1

Μετασχηματισμός Ζ

Το αντικείμενο του μαθήματος αυτού είναι η μελέτη των ψηφιακών συστημάτων. Πρίν προχωρήσουμε, πρέπει να διακρίνουμε τίς δύο διαφορετικές κατηγορίες συστημάτων με τις οποίες θα ασχοληθούμε:

- Συστήματα τα οποία έχουν προέλθει από δειγματοληψία συστημάτων συνεχούς χρόνου.
- Συστήματα που επεξεργάζονται αμιγώς ψηφιακά σήματα.

Στην πρώτη κατηγορία συστημάτων περιλαμβάνονται συστήματα τα οποία αποτελούνται από μιά βασική διαδικασία που μας δίνεται σαν μιά κλασσική συνάρτηση μεταφοράς στο πεδίο *Laplace*, όπως στα κλασσικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Τα συστήματα αυτά θέλουμε να τα ελέγξουμε χρησιμοποιώντας για ελεγκτή ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επειδή όμως, ο υπολογιστής είναι ένα αμιγώς ψηφιακό σύστημα, δηλαδή αντιλαμβάνεται και επεξεργάζεται μόνο ψηφιακά σήματα (σήματα με κβαντισμένες τιμές και με κβαντισμένο χρόνο), πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να επικοινωνήσουν απο τη μια μεριά η συνεχούς χρόνου συνάρτηση που περιγράφει την φυσική μας διεργασία, και από την άλλη, ο υπολογιστής που πρέπει να στέλνει τα σήματα ελέγχου.

Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση συσκευών που μετατρέπουν τα σήματα συνεχούς χρόνου σε ψηφιακά και αντιστρόφως. Για αυτά θα μιλήσουμε εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Επί του παρόντος, επειδή θέλουμε ο ελεγκτής μας να είναι ένα ψηφιακό σύστημα, πρέπει να είμαστε σε θέση να βρούμε μιά κατάλληλη συνάρτηση μεταφοράς (προφανώς που να αναφέρεται σε ψηφιακά σήματα), όλοκλήρου του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ολοκλήρου του συστήματος, δηλαδή ο λόγος της εξόδου ως προς την είσοδο, περιγράφεται απο μια **εξίσωση διαφορών**, την οποία πρέπει να μπορούμε να λύσουμε. Στην περίπτωση των κλασσικών ΣΑΕ, αυτό το επιτυγχάναμε χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace, με τον οποίο επιλύαμε τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις. Για την επίλυση των εξισώσεων διαφορών πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό είδος μετασχηματισμού (ο οποίος μετατρέπει αντίστοιχα τις εξισώσεις διαφορών σε αλγεβρικές εξισώσεις), που είναι ο **μετασχηματισμός Z.**

1.1 Ορισμός μετασχηματισμού Z

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots$$

και την τιμή της συνάρτησης για κάθε t=nT όπου , τότε έχουμε την ακολουθία τιμών :

$$f(T), f(2T), f(3T), \ldots$$

Ορίζουμε σαν μετασχηματισμό Z της συνάρτησης f , την κάτωθι σειρά:

$$F(z) \equiv Z[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

όπου $z = e^{sT}$, και T η περίοδος δειγματοληψίας.

Δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της χρονικής συνάρτησης f και του μετασχηματισμού Ζ αυτής. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Ζ εισέρχομαι σε ένα πεδίο μιγαδικό , όπως το πεδίο Laplace. Είναι δυνατόν δύο εντελώς διαφορετικές συναρτήσεις να έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό. Αυτό φαίνεται καθαρά στο κάτωθι σχήμα:

Παρατηρούμε ότι $f_1(kT) = f_2(kT)$

Συνεπώς $F_1(z) = F_2(z)$.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει οτι οι δύο συναρτήσεις είναι ίδιες, αλλά οτι ταυτίζονται στις στιγμές κT .

Οπως είδαμε προηγουμένως, ορίσαμε τον μετασχηματισμό της συνάρτησης f σαν μια άπειρη σειρά. Ειναι αξιοσημείωτο οτι η σειρά αυτή συγκλίνει πάντα, όταν η συνάρτηση είναι φραγμένη και $|z|^{-1} < 1$ και έτσι έχει νόημα ο μετασχηματισμός.

Αν συμβολίσουμε με ένα αστερίσκο τα σήματα που έχουν υποστεί δειγματοληψία (για τα οποία θα μιλήσουμε εκτενέστερα αργότερα), ο ορισμός του μετασχηματισμού Ζ , όπως τον διατυπώσαμε, μας οδηγεί στις εξής σχέσεις:

$$L\left[f^*(t)\right] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

όπου οπως είπαμε παραπάνω, $f^*(t) = f(kT)$.

Η αλλαγή της μεταβλητής $z = e^{sT}$ που κάναμε στον ορισμό, μας οδηγεί στα εξής:

Επειδή $s=\frac{1}{T}\ln z$, οπου Τ η περίοδος δειγματοληψίας, εχουμε ότι:

$$F^*\left[s=\frac{1}{T}\ln z\right]\equiv F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = Z\{f(t)\}$$

$$\Rightarrow F(z)=L\{f^*(t)\}\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

Η εύρεση του μετασχηματισμού Z μιας συνάρτησης τελικά περιλαμβάνει τα εξής τρία βήματα:

1. $f(t)\to f^*(t)$
2. $F^*(s)=L\{f^*(t)\}=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$
3. $z=e^{sT} \to F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Z που μοιάζουν με τις αντίστοιχες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, και μετά θα παραθέσουμε τις μεθόδους υπολογισμού του.

1.2 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Θα παραθέσουμε εδώ ορισμένες από τις πλέον χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Z. Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται πολύ εύκολα, χρησιμοποιώντας τον ορισμό και γι' αυτό δεν θα δώσουμε τις αποδείξεις. Μπορούν να λυθούν σαν ασκήσεις.

1. $Z\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1F_1(z)+c_2F_2(z)$

2. $Z\{f(t-kT)\}=z^{-k}F(z)$

3. $Z\{f(t+T)\} = zF(z)$

4. $Z\{f(t+kT)\} = z^{k}\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT)z^{-n}\right]$

5. $Z\{e^{-aT} f(t)\} = F(ze^{aT})$

6. $\lim_{t\to 0} f^{*}(t) = \lim_{z\to\infty} F(z)$ οταν $f^{*}(t) = f(t)\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-kT)$

7. $\lim_{t\to\infty} f^{*}(t) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$

8. $Z[tf(t)] = -Tz\dfrac{d}{dz}F(z)$

9. $Z\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = -\dfrac{1}{T}\int \dfrac{F(z)}{z}dz$

10. $Z[a^{t} f(t)] = F(\dfrac{z}{a^{T}})$

11. $Z\left[\sum_{k=0}^{n} f_1(t-kT) f_2(kT)\right] = F_1(z)F_2(z)$

12. $Z[f_1(t) f_2(t)] = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_{C}\dfrac{F_1(w)F_2(z/w)}{w}dw$

1.3 Ευρεση απ΄ευθείας μετασχητισμου Z

1.3.1 Μέθοδος Δυναμοσειράς

Στην μέθοδο αυτή, βασικά εφαρμόζουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Z και προσπαθούμε να δούμε πού ακριβώς συγκλίνει η σειρά. Η μέθοδος αυτή σε γενικές περιπτώσεις αποφεύγεται διότι είναι δύσκολη η απόδειξη της σύγκλισης , μας δίνει σαν μετασχηματισμό μια άπειρη σειρά που δεν είναι ιδαίτερα βολική μορφή για τις πράξεις, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία όταν οι τιμές στις συναρτήσεις προκύπτουν με κάποιον προσιτό νόμο, ή δεν μας χρειάζεται μια κλειστή μορφή του μετασχηματισμού. Για να γίνει πιό κατανοητή η μέθοδος είναι σκόπιμο να δώσουμε ένα παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα:</u>

Ζητείται ο μετασχηματισμός Ζ της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.

Θα εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζ:

$$U(z) = Z\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

Παρατηρώ οτι $|z^{-1}| < 1$ και οτι εχω την γνωστή γεωμετρική πρόοδο της οποίας ζητώ το άθροισμα των απείρων όρων της. Ετσι λοιπόν έχω:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Συνεπώς έχουμε οτι

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

1.3.2 Μέθοδος των μερικών κλασμάτων

Με την μέθοδο αυτή μετασχηματίζουμε πρώτα την $f(t)$ σε $F(s)$ και εν συνεχεία κάνουμε τον μετασχηματισμό Ζ, αφού διασπάσω την $F(s)$ σε απλά κλάσματα.

Εστω λοιπόν η

$$F(s) = \frac{v_1}{s+s_1} + \frac{v_2}{s+s_2} + \ldots + \frac{v_n}{s+s_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{s+s_k}$$

Τότε με βάση τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε οτι:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{-s_k t}$$

Θα πρέπει λοιπόν να πάρω τον μετασχηματισμό Ζ της $f(t)$, οπότε προκύπτει:

$$F(z) = Z\{f(t)\} = Z\left\{\sum_{k=1}^{n} v_k e^{-s_k t}\right\} = \sum_{k=1}^{n} v_k Z\{e^{-s_k t}\}$$

Από πίνακες όμως είναι γνωστό οτι

$$Z\{e^{-s_k t}\} = \frac{z}{z - e^{-s_k T}}$$

συνεπώς

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{z}{z - e^{-s_k T}}$$

Η μέθοδος αυτή χρησιμεύει πάρα πολύ μιά και είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξυ του πεδίου Laplace και του πεδίου Z και χρησιμοποιείται οταν είναι γνωστή η $F(s)$ και όχι η $f(t)$.

1.3.3 Μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Η μέθοδος αυτή υπολογίζει τον μετασχηματισμό Z μιάς συνάρτησης οταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Laplace αυτής. Βασίζεται στην θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων (αφού το πεδίο συχνότητας είναι ένα μιγαδικό επίπεδο), και χρησιμοποιείται πάρα πολύ στη πράξη.

Εχουμε οτι:

$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$ δηλαδή οι πόλοι της $F(s)$ είναι τα $s = 0, s = -a$.

Ο τύπος που μας δίνει τον μετασχηματισμό Z της συνάρτησης είναι ο ακόλουθος:

$$F(z) = \sum \operatorname{Re} s\left[\frac{F(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]\Bigg| \pi o\lambda o\iota F(s)$$

όπου τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σύμφωνα με την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων δίνονται από τους τυπους:

<u>για απλούς πόλους (πολλαπλότητας 1):</u>

$$\operatorname{Re} sp_k = \lim_{p \to p_k} (p - p_k) \frac{F(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

για πολλαπλούς πόλους(πολλαπλότητας m):

$$\operatorname{Re} sp_k = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[\frac{(p-p_k)F(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

Ετσι, στο παράδειγμά μας ο μετασχηματισμός είναι :

$$F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

επειδή

$$\operatorname{Re}\underset{p=0}{sidue}=\lim_{p\to 0}(p-0)\frac{a}{p(p+a)\blacksquare-e^{pT}z^{-1}]}=\frac{z}{z-1}$$

$$\operatorname{Re}\underset{p=-a}{sidue}=\lim_{p\to -a}(p+a)\frac{a}{p(p+a)[1-e^{pT}z^{-1}]}=\frac{z}{z-e^{aT}z^{-1}}$$

Η προέλευση του ανωτέρου τύπου είναι οπως είπαμε η θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, και θα γίνει πιό κατανοητή, στη συνέχεια που θα μιλήσουμε για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ και τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

Δίπλευρος Μετασχηματισμός Ζ

Ο δίπλευρος μετασχηματισμός Ζ ορίζεται ως:

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$$

και αυτός είναι ο πιό ορθός ορισμός για τον μετασχηματισμό Z. Ισχύουν όμως παρόμοιες επισημάνσεις όπως στη περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace. Το κατωτέρω παράδειγμα θα μας δείξει την διαφορά:

<u>Παράδειγμα:</u>

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Z των συναρτήσεων:

$$f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ e^{at}, t\geq 0 \end{cases}$$

Εχουμε

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^{n}$$

που συγκλίνει όταν $\left|\frac{e^{aT}}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>e^{aT}$

αρα,

$$F(z)=\frac{1}{1-\frac{e^{aT}}{z}}=\frac{z}{z-e^{aT}}$$

Τώρα για την συνάρτηση:

$$f(t)=\begin{cases}-e^{at}, t<0\\ 0, t\geq 0\end{cases}$$

Τότε έχουμε:

$$F(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{anT} z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(e^{-aT} z\right)^{m} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-aT} z\right)^{n+1} = -e^{-aT} z \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-aT} z\right)^{n}$$

για $|z|<e^{aT}$ συγκλίνει και

$$\Rightarrow F(z)=-e^{-aT} z \frac{1}{1-e^{-aT} z}=\frac{z}{z-e^{aT}}$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

Οπως παρατηρούμε, οι μετασχηματισμοί Ζ των δύο συναρτήσεων είναι ιδιοι παρα το γεγονός οτι έχουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις. Για να είναι λοιπόν αμφιμονοσήμαντος ο μετασχηματισμός Ζ πρέπει εφ’ όσον δεν χρησιμοποιούμε τον δίπλευρο μετασχηματισμό Ζ, να προσδιορίζουμε την αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης.

Παραδείγματα γνωστών συναρτήσεων

<u>1.Βηματική συνάρτηση:</u>

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

2. Μοναδιαία ράμπα:

$$x(t)=\begin{cases} t, t\geq 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k}=T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}=T\left(z^{-1}+2z^{-1}+3z^{-3}+\dots\right)$$

$$=T\left(\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}\right)=\frac{Tz}{\left(z-1\right)^{2}}$$

3. Πολυωνυμική συνάρτηση:

$$x(k)=\begin{cases} a^{k}, k=0,1,2,\dots \\ 0, k<0 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a^{k}z^{-k}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

4. Εκθετική συνάρτηση:

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at}, t\geq 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k}=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

5.Ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$x(t)=\begin{cases}\sin\omega t, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

Επειδή,

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$$

1.4 Εύρεση αντίστροφου μετασχηματισμού Z

Τώρα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z μιάς συνάρτησης αφού πρώτα δώσουμε την έννοια του. Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της προηγούμενης με z^{k-1} και ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη κατα μήος της κλειστής καμπύλης και έχουμε :

$$\oint_C F(z)z^{k-1}dz=\sum_{n=0}^{\infty}f(nt)\oint_C z^{k-n-1}dz$$

Απο το θεώρημα του Cauchy έχουμε οτι $\oint z^{k-n-1}dz = 0, k \neq n$ όταν το σημείο 0 περικλείεται απο την καμπύλη ολοκλήρωσης και $\frac{1}{2\pi j}$, οταν $k = n.$ Εχουμε τότε οτι:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{k-1}dz$$

Κατά την ολοκλήρωση λοιπόν προσπαθούμε να εχουμε κύκλο που να περικλείει τους πόλους της $F(z)$. Συνεχίζουμε τώρα με τις μεθόδους που έχοθμε στη διάθεσή μας για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ μιας συνάρτησης.

Αυτό που πρέπει όμως να τονίσουμε είναι ότι με τον αντίστροφο μετασχηματισμό **δεν μπορούμε να βρούμε την αρχική** $f(t)$**, αλλά την συνάρτηση που έχει υποστεί δειγματοληψία, δηλαδή την** $f(nT)$**.**

1.4.1 Μέθοδος δυναμοσειράς

Από την μορφή του μετασχηματισμού στο πεδίο Ζ είναι προφανές οτι το ανάπτυγμα σε σειρά περιλαμβάνει επίσης τους όρους της συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου, όπως θα φανεί σε λίγο:

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + \ldots + f(nT)z^{-n} + \ldots$$

Ετσι τους όρους αυτούς μπορούμε να τους ανακτήσουμε με μιά πολυωνυμική διαίρεση όπως γίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα:

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2z^{-2}}{1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3}}$$

Κάνω την διαίρεση:

$$\begin{array}{l|l} 2z^{-2} & 1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3} \\ \hline & 0+0z^{-1}+2z^{-2}+8z^{-3}+22z^{-4} \end{array}$$

Αρα,

$$f(0)=0$$
$$f(T)=0$$
$$f(2T)=2$$
$$f(3T)=8$$

.
.
.

1.4.2 Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Οπως και για την εύρεση του μετασχηματισμού Z, αναλύουμε την συνάρτηση σε απλά κλάσματα και με τη βοήθεια πινάκων βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Η μόνη διαφορά είναι οτι για λόγους υπολογιστικής ευκολίας, αναλύουμε σε απλά κλάσματα την $\dfrac{F(z)}{z}$.

Παράδειγμα:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2}{z-2} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1}$$

Δηλαδή,

$$F(z) = 2\left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}\right]$$

$$\Rightarrow f(nT) = 2\left[2^{nT} - nT - 1\right]$$

1.4.3 Μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Οπως προαναφέρθηκε, αυτό που επιδιώκουμε είναι να βρούμε την $f(nT)$ από την $F(z)$. Για να δούμε πώς ακριβώς καταλήγουμε στον τύπο των ολοκληρωτικών υπολοίπων που θα χρησιμοποιούμε, θα χρειαστούμε κάποια στοιχεία μιγαδικής ανάλυσης.

Εστω οτι z_0 είναι ένας πόλος της $F(z)$. Η επέκταση σε σειρά Laurent της συνάρτησης αυτής γύρω από το σημείο z_0 είναι:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}$$

όπου

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{F_1}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{F_2}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$$

όπως είναι γνωστό από την μιγαδική ανάλυση και ειδικότερα από το θεώρημα του Cauchy. Ο συντελεστής b_1 , ειδικότερα είναι:

$$b_1=\frac{1}{2\pi j}\oint_{F_2}F(z)dz$$

και ανομάζεται το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $F(z)$. Από αυτό το ολκληρωτικό υπόλοιπο θα βρούμε την συνάρτησή μας.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Z ισχύει:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\ldots+f(kT)z^{-k}+\ldots$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με z^{k-1} και παίρνουμε:

$$F(z)z^{k-1}=f(0)z^{k-1}+f(T)z^{k-2}+f(2T)z^{k-3}+\ldots+f(kT)z^{-1}+\ldots$$

Αυτή είναι η επέκταση σε σειρά Laurent της συνάρτησης $F(z)z^{k-1}$ στο σημείο $z=0$.

Αν θεωρήσουμε ένα κύκλο με κέντρο την αρχη των αξόνων, ετσι ωστε όλοι οι πόλοι της $F(z)z^{k-1}$ να βρίσκονται μέσα του, και επειδή όπως φαίνεται το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι το $f(kT)$, συνεπάγεται σύμφωνα με την ανωτέρω ανάλυση ότι:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{k-1}dz$$

Αρα, αν οι πόλοι της $F(z)z^{k-1}$ είναι $z_1, z_2, \ldots z_{m,}$ τότε

$$\oint_C F(z)z^{k-1}dz = \oint_{C_1} F(z)z^{k-1}dz + \oint_{C_2} F(z)z^{k-1}dz + \ldots$$

$$= 2\pi j\left(k_1 + k_2 + \ldots + k_m\right)$$

οπου $k_1, k_2, \ldots$ τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $F(z)z^{k-1}$ στους αντίστοιχους πόλους. Αρα ο γενικός τύπος για την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z μιας συνάρτησης με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι:

$$f(kT) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

Ακόμα για λόγους πληρότητας, άς θυμηθούμε τους τύπους υπολογισμού των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα για *απλό πόλο:*

$$K = \lim_{z \to z_i}\left[(z - z_i)F(z)z^{k-1}\right]$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα για *πολλαπλό πόλο:*

$$K = \frac{1}{(q-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[(z-z_i)^q F(z) z^{k-1}\right]$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος Μ.Ζ. της συνάρτησης

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

Σχηματίζουμε τον όρο

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{aT})}$$

Οι πόλοι της συνάρτησης είναι : $z = z_1 = e^{-aT}$ (απλός πόλος)

$z = z_2 = 1$ (διπλός πόλος)

Αρα,

$$x(kT) = \sum \operatorname{Re}s\left[\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}, z = z_i\right] = R_1 + R_2$$

$$R_1 = (\operatorname{Re}s z = e^{-aT}) = \lim_{z\to e^{-aT}}\left[(z-e^{-aT})\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$R_2 = (\operatorname{Res} z=1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{k+1}}{z-e^{-aT}}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(k+1)z^k(z-e^{-aT}) - z^{k+1}}{(z-e^{-aT})^2} = \frac{k}{1-e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2}$$

και τελικά,

$$x(kT) = R_1 + R_2 = \frac{kT}{T(1-e^{-aT})} - \frac{e^{-aT}(1-e^{-akT})}{(1-e^{-aT})^2}$$

1.5 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μερικά πιό σύνθετα παραδείγματα εύρεσης του μετασχηματισμού Z και του αντίστροφου, στα οποία χρησιμοποιούμε και τις διάφορες ιδιότητες:

1. Να βρεθεί ο Μ.Ζ. της συνάρτησης:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\sin\omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Εχουμε:

$$X(z) = Z\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{1}{2j}Z\left[e^{-at}e^{j\omega t} - e^{-at}e^{-j\omega t}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$=\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}=\frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T+e^{-2aT}}$$

2. Να βρεθεί ο Μ.Ζ. μιάς μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης καθυστερημένης κατά 1 και 4 χρονικές περιόδους.

   Α) Ζητάμε να βρούμε τον μετασχηματισμό:

$$Z\left[(t-T)\right]=z^{-1}Z\left[(t)\right]$$

δηλαδή,

$$Z\left[(t-T)\right]=z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Β) Τώρα αυτό που ζητάμε είναι το:

$$Z\left[(t-4T)\right]=z^{-4}Z\left[(t)\right]=z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}$$

3. Να βρεθεί ο Μ.Ζ. της συνάρτησης:

$$f(a) = \begin{cases} a^{k-1}, k = 1,2,3,\dots \\ 0, k \le 0 \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ιδιότητες του Μ.Ζ. για να εκφράσουμε την συνάρτηση αυτή:

$$Z\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z) \qquad \text{και}$$

$$Z\left[a^{k}\right] = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Ετσι προκύπτει οτι:

$$Z\left[f(a)\right] = Z\left[a^{k-1}\right] = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

4. Να βρεθεί ο Μ.Ζ. της συνάρτησης:

$$y(k) = \sum_{h=0}^{k} x(h), k = 0,1,2,\dots \quad \text{και} \quad y(k) = 0, k < 0$$

Παρατηρούμε πρώτα τα εξής, όσον αφορά την μορφή της δοθείσας συνάρτησης:

$$y(k) = x(0) + x(1) + \ldots + x(k-1) + x(k)$$

$$y(k-1) = x(0) + x(1) + \ldots + x(k-1)$$

Αρα, ισχύει ότι

$$y(k) - y(k-1) = x(k)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$Z\left[y(k) - y(k-1)\right] = Z\left[x(k)\right]$$

$$\Rightarrow Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

5. Να βρεθεί η τελική τιμή της συνάρτησης με μετασχηματισμό:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}, a > 0$$

Οπως είναι γνωστό,

$$x(\infty)=\lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})X(z)\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\left(1-\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)=1$$

Η, διαφορετικά,

$$x(t)=1-e^{-at}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}(1-e^{-at})=1$$

6. Για την παρακάτω συνάρτηση να βρεθούν η αρχική και η τελικη τιμή της:

$$X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

Εχουμε ότι :

$$X(z)=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{a}{1-az^{-1}}\right)$$

Βρίσκουμε οτι ο αντίστροφος Μ.Ζ. είναι:

$$x(k) = \frac{1}{1-a}(1-a^{k+1}) = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

Αρα,

$$x(0) = \lim_{z\to+\infty} X(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1} \left[(1-z^{-1})X(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-a}$$

Εδώ μπορούμε να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση:

Αν $|a| \ge 1$ τότε το $x(\infty)$ είναι <u>μή-φραγμένο.</u> Αυτό σημαίνει οτι η συνθήκη του θεωρήματος τελικής τιμής δέν ισχύει. Οπως θα γίνει κατανοητό αργότερα, αυτό είναι ισοδύναμο με το οτι οι ιδιοτιμές της $X(z)$ δεν είναι όλες μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Αυτός είναι και ένας εναλλακτικος τρόπος διατύπωσης της συνθήκης του θεωρήματος, οτι δηλαδή, οταν οι ιδιοτιμές της $X(z)$ είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, ισοδυναμεί με το ότι η $x(k)$ είναι πεπερασμένη.

1.6 Εφαρμογή του Μ.Ζ. σε συστήματα διακεκριμένου χρόνου

Ισως η πιό προφανής αλλά και η περισσότερο χρήσιμη εφαρμογή του μετασχηματισμού Ζ είναι η επίλυση των εξισώσεων διαφορών. Οι εξισώσεις διαφορών όπως είδαμε, είναι το ψηφιακού χρόνου ανάλογο των διαφορικών εξισώσεων. Αντί για την έννοια της παραγώγου (με την βοήθεια της οποίας περιγράφουμε την μεταβολή κάποιου μεγέθους), έχουμε την έννοια της καθυστέρησης στο χρόνο, με την οποία περιγράφουμε σε ψηφιακό χρόνο την μεταβολή των μεγεθών.

Ενας τρόπος να επιλύσουμε διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές είναι ως γνωστόν, η χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Με αυτή την μέθοδο, μετασχηματίζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο πεδίο της συχνότητας και καταλήγουμε σε μιά αλγεβρική εξίσωση η οποία εν γένει είναι ευκολότερο να λυθεί από μια διαφορική εξίσωση.

Την ίδια διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε για να επιλύσουμε εξισώσεις διαφορών με τον μετασχηματισμό Ζ.

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης διαφορών είναι:

$$a_p y(kT+pT) + a_{p-1} y(kT+pT-T) + \ldots + a_1 y(kT+T) + a_0 y(kT) =$$

$$= b_m x(kT+mT) + \ldots + b_1 x(kT+T) + b_0 u(kT)$$

Μπορούμε βέβαια να λύσουμε την εξίσωση αυτή με κάποια από τις μεθόδους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων. Οπως π.χ. εύρεση της λύσης της ομογενούς εξίσωσης και μετα χρήση της μεταβολής των παραμέτρων ή των απροσδιόριστων συντελεστών για την εύρεση της λύσης της μη-ομογενους εξίσωσης.

Η χρήση του μετασχηματισμού Ζ θα περιγραφτεί καλύτερα με το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$a_3 y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_3 x(k+3) + b_2 x(k+2) + b_1 x(k+1) + b_0 x(k)$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Z των δύο μελών:

$$[a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0] Y(z) - z^3 [a_3 y(0)] - z^2 [a_3 y(1) + a_2 y(0)] - z [a_3 y(2) + a_1 y(0) + a_0 y(0)]$$

$$= [b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0] X(z) - z^3 [b_3 x(0)] - z^2 [b_3 x(1) + b_2 x(0)] - z [b_3 x(2) + b_2 x(1) + b_1 x(0)]$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες δίνουμε τιμές στο κ:

$k = -3 \qquad \Rightarrow a_3 y(0) = b_3 x(0)$

$k = -2 \qquad \Rightarrow a_3 y(1) + a_2 y(0) = b_3 x(1) + b_2 x(0)$

$k = -1 \qquad \Rightarrow a_3 y(2) + a_2 y(1) + a_1 y(0) = b_3 x(2) + b_2 x(1) + b_1 x(0)$

Από αυτό καταλήγουμε στην σχέση:

$$Y(z) = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} X(z)$$

απο την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z και να βρούμε την $y(kT)$.

Παράδειγμα 2 :

Για το σύστημα ανοικτού βρόχου με μηδενικές αρχικές συνθήκες να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς:

$$y(kT) = -2y[(k-1)T] + y[(k-2)T] + x(kT) - 0.5x[(k-2)T]$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Ζ των δύο μελών, λαμβάνοντας υπ' όψη οτι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν :

$$Y(z) = -2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + X(z) - 0.5z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow (1 + 2z^{-1} - z^{-2})Y(z) = (1 - 0.5z^{-2})X(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} \equiv G(z) = \frac{1 - 0.5z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - z^{-2}}$$