Ψηφιακός Έλεγχος

6η διάλεξη

Σχεδίαση στο χώρο κατάστασης

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Έστω γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Εφαρμόζουμε γραμμικό νόμο ελέγχου (ανατροφοδότηση κατάστασης): $u(k) = -Kx(k)$

Το κλειστό σύστημα θα είναι $x(k+1) = (A - BF)x(k)$

με αποτέλεσμα την μετατόπιση των ιδιοτιμών (πόλων) του συστήματος σε νέες θέσεις.

Ο στόχος είναι να επιλέξουμε το πίνακα΄F ώστε το κλειστό σύστημα να έχει κάποια επιθυμητή συμπεριφορά (ευστάθεια, ταχύτητα απόκρισης, εύρος ζώνης).

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Οι ιδιοτιμές του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i) = |zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

Θέλουμε να βρούμε ένα πίνακα F ώστε οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος να είναι $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ με αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p^*(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i^*) = |zI - A + BF| = z^n + a_1^* z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^* z + a_n^*$$

Πότε όμως είναι δυνατό να ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει οποιεσδήποτε ιδιοτιμές ;

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Θεώρημα

Υπάρχει πίνακας ανατροφοδότησης κατάστασης F ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει οποιεσδήποτε νέες ιδιοτιμές αν και μόνο αν το σύστημα ανοιχτού βρόχου είναι ελέγξιμο, δηλαδή αν και μόνο αν $rank S = n$

όπου $S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ *ο πίνακας ελεγξιμότητας.*

Έτσι, αν το ανοικτό σύστημα δεν είναι ελέγξιμο, υπάρχει τουλάχιστο μία ιδιοτιμή του πίνακα A που παραμένει ίδια κάτω από οποιοδήποτε γραμμικό νόμο ελέγχου ανατροφοδότησης κατάστασης.

Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε δυναμικούς ρυθμιστές , όπως PID ελεγκτές.

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Θεωρούμε ένα ελέγξιμο σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$

ο έλεγχος είναι γραμμικός της μορφής $u(k) = f^T x(k)$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$p^*(z) = \prod_{i=1}^{n}\left(z - \lambda_i^*\right) = \left|zI - A + Bf^T\right| = z^n + a_1^* z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^* z + a_n^*$$

Ποιο είναι το διάνυσμα *f* ώστε το κλειστό σύστημα να έχει ιδιοτιμές $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$;

Τύπος του Ackermann (1) $f = \left[W^T S^T\right]^{-1}\left(a^* - a\right)$

όπου $W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & a_{n-2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $a^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ . \\ . \\ a_n^* \end{bmatrix}$ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Στην περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε κανονική ελέγξιμη μορφή με

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε το γινόμενο $W^T S'^T$ έχει τη μορφή

$$W^T S'^T = \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ .. & .. & .. & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$f' = \overline{I}\left(a^* - a\right) = \begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ . \\ . \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Τύπος του Ackermann (2)

Μια εναλλακτική μορφή του τύπου είναι: $f^T = e^T S^{-1} p^*(A)$

όπου $e^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

και $p^*(A)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με όρισμα τον πίνακα A:

$$p^*(A) = A^n + a_1^* A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^* A + a_n^* I$$

Στην περίπτωση που όπου το σύστημα είναι πολλών εισόδων, ο υπολογισμός του πίνακα F είναι δύσκολος. Το πρόβλημα μπορεί να παρακαμφθεί με την εξής προσέγγιση: Θεωρούμε ότι ο πίνακας F είναι της μορφής $F = qp^T$ όπου q, p είναι διανύσματα διάστασης n:

Τότε: $A - BF = A - Bqp^T = A - bp^T$ όπου $b = Bq$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Όπως παρατηρούμε, γίνεται αναγωγή στο πρόβλημα εύρεσης του πίνακα F για σύστημα μίας εισόδου.

Παρατήρηση:

Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο αν $rank\tilde{S} = n$

όπου $\tilde{S} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$ και $b = Bq$

Παράδειγμα:

Θεωρούμε σύστημα της μορφής $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$

με $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί το διάνυσμα **f** ώστε οι ιδιοτιμές του συστήματος να είναι $\hat{\lambda}_1 = -1, \quad \hat{\lambda}_2 = 0.5$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Λύση:

Έχουμε $p(z) = |zI - A| = z^2 + 1$ ενώ $\hat{p}(z) = \left(z - \hat{\lambda}_1\right)\left(z - \hat{\lambda}_2\right) = z^2 + 0.5z - 0.5$

Μέθοδος 1η :

Καθως το σύστημα βρίσκεται σε κανονική ελέγξιμη μορφή ,το διάνυσμα **f** δίνεται κατευθείαν απο τη σχέση

$$f = f^* = \begin{bmatrix} \hat{a}_2 - a_2 \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος 2η :

Από τη σχέση $f = \left[W^T S^T\right]^{-1}\left(\hat{a} - a\right)$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Επομένως $$W^T S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $$\left(W^T S^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι $$f = \left[W^T S^T\right]^{-1} \left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

<u>Μέθοδος 3η :</u>

Θα εφαρμόσουμε τη 2η μέθοδο του Ackermann $f^T = e^T S^{-1} p^* \left(A\right)$

$$\hat{p}\left(A\right) = A^2 + \hat{a}_1 A + \hat{a}_2 I = A^2 + 0.5A - 0.5I =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 + 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

(συνέχεια)

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι

$$f^T = e^T S^{-1} p^*(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Και οι τρεις μέθοδοι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$

με $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί τό διάνυσμα **f** ώστε οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος να είναι

$$\hat{\lambda}_1 = -0.5, \quad \hat{\lambda}_2 = 0, \quad \hat{\lambda}_3 = 0$$

Λύση:

Έχουμε $$p(z) = |zI - A| = z^3 - 1$$

και $$\hat{p}(z) = (z - \hat{\lambda}_1)(z - \hat{\lambda}_2)(z - \hat{\lambda}_3) = z^3 + 0.5z^2$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Μέθοδος 1η :

Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κανονική ελέγξιμη μορφή έχουμε

$$f = f^* = \begin{bmatrix} \hat{a}_3 - a_3 \\ \hat{a}_2 - a_2 \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$f^* = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0+0 \\ 0.5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος 2η :

Από τη σχέση $f = \left[W^T S^T\right]^{-1}\left(\hat{a} - a\right)$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

$$W^T S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \left(W^T S^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τελικά

$$f = \left(W^T S^T\right)^{-1} \left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

<u>*Μέθοδος 3η :*</u>

$$\hat{p}\left(A\right) = A^3 + \hat{a}_1 A^2 + \hat{a}_2 A + \hat{a}_3 I = A^3 + 0.5 A^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι

$$f^T = e^T S^{-1} \hat{p}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$

Υπάρχει πίνακας μετασχηματισμού $T = W^{-1}S^{-1}$ ο οποίος μεταχηματίζει στο σύστημα

$$z(k+1) = \tilde{A}z(k) + \tilde{b}z(k)$$

όπου οι πίνακες είναι στην κανονική ελέγξιμη μορφή

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για τα συστήματα (A, b) $(\tilde{A}, \tilde{b})$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$z(k) = Tx(k), \quad \tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{b} = Tb, \quad \tilde{S} = TS, \quad \tilde{S} = W^{-1}$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Να αποδειχτεί η σχέση $f^T = e^T S^{-1} \hat{p}(A)$

<u>Λύση:</u>

Έστω $\tilde{f}^T$ το ζητούμενο διάνυσμα για το μετασχηματισμένο σύστημα.

Είναι φανερό ότι $\tilde{f}^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 & \tilde{a}_2 - a_2 & \ldots & \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix}$

Το θεώρημα Caley-Hamilton δηλώνει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση. Επειδή 2 όμοιοι πίνακες όπως οι $A, \tilde{A}$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο , για τον πίνακα $\tilde{A}$ το θεώρημα Caley-Hamilton θα είναι

$$\tilde{A}^n + a_1 \tilde{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \tilde{A} + a_n I = 0$$

Έτσι, ο πίνακας $\tilde{A}$ θα είναι

$$\tilde{A}^n = -\hat{a}_1 \tilde{A}^{n-1} - \ldots - \hat{a}_{n-1} \tilde{A} - \hat{a}_n I$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στη

$$\hat{p}\left(\tilde{A}\right) = \tilde{A}^n + \hat{a}_1\tilde{A}^{n-1} + \ldots + \hat{a}_{n-1}\tilde{A} + \hat{a}_n I$$

έχουμε $$\hat{p}\left(\tilde{A}\right) = \left(\hat{a}_1 - a_1\right)\tilde{A}^{n-1} + \ldots + \left(\hat{a}_{n-1} - a_{n-1}\right)\tilde{A} + \left(\hat{a}_n - a_n\right)I$$

Αν εξετάσουμε τον πίνακα $\tilde{A}^k$ παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής του είναι μηδέν, εκτός απο το στοιχείο στην θέση n-k. Επομένως, το διάνυσμα **f** που δίνεται απο τη σχέση $\tilde{f}^T = \left[\tilde{a}_1 - a_1 \quad \tilde{a}_2 - a_2 \quad \ldots \quad \tilde{a}_n - a_n\right]$ γράφεται ως εξής:

$$\tilde{f}^T = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1\right]\hat{p}\left(\tilde{A}\right)$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε τη σχέση $\tilde{A} = TAT^{-1}$

$$f^T = \tilde{f}^T T = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1\right]\hat{p}\left(TAT^{-1}\right)T = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1\right]T\hat{p}\left(A\right)$$

Μέθοδος μετατόπισης ιδιοτιμών

Επειδή $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και χρησιμοποιώντας τη $T = W^{-1}S^{-1}$

έχουμε

$$f^T = e^T W^{-1} S^{-1} \hat{p}\left(A\right) = e^T \tilde{S} S^{-1} \hat{p}\left(A\right) = e^T S^{-1} \hat{p}\left(A\right)$$

Έλεγχος deadbeat

Η λύση του κλειστού συστήματος $x(k+1)=(A-BF)x(k)$

είναι $x(k)=(A-BF)^k x(0)$ όπου x(0) η αρχική συνθήκη του διανύσματος κατάστασης.

Αν οι ιδιοτιμές $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n$ του πίνακα A-BK είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές , πράγμα που σημαίνει ότιωω $x(k)\to 0$ όταν $k\to\infty$

Για την ειδική περίπτωση όπου $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \ldots = \hat{\lambda}_n = 0$ συμβαίνει κάτι πολύ ενδιαφέρον:
Το διάνυσμα x(k) θα γίνει μηδέν για $k \le n$ Έτσι, το κλειστό σύστημα θα έλθει και θα παραμείνει σε πλήρη ακινησία το πολύ σε n δειγματοληψίες. Έλεγχος τέτοιας μορφής ονομάζεται deadbeat και έχει εξαιρετικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Είναι προφανές ότι για να επιτύχουμε έλεγχο deadbeat θα πρέπαι να επιλέξουμε τον πίνακα F ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα (A-BF) να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\hat{p}(z)=\left|zI-A+BF\right|=z^n$$

Έλεγχος deadbeat

Το προηγούμενο είναι εφικτό αν το σύστημα (A,B) είναι ελέγξιμο.

Παρατήρηση:

Καθώς στον έλεγχο deadbeat ο χρόνος αποκατάστασης είναι μικρότερος η ίσος με nT , ο χρόνος δειγματοληψίας T επηρεάζει σημαντικά το πλάτος του σήματος ελέγχου u(kT).

Έτσι, όσο πιο γρήγορα θέλουμε το x(kT) να φτάσει στο μηδέν (μικρό nT) τόσο πιο μεγάλη προσπάθεια πρέπει να καταβάλλουμε (μεγάλο πλάτος του u(kT)).

Ή επιλογή του T πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο δειγματοληψίας του Shannon αλλά και το πλάτος του u(kT) να είναι σε ανεκτά όρια. Μόνο έτσι ο έλεγχος deadbeat μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το σύστημα βρίσκεται στην κανονική ελέγξιμη μορφή και το διάνυσμα **f** δίνεται απο τη σχέση

$$f^* = \tilde{I}\left(\hat{a} - a\right) = \left[\hat{a}_n - a_n \quad \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} \quad \ldots \quad \hat{a}_1 - a_1\right]^T$$

Έλεγχος deadbeat

Επειδή ο έλεγχος είναι deadbeat τότε $f^* = \tilde{I}\left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}^T$

Για αυτήν την τιμή του f, ο πίνακας $A - bf^T$ θα πάρει τη μορφή (πίνακας nilpotent)

$$A - bf^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\left(A - bf^T\right)^n = 0$

Έτσι $$x\left(k\right) = \left(A - bf^T\right)^k x\left(0\right) = 0, \quad k \geq n$$

Έλεγχος deadbeat

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το σύστημα του διπλού ολοκληρωτή $Y(s) = \frac{1}{s^2} U(s)$

Μια περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης είναι

$$\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{b}u(t), \quad y(t) = \overline{c}^T x(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου είναι

$$x((k+1)T) = Ax(kT) + bu(kT), \quad y(kT) = c^T x(kT)$$

όπου $c = \overline{c}$

Έλεγχος deadbeat

Οι πίνακες A, b υπολογίζονται :

$$A = e^{\bar{A}t} = \left(L^{-1}\left(sI - A\right)^{-1}\right)_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \left(\int_0^T e^{\bar{A}\lambda} d\lambda\right)\bar{b} = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\lambda\right)\bar{b} = \begin{bmatrix} 0.5T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

Να προσδιοριστεί ένα διάνυσμα f για έλεγχο deadbeat. Να μελετηθεί το u(0) και u(T) για διάφορες τιμές του T και όταν το διάνυσμα αρχικών συνθηκών είναι $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

<u>*Λύση:*</u>

$$f = \left[W^T S^T\right]^{-1}\left(\hat{a} - a\right)$$

Έχουμε $\quad \left|zI - A\right| = \left(z-1\right)^2 = z^2 - 2z + 1, \qquad \hat{p}\left(z\right) = z^2$

Έλεγχος deadbeat

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 1.5T^2 \\ T & T \end{bmatrix}$$

$$W^T S^T = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & T \\ 0.5T^2 & -T \end{bmatrix} \qquad \left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, $$f = \left[W^T S^T\right]^{-1}\left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} 1/T^2 & 1/T^2 \\ 1/2T & -1/2T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/T^2 \\ 3/2T \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του κλειστού συστήματος είναι $$A - bf^T = \begin{bmatrix} 1/2 & T/4 \\ -1/T & -1/2 \end{bmatrix}$$

Έλεγχος deadbeat

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστου συστήματος είναι

$$\hat{p}(z) = \left| zI - A + bf^T \right| = \begin{vmatrix} z - 0.5 & -T/4 \\ 1/T & z + 0.5 \end{vmatrix} = z^2$$

Επίσης έχουμε $\left(A - bf^T\right)^q = 0, \quad q > 1$

Έτσι, $x(kT) = 0, \quad k > 1$

Για το σήμα ελέγχου u(kT): $u(kT) = -f^T x(kT) = -\begin{bmatrix} 1/T^2 & 3/2T \end{bmatrix} x(kT)$

Για k=0 $$u(0) = -\begin{bmatrix} 1/T^2 & 3/2T \end{bmatrix} x(0) = -\left(\frac{1}{T^2} x_1(0) + \frac{3}{2T} x_2(0) \right)$$

Για k=1 $$u(T) = f^T \left(A - bf^T\right) x(0) = \frac{1}{T^2} x_1(0) + \frac{1}{2T} x_2(0)$$

Έλεγχος deadbeat

Για k=2 $$u(2T) = f^T \left(A - bf^T\right)^2 x(0) = 0$$

Για $$x^T(0) = \left[x_1(0) \quad x_2(0)\right]^T = \left[1 \quad 1\right]^T$$

έχουμε $$u(0) = -\left(1/T^2 + 3/2T\right)$$

και $$u(0) = 1/T^2 + 1/2T$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές του ελέγχου για τρεις διαφορετικούς χρόνους δειγματοληψίας:

T	100	10	1	0.1	0.01
u(0)	-0.0151	-0.16	-2.5	-115	-10150
u(1)	0.0051	0.06	1.5	105	10050

Παρατηρητές

Πολλές φορές δεν είναι δυνατό να μετρηθούν όλες οι καταστάσεις ενός δυναμικού συστήματος.

Αν έχουμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα κατάστασης από ήδη μετρημένες εισόδους και εξόδους.

Υπάρχουν 2 τρόποι εκτίμησης του διανύσματος κατάστασης:

1. Εκτίμηση με βάση τις εισόδους και τις εξόδους του συστήματος.
2. Εκτίμηση χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό σύστημα (παρατηρητής κατάστασης)

Απευθείας υπολογισμός

Θεωρούμε το γραμμικό δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Γνωρίζουμε τις τιμές των εισόδων και εξόδων όλες τις προηγούμενες χρονικές στιγμές:

$$y(k), y(k-1), .. \quad u(k), u(k-1), ..$$

Για τη γενική περίπτωση αλλά με βαθμωτή έξοδο έχουμε

$$y(k-n+1) = c^T x(k-n+1)$$
$$y(k-n+2) = c^T Ax(k-n+1) + c^T Bu(k-n+1)$$

.

.

$$y(k) = c^T A^{n-1} x(k-n+1) + c^T A^{n-2} Bu(k-n+1) + \dots +^T c^T Bu(k-1)$$

Απευθείας υπολογισμός

Γράφοντας τις παραπάνω εξισώσεις σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ . \\ . \\ y(k) \end{bmatrix} = Ox(k-n+1) + \Omega \begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ . \\ . \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

με $$O = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ . \\ . \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 \\ c^T B & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c^T A^{n-2} B & c^T A^{n-3} B & . & . & c^T B \end{bmatrix}$$

Απευθείας υπολογισμός

Φαίνεται καθαρά ότι ο πίνακας Ο είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας. Αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμό (*rankO=n*) τότε ο πίνακας Ο είναι αντιστρέψιμός.

Έτσι:

$$x(k-n+1) = O^{-1}\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ . \\ . \\ y(k) \end{bmatrix} - O^{-1}\Omega\begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ . \\ . \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Επίσης $x(k-n+2) = Ax(k-n+1) + Bu(k-n+1) =$

$$A\left[O^{-1}\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ . \\ . \\ y(k) \end{bmatrix} - O^{-1}\Omega\begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ . \\ . \\ u(k-1) \end{bmatrix}\right] + Bu(k-n+1)$$

Απευθείας υπολογισμός

Τελικά

$$x(k) = A^n O^{-1} \begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ . \\ . \\ y(k) \end{bmatrix} + \Psi \begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ . \\ . \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

όπου $\Psi = \begin{bmatrix} A^{n-2}B & A^{n-3}B & . & . & B \end{bmatrix} - A^{n-1}O^{-1}\Omega$

Ο υπολογισμός του διανύσματος κατάστασης γίνεται μετά από το πολύ n βήματα (για αυτό και ο παρατηρητής ονομάζεται deadbeat).

Θεώρημα

Το διάνυσμα κατάστασης μπορεί να υπολογιστεί απο μετρήσεις εισόδων και εξόδων αν και μόνο αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Απευθείας υπολογισμός

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το σύστημα του διπλού ολοκληρώτη απο προηγούμενο παράδειγμα, το οποίο έχει υποστεί δειγματοληψία. Το ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου είναι

$$x\big((k+1)T\big) = Ax(kT) + bu(kT), \quad y(kT) = c^T x(kT)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.5T^2 \\ T \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι μεταβλητές κατάστασης ως συναρτήσεις των u(kT) και y(kT).

Λύση:

Ο πίνακας παρατηρισιμότητας είναι R είναι $R = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix}$

Απευθείας υπολογισμός

Επίσης $$R^{-1}=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}T & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/T & 1/T\end{bmatrix}$$

έχουμε $$R^{-1}\Omega=R^{-1}\begin{bmatrix}0\\ c^T b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/T & 1/T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ T^2/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T/2\end{bmatrix}$$

έτσι

$$\Psi=B-AR^{-1}\Omega=\begin{bmatrix}T^2/2\\ T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ T/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T/2\end{bmatrix}$$

Επίσης

$$A^{n-1}R^{-1}=AR^{-1}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/T & 1/T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/T & 1/T\end{bmatrix}$$

Απευθείας υπολογισμός

Τελικά $$x(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/T & 1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(kT-T) \\ y(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T/2 \end{bmatrix} u(kT-T)$$

ή $$x(kT) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/T \end{bmatrix} y(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T \end{bmatrix} y(kT-T) + \begin{bmatrix} 0 \\ T/2 \end{bmatrix} u(kT-T)$$

Από την εξίσωση εισόδου $$y(kT) = c^T x(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(kT) = x_1(kT)$$

Φαίνεται ότι η πρώτη μεταβλητή κατάστασης μετριέται απευθείας απο την έξοδο ενώ η δεύτερη μεταβλητή κατάστασης μετριέται απο την παραπάνω σχέση , όπου τελικά είναι

$$x_2(kT) = \frac{y(kT) - y(kT-T)}{T} + \frac{T}{2} u(kT-T)$$

Απευθείας υπολογισμός

Παρατήρηση:

Ο κατευθείαν υπολογισμός του διανύσματος κατάστασης έχει το πλεονέκτημα ότι επιτυγχάνεται σε n το πολύ βήματα.

Όμως, η τεχνική αυτή εχει το μειονέκτημα ότι μπορεί να είναι ευαίσθητη σε διαταραχές.

Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η ανακατασκευή του διανύσματος κατάστασης όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω

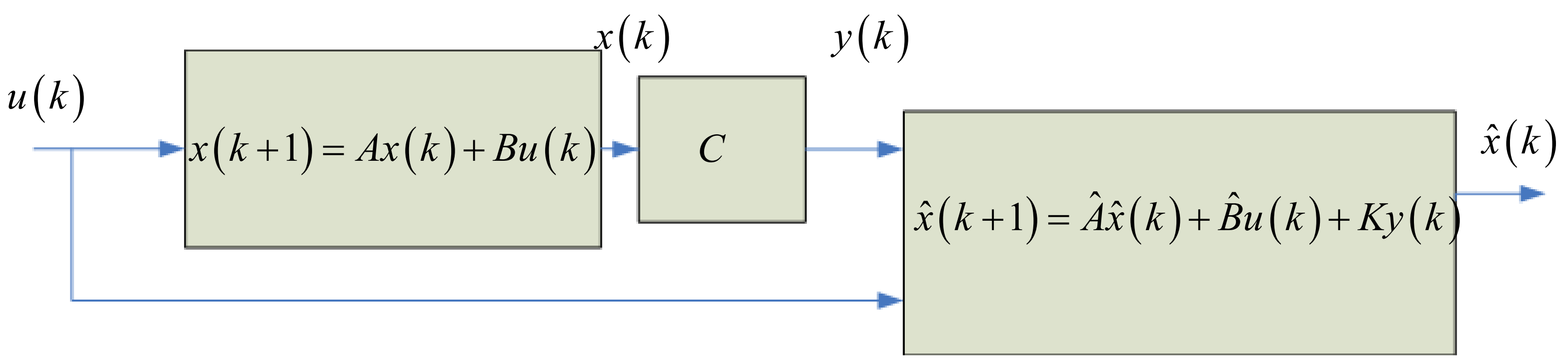
Παρατηρητής κατάστασης

Θεωρούμε ότι το διάνυσμα κατάστασης προσεγγίζεται από την κατάσταση $\hat{x}(k)$ του μοντέλου

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) + Ky(k)$$

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, ο παρατηρητής κατάστασης έχει δύο εισόδους, το διάνυσμα εισόδου *u(k)* και το διάνυσμα εξόδου *y(k)*.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου τα διανύσματα $x(k)$ και $\hat{x}(k)$ έχουν τις ίδιες διαστάσεις (παρατηρητής πλήρους τάξης).



Παρατηρητής κατάστασης

Ορίζουμε το σφάλμα $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

Πρέπει να προσδιοριστούν οι πίνακες $\hat{A}, \hat{B}, K$ ώστε το σφάλμα e(k) να τείναι στο μηδέν:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - \hat{A}\left[x(k) - e(k)\right] - \hat{B}u(k) - KCx(k)$$

$$e(k+1) = \hat{A}e(k) + \left[A - KC - \hat{A}\right]x(k) + \left[B - \hat{B}\right]u(k)$$

Όπως φαίνεται απο τα παραπάνω,

για να τείνει το σφάλμα στο μηδέν πρέπει

$$\hat{A} = A - KC = B$$

$$\hat{B} = B$$

$\hat{A}$ ευσταθής

Παρατηρητής κατάστασης

Η εξίσωση διαφορών του σφάλματος είναι $e(k+1) = \hat{A}e(k) = [A - KC]e(k)$

Έτσι, ο παρατηρητής κατάστασης περιγράφεται απο την εξίσωση :

$$\hat{x}(k+1) = [A - KC]\hat{x}(k) + Bu(k) + Ky(k)$$

ή

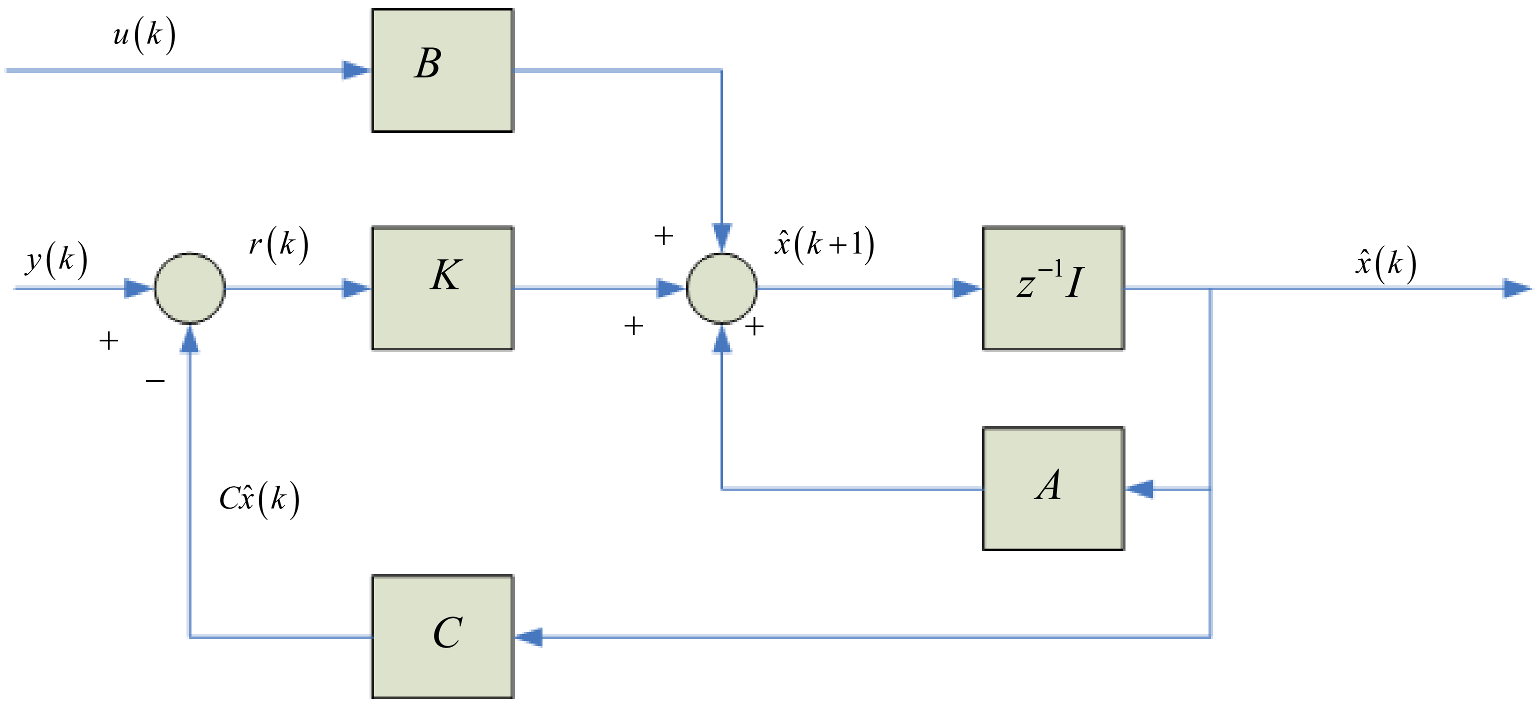
$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$$

Παρατηρήσεις

1. Ο πίνακας K υπολογίζεται έτσι ώστε ο πίνακας A-KC να έχει ιδιοτιμές μέσα στο μοναδιαίο κύκλο
2. Ο παρατηρητής μπορεί να θεωρηθεί μπορεί να θεωρηθεί σαν το αρχικό σύστημα μαζί με τον επιπλέον όρο $K\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$

Παρατηρητής κατάστασης

Το δομικό διάγραμμα του παρατηρητή φαίνεται παρακάτω:



Σε αντιστοιχία με το πρόβλημα του ρυθμιστή, για να υπάρχει πίνακας K ώστε ο πίνακας $A-KC$ να παίρνει αυθαίρετες ιδιοτιμές πρέπει το σύστημα να είναι παρατηρήσιμο.

Παρατηρητής κατάστασης

Παρατήρηση

Υπενθυμίζουμε ότι για να υπάρχει γραμμικός ρυθμιστής που να τοποθετεί αυθαίρετα τις ιδιοτιμές ενός συστήματος πρέπει το σύστημα να είναι ελέγξιμο, ή

$$rankS = n \qquad \text{όπου} \qquad S = \begin{bmatrix} B & AB & . & . & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Κατά αντιστοιχία , στην περίπτωση του παρατηρητή υπάρχει πίνακας K ώστε ο $\hat{A}^T = A^T - C^T K^T$ να έχει αυθαίρετες ιδιοτιμές αν και μόνο αν το σύστημα $\left(A^T, C^T\right)$ είναι ελέγξιμο, ή ισοδύναμα, το σύστημα $\left(A, C\right)$ είναι παρατηρήσιμο:

$$rankR = n \qquad \text{όπου} \qquad R = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & . & . & \left(A^T\right)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

Όπως φαίνεται οι παραπάνω συνθήκες είναι δυικές.

Παρατηρητής κατάστασης

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου το γραμμικό σύστημα είναι μιας εξόδου. Τότε , ο πίνακας C είναι μια γραμμή , οπότε ο πίνακας R είναι ο τετραγωνικός nxn :

$$R = \begin{bmatrix} c & A^T c & . & . & \left(A^T\right)^{n-1} c \end{bmatrix}$$

Επίσης ο πίνακας $\hat{A}$ είναι $\hat{A} = A - kc^T$

όπου $k^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$

Όπως στην περίπτωση του ελεγκτή, έχουμε

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(z - \lambda_i\right) = \left|zI - A\right| = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

$$\hat{p}(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(z - \hat{\lambda}_i\right) = \left|zI - \hat{A}\right| = z^n + \hat{a}_1 z^{n-1} + \dots + \hat{a}_{n-1} z + \hat{a}_n$$

Για την περίπτωση όπου το σύστημα είναι μιας εξόδου το απαιτούμενο διάνυσμα **k** για να έχει ο παρατηρητής τις επιθυμητές ιδιοτιμές είναι μοναδικό

Παρατηρητής κατάστασης

Ένας τύπος που οδηγεί στον προσδιορισμό του k είναι $k = \left(W^T R\right)^{-1}\left(\hat{a} - a\right)$

όπου

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & ... & a_{n-1} \\ 0 & 1 & ... & a_{n-2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ . \\ . \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ . \\ . \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση όπου το σύστημα είναι πολλών εξόδων, ο προσδιορισμός του πίνακα K είναι συνήθως πολύπλοκος. Μια απλή προσέγγιση στο πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας K έχει τη μορφή $K = qp^T$

όπου q, p διανύσματα διαστάσεων n.

Παρατηρητής κατάστασης

Τότε,

$$\hat{A} = A - KC = A - qp^T C = A - q\gamma^T$$

$$\gamma^T = p^T C$$

Με αυτόν τον τρόπο η λύση για το διάνυσμα q είναι σαν να ήταν το σύστημα μιας εξόδου. Βέβαια, το διάνυσμα **γ** αυθαίρετες παραμέτρους και συγκεκριμένα τα στοιχεία του αυθαίρετου διανύσματος **p**. Οι αυθαίρετες αυτές παράμετροι μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές , αρκεί $rank\tilde{R} = n$ όπου R ο πίνακας

$$\tilde{R} = \left[\gamma \quad A^T\gamma \quad \dots \quad \left(A^T\right)^{n-1}\gamma \right]$$

Παρατηρητής κατάστασης

Παράδειγμα:

Για το σύστημα διπλού ολοκληρωτή $x\left(\left(k+1\right)T\right)=Ax\left(kT\right)+bu\left(kT\right),\quad y\left(kT\right)=c^{T}x\left(kT\right)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}0.5T^{2}\\ T\end{bmatrix}\qquad c=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

να σχεδιαστεί παρατηρητής κατάστασης τέτοιος ώστε το σφάλμα e(k) να είναι deadbeat.

$$e\left(k\right)=x\left(k\right)-\hat{x}\left(k\right)$$

Λύση:

Έχουμε $R=\begin{bmatrix}c^{T}\\ c^{T}A\end{bmatrix}$ οπότε rank(R)=2 επομένως το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Επίσης

$$p\left(z\right)=\left|zI-A\right|=z^{2}-2z+1$$

$$\hat{p}\left(z\right)=\left|zI-\hat{A}\right|=\left|zI-A-kc^{T}\right|=z^{2}$$

Παρατηρητής κατάστασης

Έχουμε

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W^T R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & T \end{bmatrix} \qquad \left(W^T R\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/T & 1/T \end{bmatrix}$$

$$k = \left(W^T R\right)^{-1} \left(\hat{a} - a\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/T & 1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/T \end{bmatrix}$$

Παρατηρητής κατάστασης

Θα κάνουμε επαλήθευση

$$\hat{A} = A - kc^T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1/T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -1/T & 1 \end{bmatrix}$$

το σφάλμα είναι $e(k) = x(k) - \hat{x}(k) = \left(A - kc^T\right) e(k-1)$

Για k=0 έχουμε $e(0) = \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix} = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

Για k=1, $e(1) = \left(A - kc^T\right) e(0) = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -1/T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

Για k=2, $e(1) = \left(A - kc^T\right)^2 e(0) = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -1/T & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ρυθμιστής PID

Ο αναλογικός ρυθμιστής

Για συστήματα συνεχούς χρόνου ο αναλογικός ρυθμιστής είναι $u(t) = K_p e(t)$

Για συστήματα διακριτού χρόνου: $u(k) = K_p e(k)$

Επομένως $G_c(z) = K_p$

Ο ολοκληρωτικός ρυθμιστής

Για συστήματα συνεχούς χρόνου $u(t) = \dfrac{K_p}{T_i} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e(t) dt$

επομένως $G_c(s) = \dfrac{K_p}{T_i s}$, T_i ο χρόνος ολοκλήρωσης

Για συστήματα διακριτού χρόνου η ολοκληρωτική εξίσωση περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = \frac{K_p}{T_i} e(k)$$

ή

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_p}{T_i} e(k)$$

Ρυθμιστής PID

Έτσι $$G_c(z) = \frac{K_p T}{T_i\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{K_p T z}{T_i(z-1)}$$

Ο διαφορικός ρυθμιστής

Για συστήματα συνεχούς χρόνου $u(t) = K_p T_d \dot{e}(t)$

Έτσι, $G_c(s) = K_p T_d s$, T_d ο χρόνος διαφόρισης

Για συστήματα διακριτού χρόνου η διαφορική εξίσωση περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$u(k) = K_p T_d \left[\frac{e(k) - e(k-1)}{T}\right]$$

Έτσι, $$G_c(z) = K_p T_d \left[\frac{1-z^{-1}}{T}\right] = \frac{K_p T_d}{T}\left[\frac{z-1}{z}\right]$$

Ρυθμιστής PID

Ο ρυθμιστής PID

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, για συστήματα συνεχούς χρόνου ο ρυθμιστής PID είναι

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^{t} e(t) dt + T_d \dot{e}(t) \right)$$

Έτσι, $$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Για συστήματα διακριτού χρόνου

$$u(k) = K_p \left[e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + \frac{T_d}{T_i} \left[e(k) - e(k-1) \right] \right]$$

Έτσι, $$G_c(z) = K_p \left[1 + \frac{T}{T_i} \left[\frac{z}{z-1} \right] + \frac{T_d}{T_i} \left[\frac{z-1}{z} \right] \right]$$

Ρυθμιστής PID

Τελικά., κάνοντας τις πράξεις:

$$G_c\left(z\right)=K\left[\frac{z^2-az+b}{z\left(z-1\right)}\right]$$

$$K=K_p\left(\frac{TT_i+T_dT_i+T^2}{T_iT}\right)$$

όπου

$$a=\frac{T_iT-T_dT_i}{TT_i+T_dT_i+T^2}$$

$$b=\frac{T_dT_i}{TT_i+T_dT_i+T^2}$$