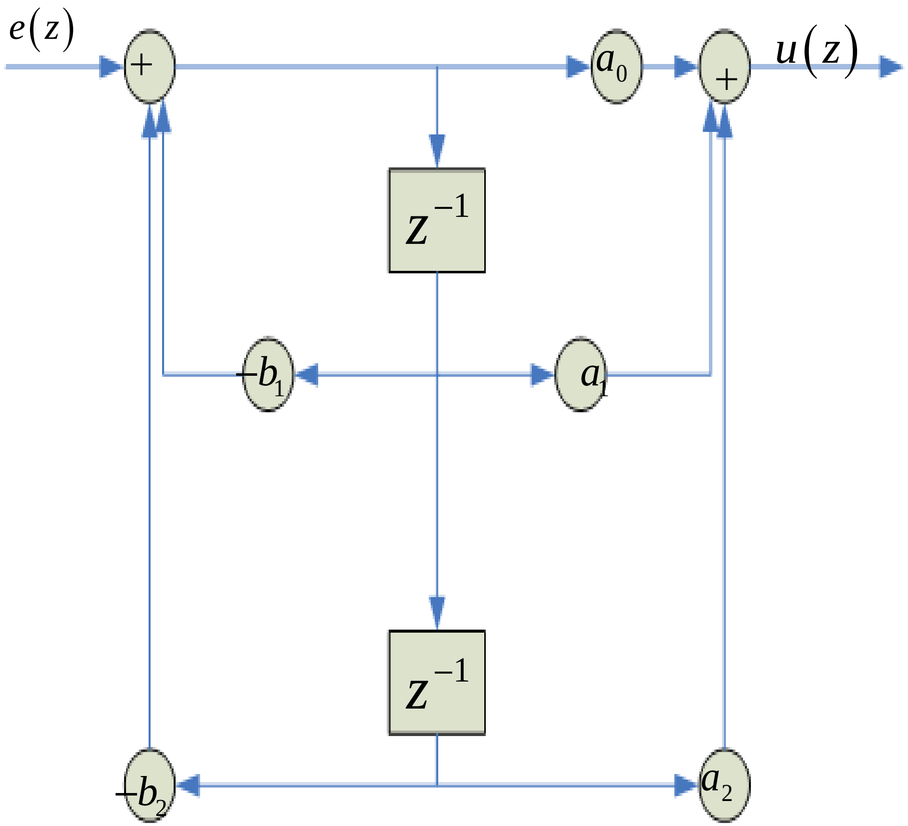
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ . \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -b_n & . & . & . & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

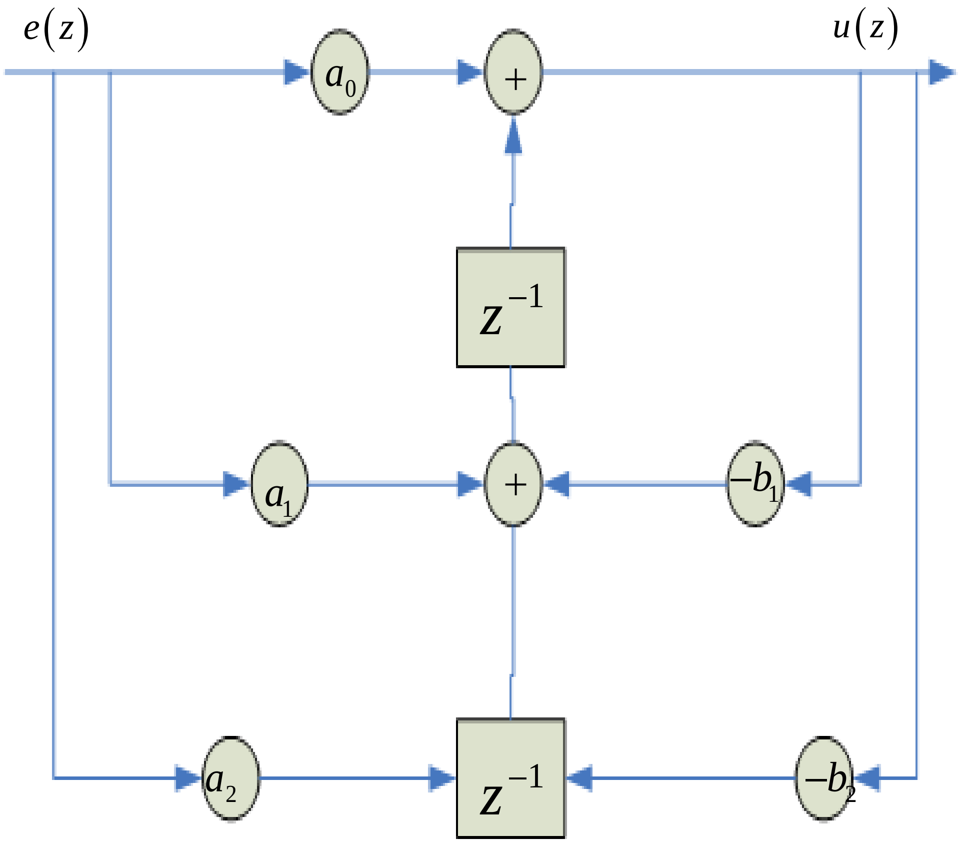
$$u(k) = \begin{bmatrix} a_n - a_{n-1}b_n & \ldots & a_1 - a_0 b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + a_0 e(k)$$

Παράδειγμα

Για ένα σύστημα δεύτερης τάξης φαίνονται οι δύο υλοποιήσεις (απευθείας μορφή εν σειρά και κανονική) :

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-1}}$$





Υλοποίηση σε σειρά

Με αυτόν τον τρόπο υλοποίησης εκφράζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο παραγόντων πρώτης και δεύτερης τάξης:

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = a_0 D_1(z) \ldots D_l(z), \qquad 1 \le l < n$$

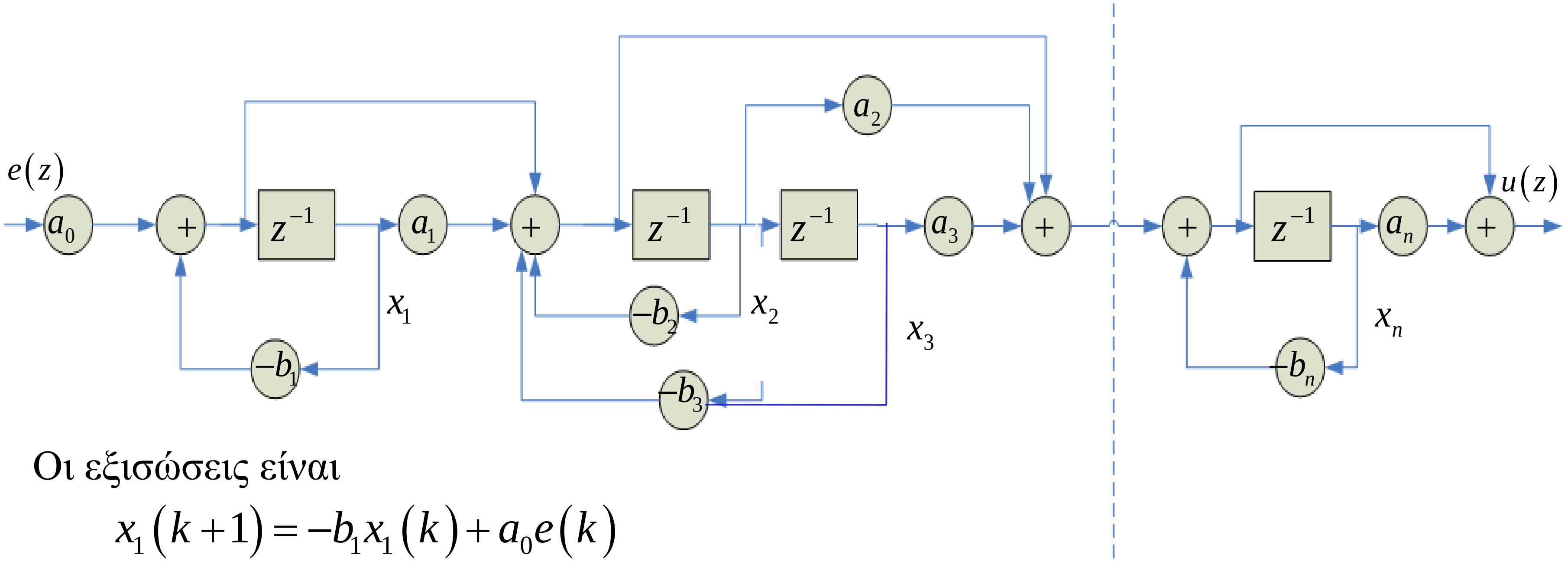
Κάθε επιμέρους συνάρτηση μεταφοράς έχει μία απο τις δύο παρακάτω μορφές:

στοιχείο πρώτης τάξης $$D_l(z) = \frac{1 + a_l z^{-1}}{1 + b_l z^{-1}}$$

στοιχείο δεύτερης τάξης $$D_l(z) = \frac{1 + a_l z^{-1} + a_{l+1} z^{-2}}{1 + b_l z^{-1} + b_{l+1} z^{-2}}$$

Υλοποίηση σε σειρά

Η κυκλωματική υλοποίηση είναι



Οι εξισώσεις είναι

$$x_1(k+1) = -b_1 x_1(k) + a_0 e(k)$$

$$x_2(k+1) = (a_1 - b_1) x_1(k) - b_2 x_2(k) - b_3 x_3(k) + a_0 e(k)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k)$$

$$x_4(k+1) = (a_1 - b_1) x_1(k) + (a_2 - b_2) x_2(k) + (a_3 - b_3) x_3(k) - b_4 x_4(k) + a_0 e(k)$$

.

.

Υλοποίηση σε σειρά

Σε μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ . \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_1-b_1 & -b_2 & -b_3 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 & . & -b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 \\ 0 \\ . \\ a_0 \end{bmatrix} e(k)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & \ldots & a_n-b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + a_0 e(k)$$

Παράλληλη υλοποίηση

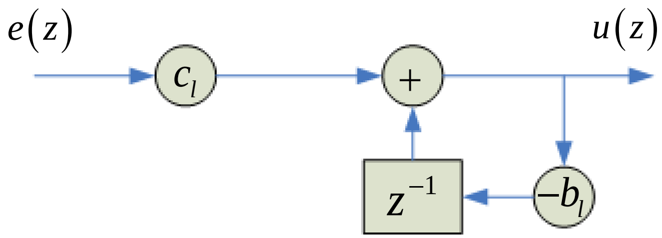
Η συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται ως άθροισμα επιμέρους συναρτήσεων μεταφοράς πρώτης και δεύτερης τάξης:

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = c_0 + D_1(z) + D_2(z) + \ldots + D_l(z), \qquad 1 < l < n$$

Δημιουργούνται έτσι δύο είδη παραγόντων

στοιχείο πρώτης τάξης

$$D_l(z) = \frac{c_l}{1 + b_1 z^{-1}}$$

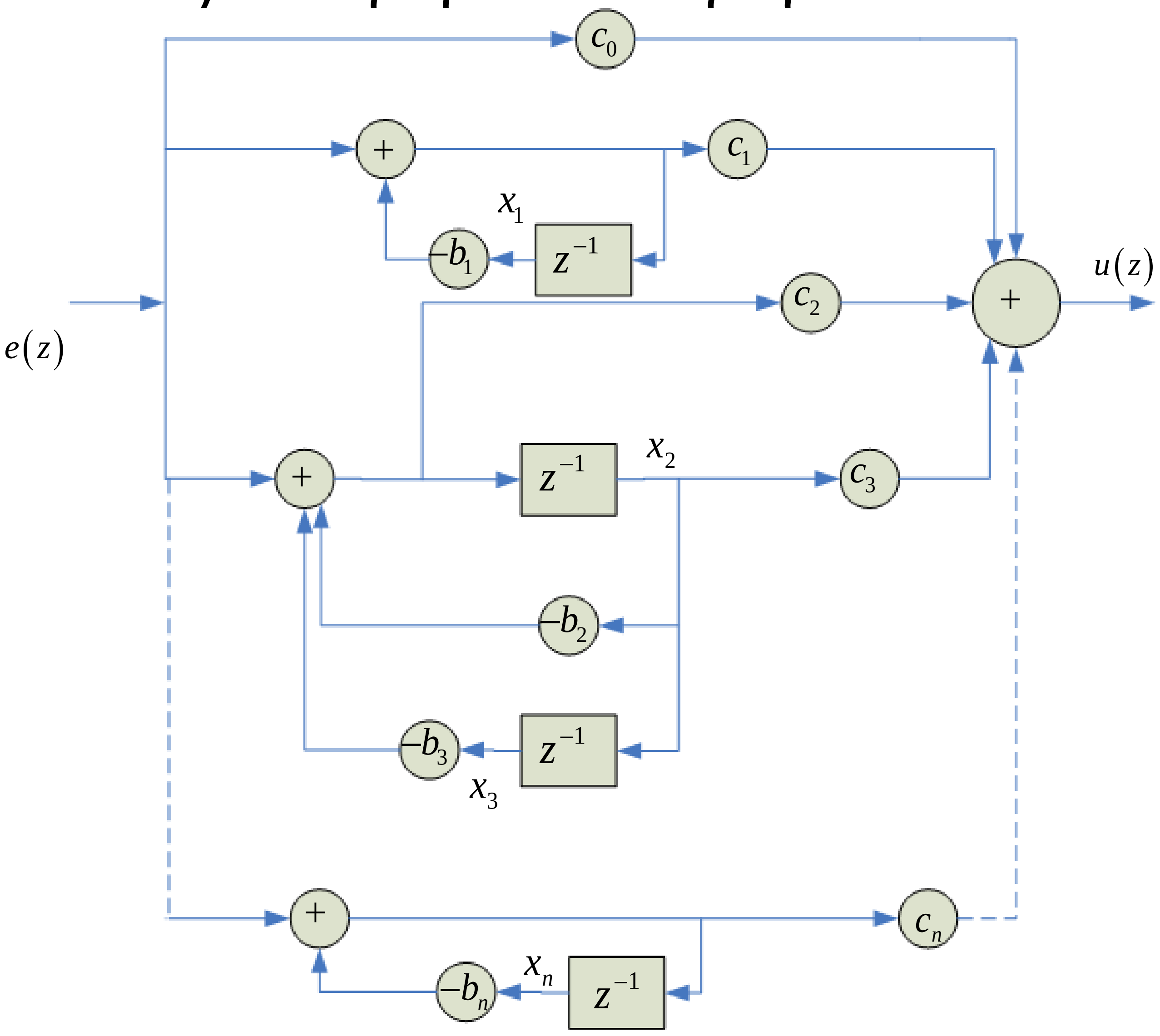


στοιχείο δεύτερης τάξης

$$D_l(z) = \frac{c_{l0} + c_{l1} z^{-1}}{1 + b_{l1} z^{-1} + b_{l2} z^{-2}}$$

Παράλληλη υλοποίηση

Η κυκλωματική υλοποίηση είναι



Παράλληλη υλοποίηση

Οι εξισώσεις είναι

$$x_1(k+1) = -b_1 x_1(k) + e(k)$$

$$x_2(k+1) = -b_2 x_2(k) - b_3 x_3(k) + e(k)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k)$$

$$.$$

$$x_n(k+1) = -b_n x_n(k) + e(k)$$

Σε μορφή πινάκων είναι

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ . \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -b_2 & -b_3 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & -b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

Παράλληλη υλοποίηση

και

$$u(k)=\begin{bmatrix}-b_1c_1 & -b_2c_2+c_3-b_3c_2 & -b_4c_4 & \dots & -b_nc_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ .\\ .\\ x_n(k)\end{bmatrix}+$$

$$+(c_0+c_1+\dots+c_n)e(k)$$

Υλοποίηση σκάλας

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\dfrac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}$

Αν κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$D(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z^{-1} + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z^{-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{B_n z^{-1} + \cfrac{1}{A_n}}}}}}$$

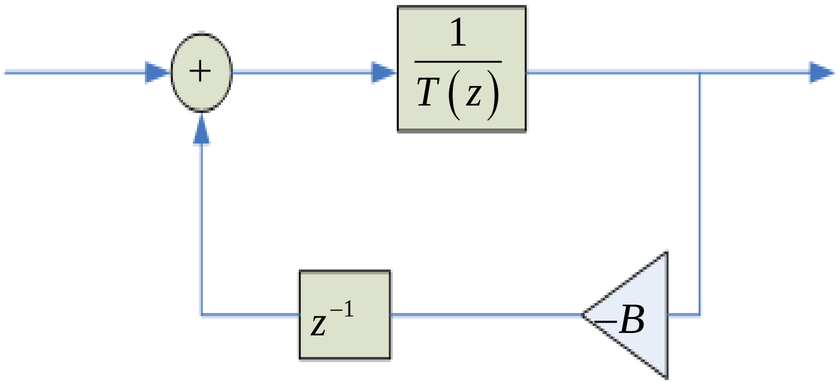
Τα A_i, B_i είναι σταθερές που έχουν προέλθει απο τα a_i, b_i

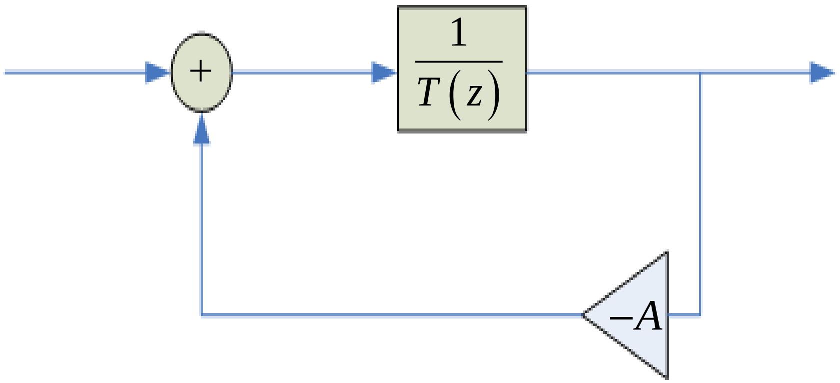
Υλοποίηση σκάλας

Για να υλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση πρέπει να μπορούμε να υλοποιήσουμε τις

$$G_1(z) = \frac{1}{Bz^{-1} + T(z)} \qquad G_2(z) = \frac{1}{A + T(z)}$$

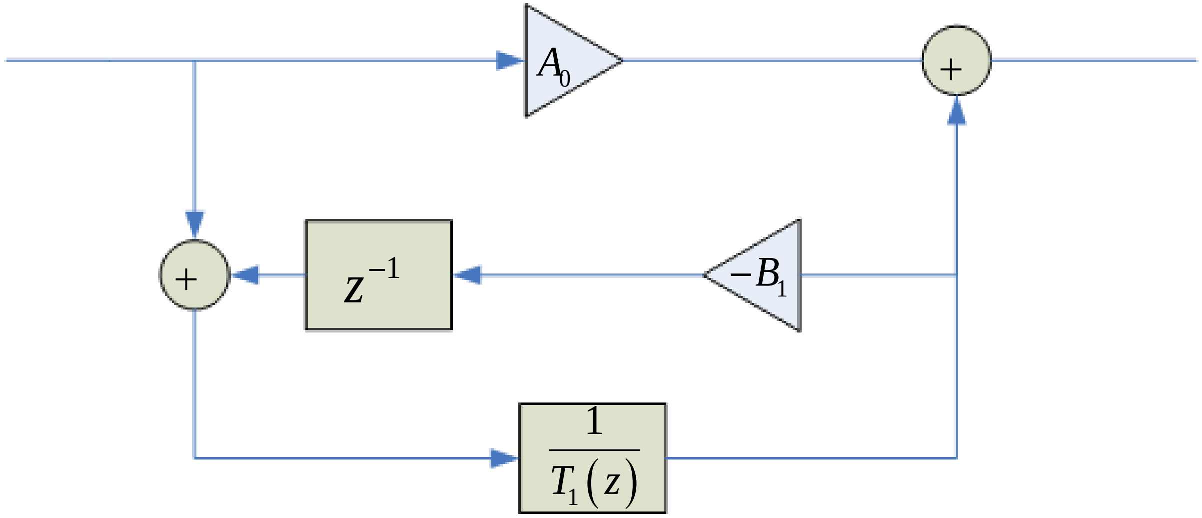
Αυτό φαίνεται στα 2 παρακάτω σχήματα :





Υλοποίηση σκάλας

Στη συνέχεια, υλοποιούμε την συνάρτηση $D(z) = A_0 + \dfrac{1}{B_l z^{-1} + T_l(z)}$

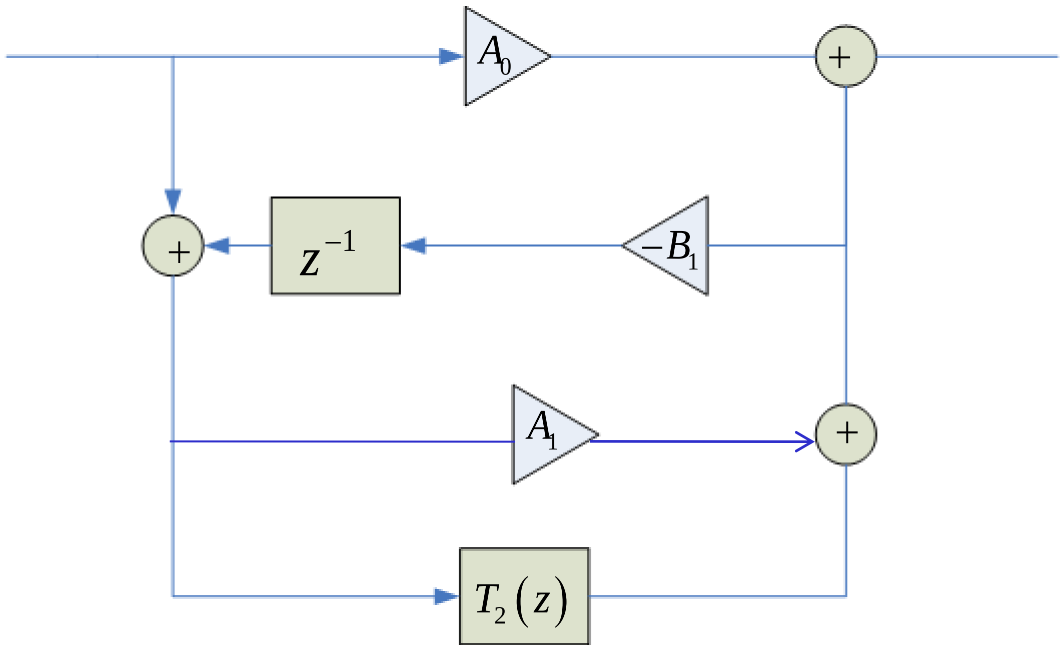


Μετά, εκφράζουμε την συνάρτηση ως εξής : $T_1(z) = \dfrac{1}{A_1 + T_2(z)}$

ή $$\frac{1}{T_1(z)} = A_1 + T_2(z)$$

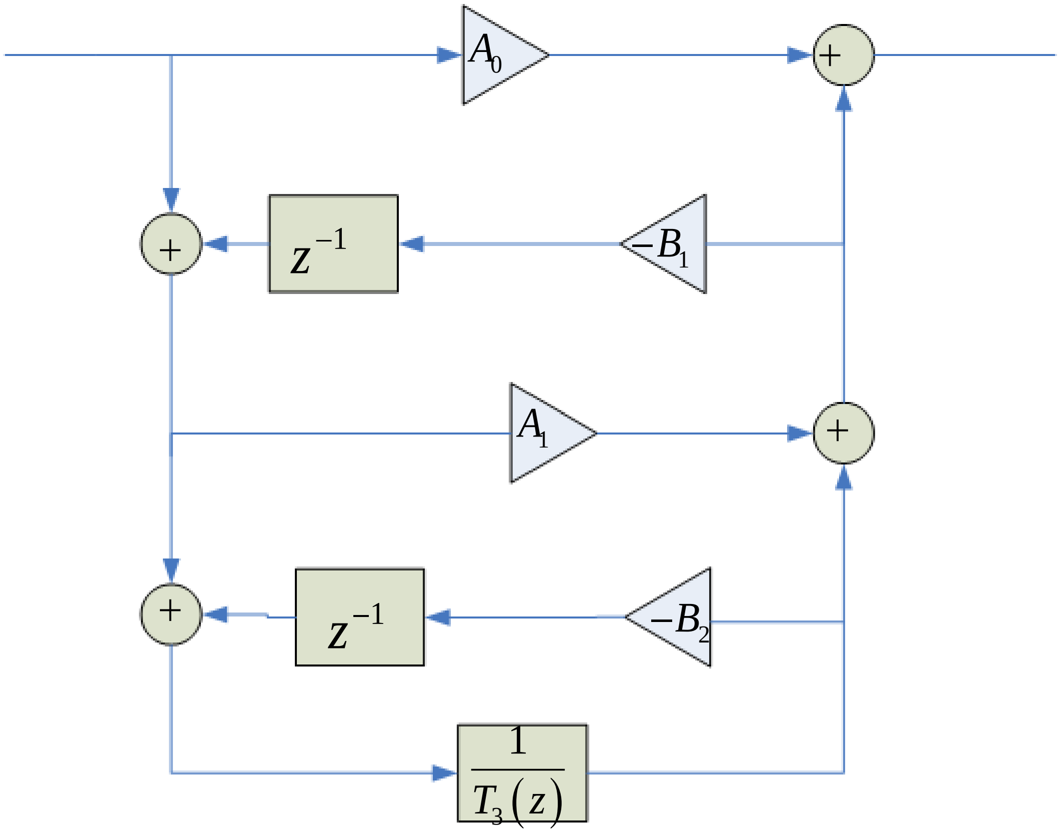
Υλοποίηση σκάλας

Έτσι, έχουμε



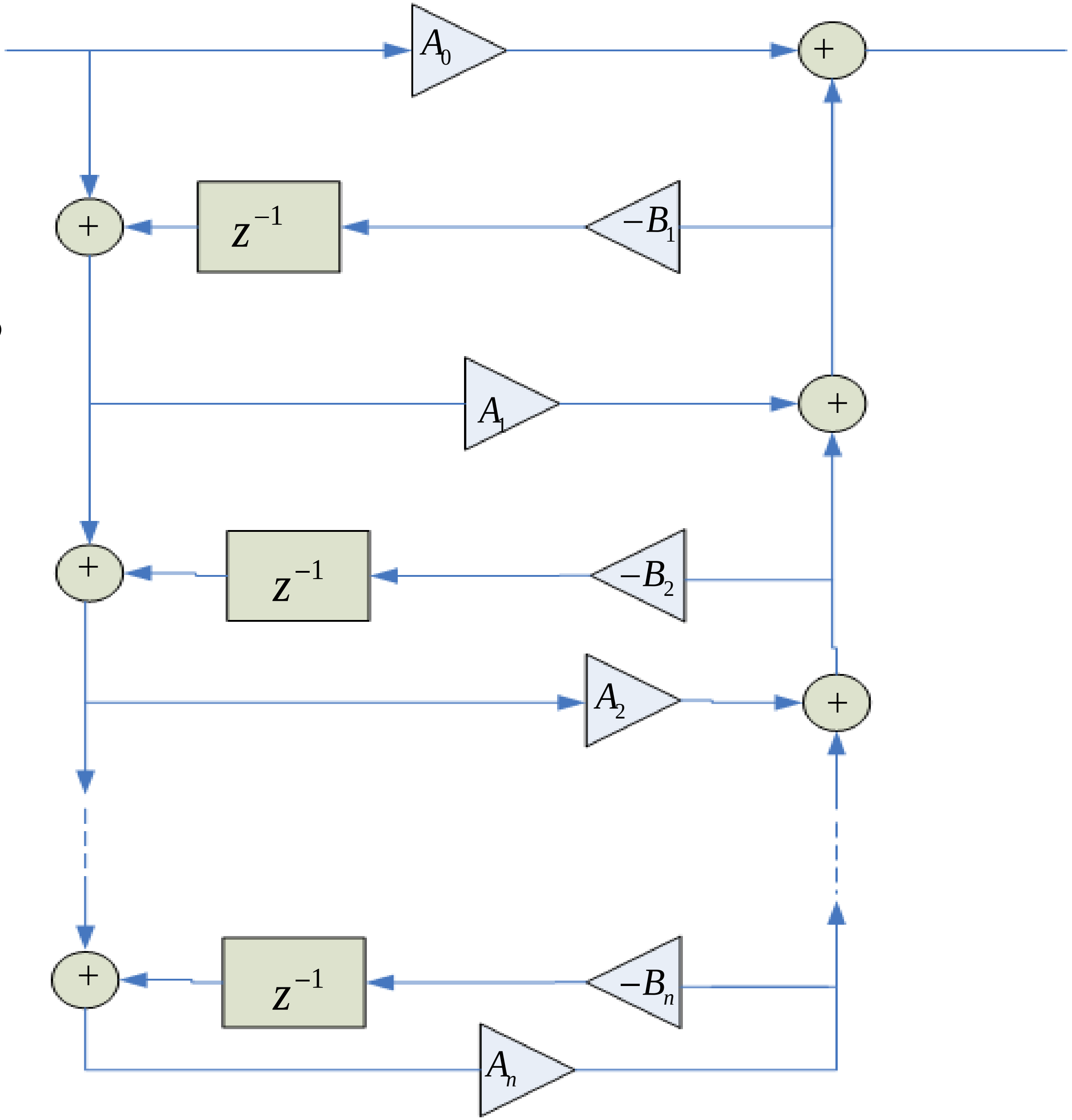
Συνεχίζοντας, αντικαθιστούμε την συνάρτηση με $T_2(z) = \dfrac{1}{B_2 z^{-1} + T_3(z)}$ και έχουμε

Υλοποίηση σκάλας



Υλοποίηση σκάλας

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, η υλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Υλοποίηση PID ελεγκτή

Η συνάρτηση μεταφοράς του PID ελεγκτή είναι

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = D(z) = K_p + \frac{K_I T}{2}\frac{(z+1)}{z-1} + \frac{K_D}{T}\frac{(z-1)}{z}$$

Θέλουμε να υλοποιήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως σύστημα 2ης τάξης :

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Εξισώνοντας τις 2 σχέσεις έχουμε

$$a_0 = K_p + \frac{K_I T}{2} + \frac{K_D}{2}$$

$$a_1 = -K_p + \frac{K_I T}{2} - \frac{2K_D}{2}$$

$$a_2 = \frac{K_D}{T}$$

$$b_1 = -1$$

$$b_2 = 0$$

Υλοποίηση PID ελεγκτή

Η υλοποίηση φαίνεται στο σχήμα :