Ψηφιακός Έλεγχος

10η διάλεξη

Ασκήσεις

Ασκήσεις

Άσκηση1

Επιθυμούμε να ελέγξουμε την γωνία ανύψωσης μιας κεραίας για να παρακολουθείται η θέση ενός δορυφόρου. Το σύστημα της κεραίας και των κινητήρων που την οδηγούν χαρακτηρίζονται από ροπή αδρανείας J και απόσβεση b η οποία προκύπτει από τριβείς, αεροδυναμική τριβή και ηλεκτρεγερτική δύναμη του DC κινητήρα:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T_c + T_d$$

T_c η ροπή που παράγεται από τον κινητήρα DC

T_d η ροπή διαταραχών

Θέτοντας $\frac{b}{J} = a = 0.1 \qquad u = \frac{T_c}{b} \qquad \omega_d = \frac{T_d}{b}$

προκύπτει $\frac{1}{a}\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = u + \omega_d$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και αγνοώντας τις διαταραχές :

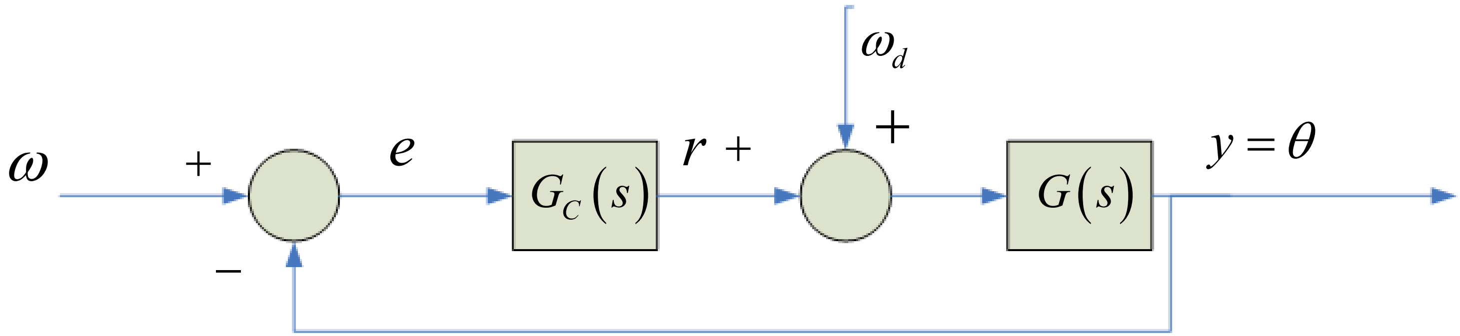
$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s(10s+1)}$$

Ασκήσεις

Να υλοποιηθεί ελεγκτής ώστε:

1. Το σφάλμα παρακολούθησης σε είσοδο ράμπας 0.01t να είναι μικρότερο από 0.01 rad.
2. Η υπερύψωση σε βηματική είσοδο να είναι μικρότερη από 16%
3. Ο χρόνος αποκατάστασης με ζώνη ανοχής 1% να είναι μικρότερος από 10 sec.

Η σχεδίαση του αντισταθμιστή θα γίνει στο πεδίο της συχνότητας και φαίνεται στο σχήμα.



Στη συνέχεια, να βρεθεί ο ισοδύναμος αντισταθμιστής διακριτού χρόνου που πληρεί τις παραπάνω προδιαγραφές.

Ασκήσεις

α) να υπολογιστεί ποιο πρέπει να είναι το κέρδος DC του αντισταθμιστή $G_C(s)$ ώστε να ικανοποιείται η προδιαγραφή σφάλματος.

β) να σχεδιαστεί αντισταθμιστής συνεχούς χρόνου που θα ικανοποιεί τις προδιαγραφές.

γ) ποιος είναι ο ισοδύναμος διακριτός αντισταθμιστής $G_C(z)$ με τη μέθοδο ταύτισης πόλων μηδενικών και συχνότητα δειγματοληψίας 5Hz

δ) επιβεβαιώστε την εγκυρότητα της σχεδίασης υπολογίζοντας τους πόλους του κλειστού συστήματος στο πεδίο z και κατόπιν τους αντίστοιχους πόλους στο πεδίο s.

ε) επαναλάβετε τη διαδικασία με συχνότητα δειγματοληψίας 1 Hz. Τι συμπεραίνετε;

α) Για μηδενική είσοδο διαταραχών $(\omega_d = 0)$ προκύπτει $$E(s) = \frac{\Omega(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Έστω ότι η είσοδος ω(t) είναι η αναρριχητική συνάρτηση *ω(t)=0.01t rad/sec*

με $\Omega(s) = \dfrac{0.01}{s^2}$

Τότε $$E(s) = \frac{0.01}{s^2\left(1 + G_c(s)G(s)\right)}$$

Ασκήσεις

Από το θεώρημα τελικής τιμής είναι

$$e_{\infty} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{0.01}{s + sG_c(s)G(s)} = \frac{0.01}{\lim_{s \to 0} G_c(s)G(s)}$$

όμως $\lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s(10s+1)} = 1$

Για να ικανοποιείται η προδιαγραφή σφάλματος πρέπει να ισχύει $e_{\infty} < 0.01$

ή $$\frac{0.01}{\lim_{s \to 0} G_c(s)} < 0.01 \Rightarrow \lim_{s \to 0} G_c(s) > 1$$

Έτσι , έχουμε βρει το κέρδος του αντισταθμιστή ώστε να ικανοποιείται η προδιαγραφή σφάλματος.

Ασκήσεις

β) Επιθυμούμε η συνάρτηση $G_c(s)G(s)$ να παραμείνει δεύτερης τάξης καθώς μπορούμε να ελέγχουμε καλύτερα τις προδιαγραφές σε σύστημα δεύτερης τάξης,

Μεταφράζοντας τις προδιαγραφές υπερύψωσης και χρόνου αποκατάστασης πρέπει να απαιτήσουμε σταθερά απόσβεσης

$$\zeta \geq 0.6\left(1-\frac{v\%}{100}\right) \simeq 0.5 \quad \text{και} \quad \zeta\omega_0 \geq \frac{4.6}{t_s}=\frac{4.6}{10}$$

$$\text{ή} \quad \omega_0 \geq \frac{4.6}{10\zeta}=0.92$$

Επιλέγουμε $\omega_0 = 1\ rad/\sec$ για τους επικρατούντες πόλους του κλειστού συστήματος.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αντισταθμιστή $G_c(s)=\dfrac{10s+1}{s+1}$

Ο αντισταθμιστής έχει κέρδος DC ίσο με 1, όποτε ικανοποιεί τις προδιαγραφές σφάλματος. Επίσης έχει ένα μηδενικό στη θέση του πόλου της *G(s)* και ένα πόλο στο s=-1 (έχουμε δηλαδή απαλοιφή πόλου-μηδενικού).

Ασκήσεις

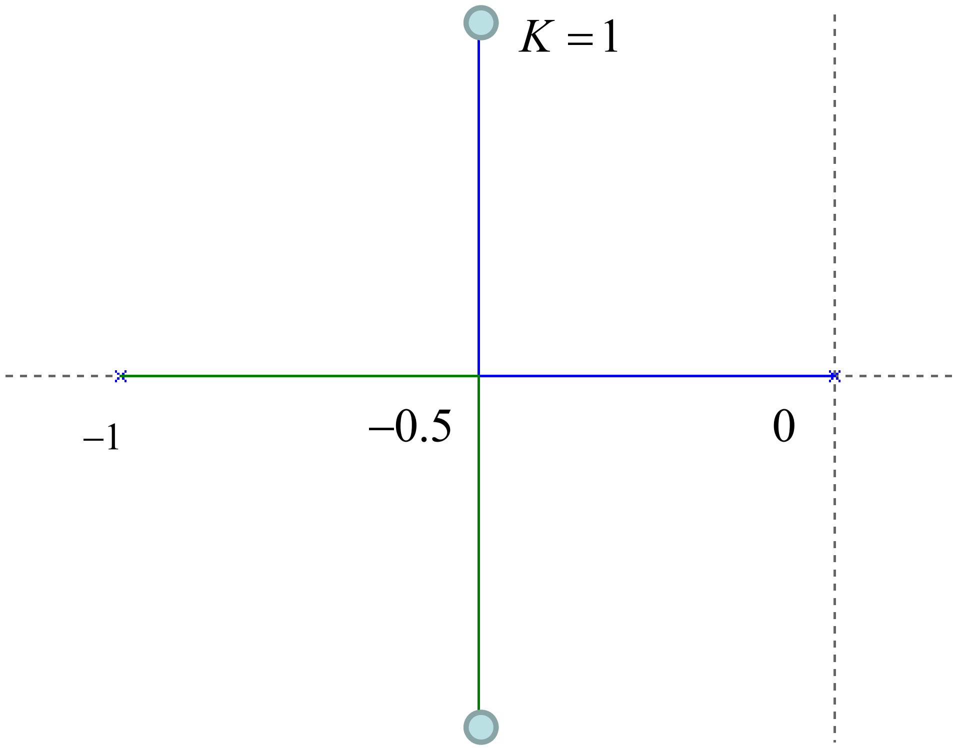
Έχουμε $G_c(s)G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$

(παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου παραμένει δεύτερης τάξης)

Δίπλα βλέπουμε το γεωμετρικό τόπο των ριζών της $KG_c(s)G(s)$

Λόγω των πόλων στις θέσεις 0 και -1 υπάρχουν δύο κλάδοι που αρχίζουν στον πραγματικό άξονα και διασπώνται στο σημείο -0.5. Η συγκεκριμένη επιλογή της $G_c(s)$ αντιστοιχεί στο κλειστό σύστημα αντιστοιχεί στο γεωμετρικό τόπο ριζών στους πόλους για το κλειστό σύστημα που σημειώνονται με κύκλο (K=1).

Έτσι, ικανοποιούνται όλες οι προδιαγραφές .



Ασκήσεις

γ) Για να βρούμε τον ισοδύναμο διακριτό αντισταθμιστή θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ταύτισης πόλων-μηδενικών.

Επιλέγουμε συχνότητα δειγματοληψίας f=5Hz, αρκετές φορές πάνω απο το εύρος ζώνης του κλειστού συστήματος $\omega_0 = 1 rad/\sec \left(f_0 = 0.16 Hz \right)$

Έτσι, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $T = \dfrac{2\pi}{2\pi f} = 0.2\sec$

Ο ελεγκτής διακριτού χρόνου είναι της μορφής $G_c\left(z\right) = \dfrac{K\left(z - z_1\right)}{z - z_2}$

Το μηδενικό z_1 βρίσκεται στη θέση $z_1 = e^{-0.1T} = e^{-0.1(0.2)} = 0.9802$

Ο πόλος z_2 βρίσκεται στη θέση $z_2 = e^{-1T} = e^{-1(0.2)} = 0.8187$

Ασκήσεις

Για να διατηρήσουμε το ίδιο DC κέρδος στι ς $G_c(s)$ και $G_c(z)$ πρέπει να ισχύει

$$\lim_{s\to 0} G_c(s) = 1 = \lim_{s\to 1} G_c(z) = K\left[\frac{1-0.9802}{1-0.8189}\right]$$

$$K = 9.15$$

Τελικά έχουμε

$$G_c(z) = 9.15\frac{z-098207}{z-0.8187}$$

Η εξίσωση διαφορών θα είναι

$$r(k) = 0.8187r(k-1) + 9.15\big(e(k) - 0.9802e(k-1)\big)$$

Ασκήσεις

δ) Θα επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα της σχεδίασης. Για την ισοδύναμη διακριτή συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$του συνεχούς συστήματος όταν προηγείται συγκρατητής μηδενικής τάξης έχουμε

$$\hat{G}(z) = Z\{G_h(s)G(s)\} \qquad G_h(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

επομένως

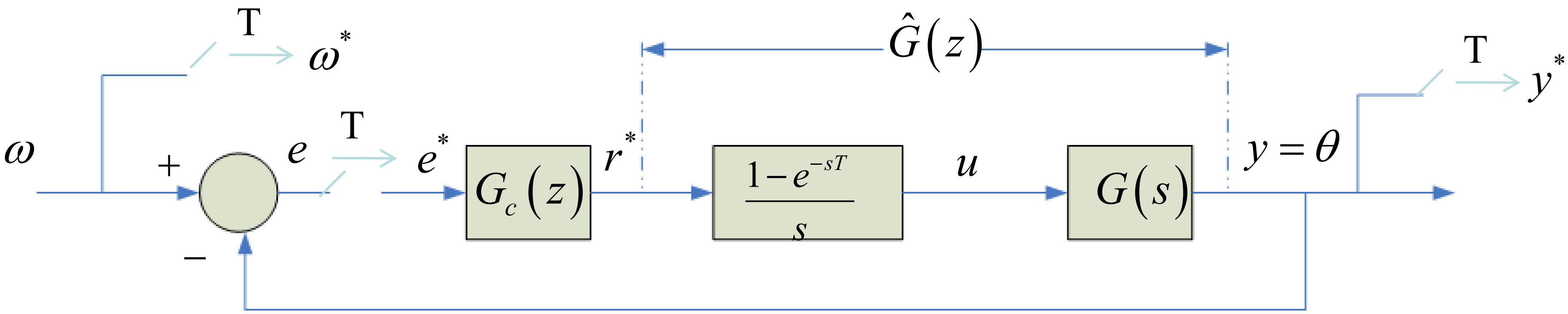
$$\hat{G}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\} = \frac{Az+B}{a(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$$

όπου $A = e^{-aT} + e^{aT} - 1 \qquad B = 1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}$

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, με T=-0.2 και α=-0.1 έχουμε

$$\hat{G}(z) = 0.00199 \frac{z+0.9934}{(z-1)(z-0.9802)}$$

Ασκήσεις



Όπως φαίνεται και απο το παραπάνω σχήμα, η η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος με διακριτό ελεγκτή είναι

$$1+G_c(z)\hat{G}(z)=0$$

$$1+9.15\left[\frac{z-0.9802}{z-0.8187}\right]0.00199\left[\frac{z+0.9934}{(z-1)(z-0.9802)}\right]=0$$

Οι πόλοι του διακριτοποιημένου συστήματος είναι

$$z_{1,2}=0.9\pm j0.162$$

Ασκήσεις

Μετατρέποντας στο επίπεδο s τους παραπάνω διακριτούς πόλους μέσω του μετασχηματισμού

$z = e^{sT}$ ή $s = \frac{1}{T}\ln(z)$ προκύπτει $s_{1,2} = -0.446 \pm j0.891$

Αυτοί οι πόλοι στο επίπεδο s αντιστοιχούν στις προδιαγραφές

$$\zeta = 0.447 \text{ αντί } \zeta = 0.5$$
$$t_s = 10.3\sec \text{ αντί } 10\sec$$
$$v\% = 20.8\% \text{ αντί } 16\%$$

Οι προδιαγραφές συνεχούς χρόνου έχουν αλλάξει ελαφρά, παραμένουν όμως αποδεκτές.

ε) Θα επαναλάβουμε τη σχεδίαση για συχνότητα δειγματοληψίας 1Hz (περίοδος δειγματοληψίας T=1sec).

$$\hat{G}(z) = \frac{Az + B}{a(z-1)\left(z - e^{-aT}\right)}$$

με

$$A = e^{-aT} + e^{aT} - 1$$
$$B = 1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}$$

θέτοντας

$$a = 0.1$$
$$T = 1$$

Ασκήσεις

έχουμε
$$\hat{G}(z) = 0.0484\left[\frac{z+0.9672}{(z-1)(z-0.9048)}\right]$$

Με τη μέθοδο ταύτισης πόλων-μηδενικών για T=1sec, πρόκυπτει όπως προηγουμένως

$$\hat{G}_c(z) = 6.64\left[\frac{z-0.9048}{z-0.3679}\right]$$

Οι πόλοι του κλειστού συστήματος διακριτού χρόνου είναι $z_{1,2} = 0.523 \pm j0.636$

Στο επίπεδο s οι θέσεις των πόλων είναι $s_{1,2} = -0.194 \pm j0.883$

Οι προδιαγραφές που ικανοποιούνται είναι

$$\zeta = 0.21 \ \text{αντί} \ \zeta = 0.5$$
$$t_s = 23.7\,\text{sec} \quad \text{αντί } 10\,\text{sec}$$
$$v\% = 52\% \quad \text{αντί } 16\%$$

Ασκήσεις

Παρατήρηση

Η μη ικανοποίηση των προδιαγραφών οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και αν η $\hat{G}_c(z)$ σχεδιαστεί έτσι ώστε να δίνει τα ίδια δείγματα όπως και η $\hat{G}_c(s)$ (όπως έχει γίνει στις δύο παραπάνω σχεδιάσεις), ο συγκρατητής μηδενικής τάξης μόνο προσεγγιστικά ανακατασκευάζει το συνεχές σήμα u.

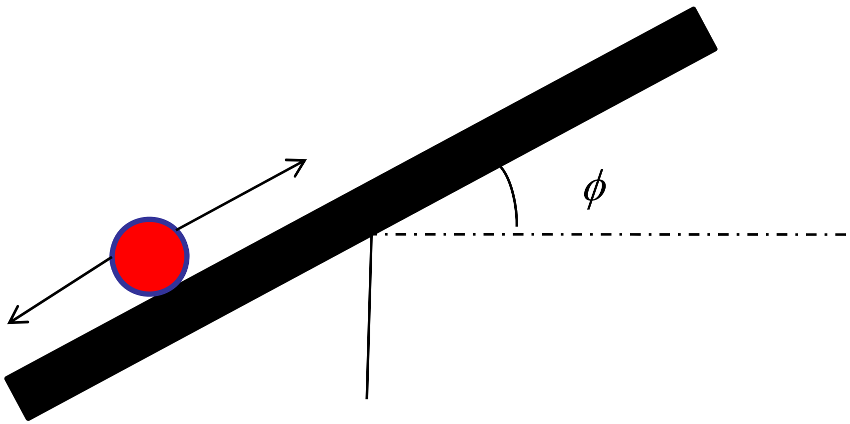
Πράγματι, η χρήση συγκρατητή μηδενικής τάξης δίνει μια καθυστερημένη κατα περίπου T/2 sec έκδοση του σήματος u και αυτή η καθυστέρηση του χρόνου οδηγεί σε καθυστέρηση φάσης αν δε ληφθει υπόψη κατα τη σχεδίασης.

Τα αποτελέσματα γίνονται λιγότερο ικανοποιητικά όσο το T μεγαλώνει (όπως στην περίπτωση T=1sec όπου η συχνότητα δειγματοληψίας είναι περίπου 6 φορές μόνο μεγαλύτερη απο το εύρος ζώνησ 0.16Hz του συστήματος.

Ασκήσεις

Άσκηση 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το σύστημα σφαίρας-ράβδου. Πρόκειται για μια ράβδο ελεύθερη να περιστρέφεται στο επίπεδο της σελίδας γύρω απο τον άξονα, με μια σφαίρα συμπαγή να κυλίεται κατα μήκος της ράβδου σε κατάλληλα διαμορφωμένο αυλάκι. Το πρόβλημα ελέγχου είναι ο έλεγχος της σφαίρας σε επιθυμητό σημείο, χρησιμοποιώντας ως είσοδο ελέγχου τη ροπή που εφαρμόζεται στη ράβδο στο σημείο περιστροφής της.

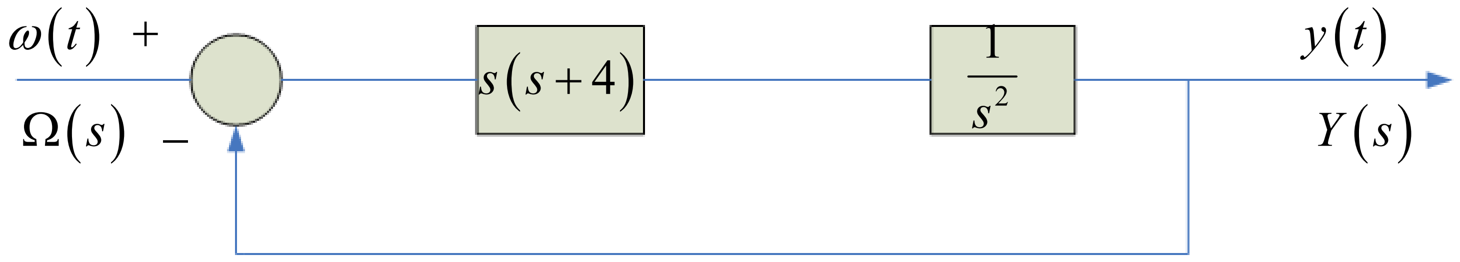


ένα γραμμικό μοντέλο για το σύστημα είναι

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Ασκήσεις

Το σύστημα μαζί με ένα ρυθμιστή PD φαίνεται στο σχήμα:



Επιθυμούμε να μετατρέψουμε το παραπάνω σύστημα σε σύστημα ελέγχου δακριτού χρόνου. Η περίοδος δειγματοληψίας είναι 0.1sec.

α) Να σχεδιαστεί ένας κατάλληλος αντισταθμιστής διακριτού χρόνου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ταύτισης πόλων μηδενικών.

β) Να προσδιοριστούν οι μοναδιαίες βηματικές αποκρίσεις του συστήματος ελέγχου συνεχούς χρόνου και συστήματος ελέγχου διακριτού χρόνου.

Ασκήσεις

α) Αρχικά θα υπολογιστούν η σταθερά απόσβεσης ζ και η κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_0 του συστήματος συνεχούς χρόνου. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$\frac{Y(s)}{\Omega(s)} = \frac{4(s+4)}{s^2+4s+16}$$

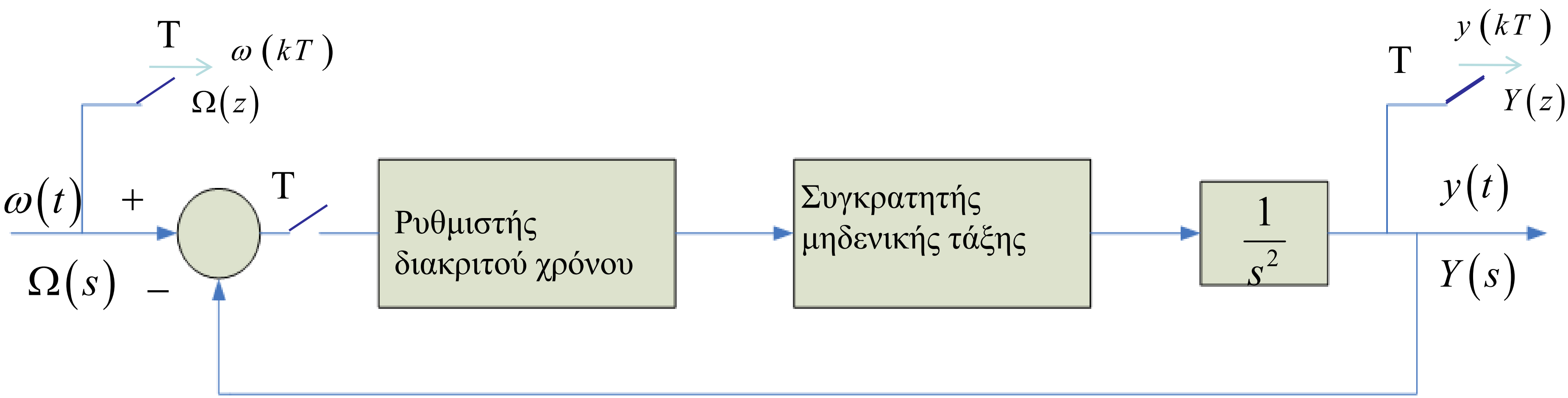
Οι πόλοι του συστήματος είναι $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Έτσι έχουμε σταθερά απόσβεσης ζ=0.5 και κυκλική ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 4 rad/\sec$

Παρά τη σταθερά απόσβεσης που είναι 0.5, εξαιτίας της ύπαρξης του μηδενικού στη θέση s=-4 η μέγιστη υπερψωση σε βήματική είσοδο είναι προσεγγιστικά 30%.

Ασκήσεις

Προκειμένου να μετατρέψουμε τον αναλογικό ρυθμιστή σε διακριτό, πρέπει να προσθέσουμε ένα διεγματολήπτη μετά τον αθροιστή και ένα συγκρατητή μηδενικής τάξης ανάμεσα στο διακριτό ρυθμιστή και το σύστημα. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Είναι σημαντικό να θεωρήσουμε ότι ο συγκρατητής μηδενικής τάξης δημιουργεί αναπόφευκτα καθυστέρηση χρόνου στο σύστημα, η οποία δημιουργεί καθυστέρηση φάσης, ελαττώνοντας έτσι τα περιθώρια ευστάθειας του κλειστού συστήματος.

Ασκήσεις

Ο συγκρατητής μπορεί να προσεγγιστεί απο μια συνάρτηση μεταφοράς, η οποία είναι μια ρητή συνάρτηση του s:

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}}}{e^{\frac{Ts}{2}}} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \dots} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$$

έτσι

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}\right] = \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

Η καθυστέρηση χρόνου που θα εισαχθεί στο σύστημα κλειστού βρόχου απο το συγκρατητή μηδενικής τάξης μπορεί να προσεγγιστεί απο την καθυστέρηση της συνάρτησης μεταφοράς

$$\frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

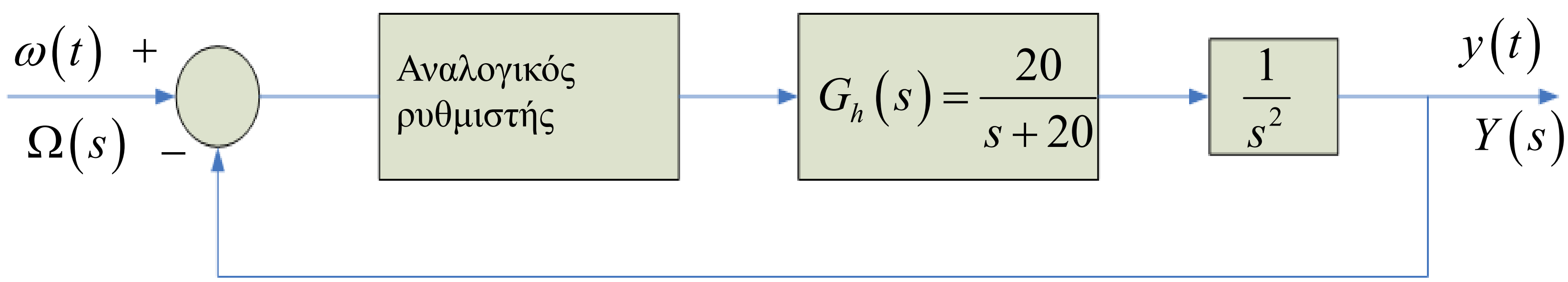
Ασκήσεις

Εφόσον η σταθερά κέρδους του συνολικού συστήματος θα καθοριστεί στο τελικό στάδιο, θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά τη $G_h(s)=\dfrac{1}{\frac{T}{2}s+1}$ στο συνεχές σύστημα.

Για χρόνο δειγματοληψίας T=0.1, έχουμε $G_h(s)=\dfrac{20}{s+20}$

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση που χρησιμοποιείται προσεγγίζει τα χαρακτηριστικά φάσης του συγκρατητή , αλλά έχει σταθερά κέρδους ίση με 1.

Ο αναλογικός αντισταθμιστής μαζί με την καθυστέρηση φάσης που εισάγεται απο τον συγκρατητή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Ασκήσεις

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του γεωμετρικού τόπου ριζών καταλήγουμε στον κατάλληλο αναλογικό αντισταθμιστή $G_c(s)$

Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο πεδίο s τον αντισταθμιστή

$$G_c(s) = 4(s + 3.2)$$

Το επανασχεδιαζόμενο κλειστό σύστημα συνεχούς χρόνου έχει τώρα τρεις πόλους στις θέσεις :

$$s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3} \qquad s_3 = -16$$

Οι επικρατούντες πόλοι έχουν ζ=0.5 και ω=4rad/sec (ο τρίτος πόλος βρίσκεται αρκετά αριστερά ώστε η επίδραση του στην μεταβατική κατάσταση να είναι αμελητέα).

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον ισοδύναμο αντισταθμιστή διακριτού χρόνου με τη μέθοδο ταύτισης πόλων-μηδενικών. Το μηδενικό στη θέση s=-3.2 απεικονίζεται στο σημείο $z = e^{-0.32}$

Επειδή ο αντισταθμιστής έχει βαθμό αριθμητή 1 και παρανομαστή 0, έχει ένα πόλο στο άπειρο (γιατι ο αριθμός των πόλων στο άπειρο ισούται με τη διαφορά των μηδενικών απο τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς).

Ασκήσεις

Ο πόλος στο άπειρο απεικονίζεται στη θέση z=-1. Έτσι, ο διακριτός αντισταθμιστής δίνεται απο τη σχέση

$$G_c(z) = K\frac{z-e^{-0.32}}{z+1} = K\left[\frac{z-0.726}{z+1}\right]$$

Το K υπολογίζεται έτσι ώστε τα κέρδη στις χαμηλές συχνότητες για τον αναλογικό και το διακριτό ρυθμιστή να είναι ίδια. Έτσι

$$G_c(z=1) = K\left[\frac{1-0.726}{1+1}\right] = G_c(s=0) = 4*3.2 \qquad K = 93.47$$

(Παρότι η συνάρτηση μεταφοράς 4(s+3.2) είναι υψιπερατό φίλτρο , ενδιαφερόμαστε για την περιοχή χαμηλών συχνοτήτων και έτσι ο αναλογικός ρυθμιστής και ο ρυθμιστής διακριτού χρόνου πρέπει να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά στις χαμηλές συχνότητες. Τελικά:

$$G_c(z) = 93.42\left[\frac{1-0.726z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$$

Ασκήσεις

Η ισοδύναμη διακριτή συνάρτηση μεταφοράς G(z) του συστήματος G(s) όταν προηγείται ο συγκρατητής μηδενικής τάξης είναι

$$\hat{G}(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-0.1s}}{s}\frac{1}{s^2}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{0.005\left(1+z^{-1}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του συστήματος ελέγχου διακριτού χρόνου

$$G_c(z)\hat{G}(z) = 0.467\frac{\left(1-0.726z^{-1}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$\frac{Y(z)}{\Omega(z)} = \frac{0.467z^{-1}-0.339z^{-2}}{1-1.533z^{-1}+0.661z^{-2}}$$

Η εξίσωση διαφορών είναι

$$y(k)-1.533y(k-1)+0.661y(k-2) = 0.467\omega(k-1)-0.339\omega(k-2)$$

Ασκήσεις

Οι βηματικές αποκρίσεις του συστήματος κλειστού βρόχου συνεχούς και διακριτού χρόνου φαίνεται στα παρακάτω σχήματα: