



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Ρομποτικά Συστήματα

Ενότητα 9: Προβολική γεωμετρία

Αντώνιος Τζές – Ευάγγελος Δερματάς

Σχολή Πολυτεχνική

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι η παρουσίαση και εξοικείωση με τα ακόλουθα στοιχεία ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας:
- Προβολική γεωμετρία



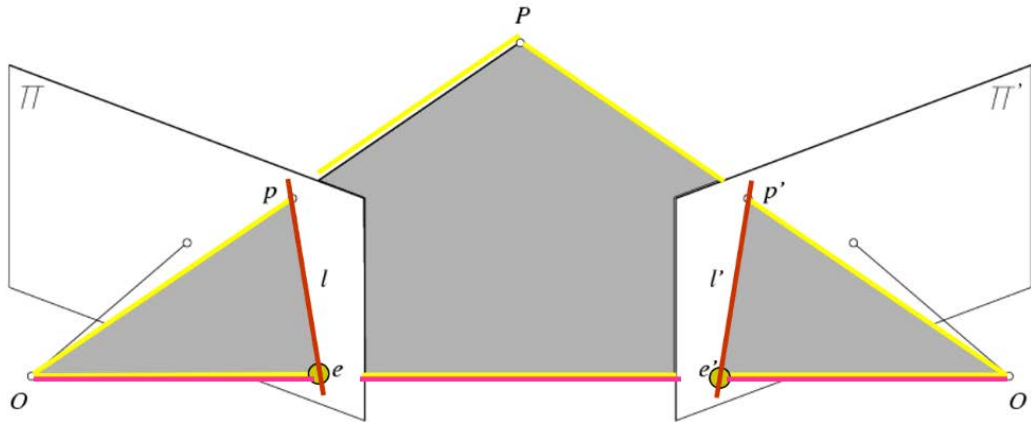
Περιεχόμενα ενότητας

- Προβολική γεωμετρία (Epipolar Geometry)
 - The Essential Matrix
 - The Fundamental Matrix
 - Εκτίμηση θέσης



Επιπολική γεωμετρία

Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>



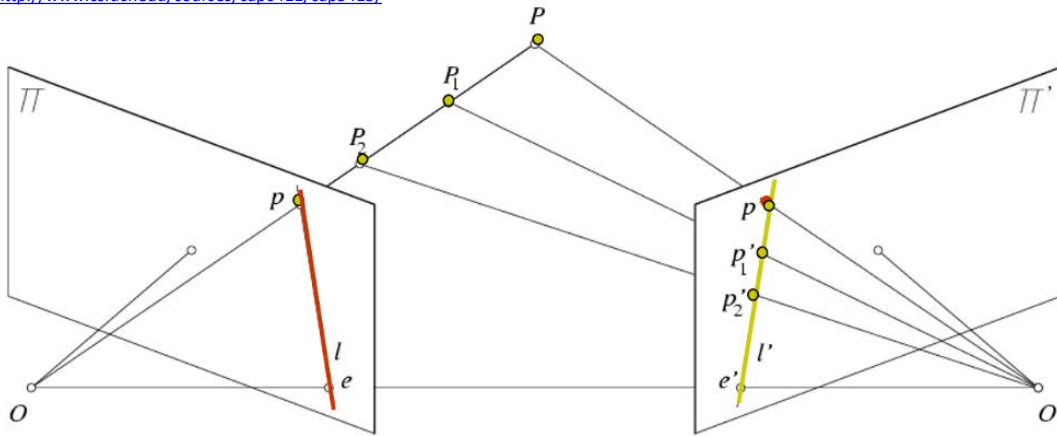
Εικόνα 1: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας

- Epipolar Plane - OPO'
- Epipoles – e, e'
- Epipolar Lines – pe & $p'e'$
- Baseline OO'



Επιπολικές συνθήκες

Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](#),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

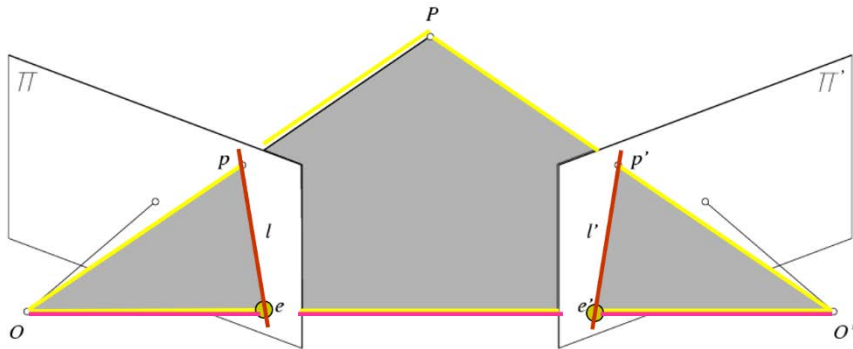


- Τα σημεία P, \dots, P_1 που προβάλλονται στο P (Π), στην (Π') ανήκουν στην επιπολική γραμμή.

Εικόνα 2: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(I)



Επιπολικές συνθήκες (Calibrated case)



Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 3: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(II)

$$\vec{O_p} \cdot [\vec{O O'} \times \vec{O' p'}] = 0 \quad \longrightarrow \quad t \times p = [t_{\times}] p$$

$$p^T (t \times R p') = 0$$

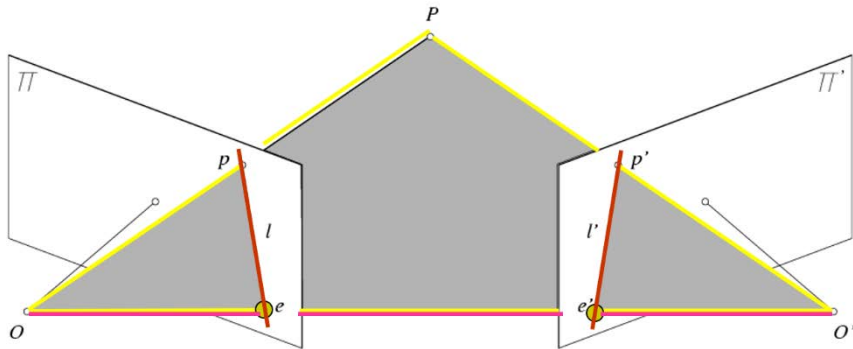
$$p^T (t \times R p') = p^T [t_{\times}] R p' = 0$$

Essential Matrix
(Longuet-Higgins, 1981)

$$p^T \mathcal{E} p' = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{E} = [t_{\times}] R$$



Επιπολικές συνθήκες



Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 4: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(III)

$$\vec{O_p} \cdot [\vec{O O'} \times \vec{O' p'}] = 0 \quad \Rightarrow \quad t \times p = [t_{\times}] p$$

$$p^T (t \times R p') = 0$$

$$p^T (t \times R p') = p^T [t_{\times}] R p' = 0$$

Essential Matrix
(Longuet-Higgins, 1981)

$$p^T \mathcal{E} p' = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{E} = [t_{\times}] R$$



Ιδιότητες Essential Matrix

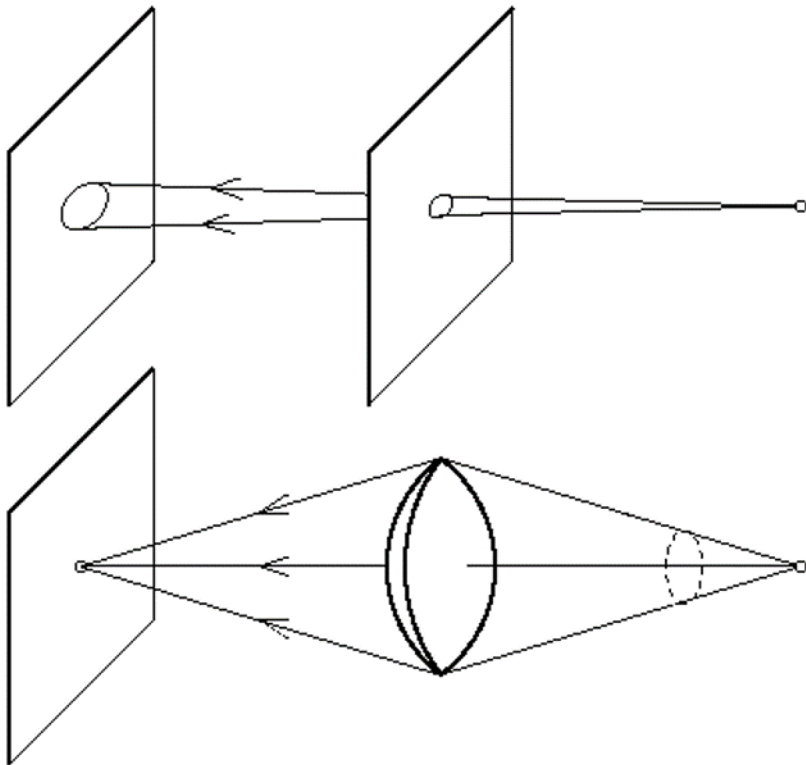
$$\mathbf{p}^T \mathcal{E} \mathbf{p}' = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{E} = [\mathbf{t}_\times] \mathcal{R}$$

- \mathcal{E} is singular.
- In fact, there are only 5 degrees of freedom in \mathcal{E} ,
 - 3 for rotation
 - 2 for translation (up to scale), determined by epipole

$$\mathbf{t} \times \mathbf{p} = [\mathbf{t}]_x \mathbf{p}$$



Camera Internal Parameters or Calibration matrix



Εικόνα 5: Μοντέλο βαθμονόμησης κάμερας

- Background
The lens optical axis does not coincide with the **sensor**

We model this using a 3x3 matrix the ***Calibration matrix***



Camera Calibration matrix

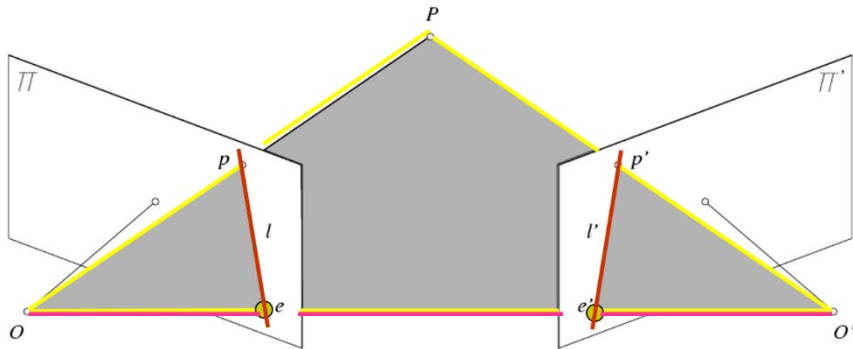
- The difference between ideal sensor and the real one is modeled by a 3x3 matrix K :

$$K = \begin{pmatrix} a_x & b & c_x \\ 0 & a_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c_x, c_y) camera center, (a_x, a_y) pixel dimensions, b skew
- We end with $q = Kp$



Επιπολικές συνθήκες (Uncalibrated case)



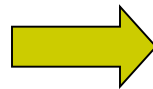
Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 6: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-
Αβεβαιότητα- Συνθήκες(I)

$$\hat{\mathbf{p}}^T \mathcal{E} \hat{\mathbf{p}}' = 0$$

$$\mathbf{p} = \mathcal{K} \hat{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{p}' = \mathcal{K}' \hat{\mathbf{p}}'$$



$$\mathbf{p}^T \mathcal{F} \mathbf{p}' = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{F} = \mathcal{K}^{-T} \mathcal{E} \mathcal{K}'^{-1}$$



Fundamental Matrix
(Faugeras and Luong, 1992)



The Eight-Point Algorithm (Longuet-Higgins, 1981)

$$(u, v, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad (uu', uv', u, vv', vv', v, u', v', 1) \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 u'_1 & u_1 v'_1 & u_1 & v_1 u'_1 & v_1 v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 \\ u_2 u'_2 & u_2 v'_2 & u_2 & v_2 u'_2 & v_2 v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 \\ u_3 u'_3 & u_3 v'_3 & u_3 & v_3 u'_3 & v_3 v'_3 & v_3 & u'_3 & v'_3 \\ u_4 u'_4 & u_4 v'_4 & u_4 & v_4 u'_4 & v_4 v'_4 & v_4 & u'_4 & v'_4 \\ u_5 u'_5 & u_5 v'_5 & u_5 & v_5 u'_5 & v_5 v'_5 & v_5 & u'_5 & v'_5 \\ u_6 u'_6 & u_6 v'_6 & u_6 & v_6 u'_6 & v_6 v'_6 & v_6 & u'_6 & v'_6 \\ u_7 u'_7 & u_7 v'_7 & u_7 & v_7 u'_7 & v_7 v'_7 & v_7 & u'_7 & v'_7 \\ u_8 u'_8 & u_8 v'_8 & u_8 & v_8 u'_8 & v_8 v'_8 & v_8 & u'_8 & v'_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i^T \mathcal{F} \mathbf{p}'_i)^2$$

under the constraint

$$|\mathcal{F}| = 1.$$



Non-Linear Least-Squares Approach (Luong et al., 1993)

Minimize

$$\sum_{i=1}^n [d^2(\mathbf{p}_i, \mathcal{F}\mathbf{p}'_i) + d^2(\mathbf{p}'_i, \mathcal{F}^T\mathbf{p}_i)]$$

with respect to the coefficients of \mathcal{F} , using an appropriate rank-2 parameterization.



Εκτίμηση του R και t από τον E

An SVD of E gives $E = U\Sigma V^T$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = U \Sigma V^T = U W^{-1} V^T V W \Sigma V^T = R [tx]$$

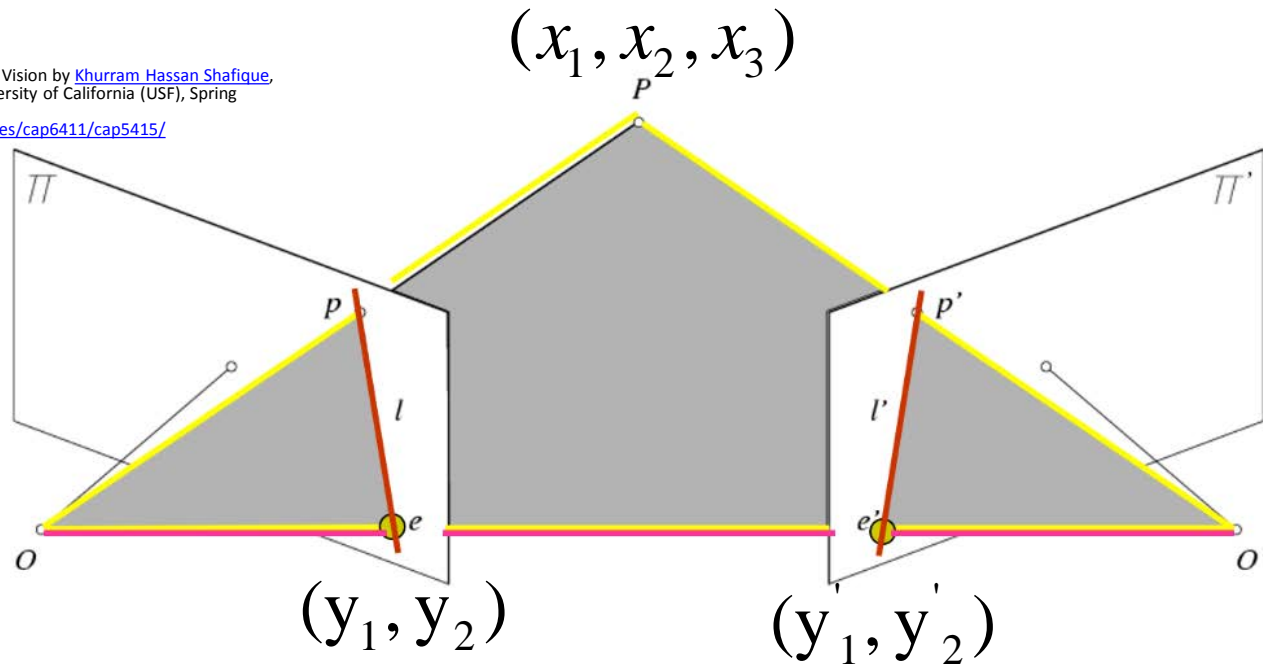
$$R = U W^{-1} V^T \quad \& \quad [tx] = V W \Sigma V^T$$



Εκτίμηση θέσης

- Πώς βρίσκω τα

Πηγή: Lectures on Computer Vision by [Khurram Hassan Shafique](#),
Computer Vision Lab @ University of California (USF), Spring
2003, Available at:
<http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>



Εικόνα 7: Εφαρμογή προβολικής γεωμετρίας για εκτίμηση θέσης



Σχέση ανάμεσα σε 3D και 2D

Two normalized cameras project the 3D world onto their respective image planes
Let the 3D coordinates of a point \mathbf{P} be (x_1, x_2, x_3) and (x'_1, x'_2, x'_3) relative to each camera's coordinate system.

Since the cameras are normalized, the corresponding image coordinates are

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x'_3} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

A homogeneous representation of the two image coordinates is then given by

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x'_3} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

which also can be written more compactly as

$$\mathbf{y} = \frac{1}{x_3} \tilde{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{y}' = \frac{1}{x'_3} \tilde{\mathbf{x}'}$$



Τελικοί υπολογισμοί

$$y'_1 = \frac{x'_1}{x'_3} = \frac{\mathbf{r}_1 (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{t})}{\mathbf{r}_3 (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{t})} = \frac{\mathbf{r}_1 (\mathbf{y} - \mathbf{t}/x_3)}{\mathbf{r}_3 (\mathbf{y} - \mathbf{t}/x_3)} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\mathbf{r}_1 - \\ -\mathbf{r}_2 - \\ -\mathbf{r}_3 - \end{pmatrix} \quad (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$x_3 = \frac{(\mathbf{r}_1 - y'_1 \mathbf{r}_3) \mathbf{t}}{(\mathbf{r}_1 - y'_1 \mathbf{r}_3) \mathbf{y}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



Σημείωμα Αναφοράς

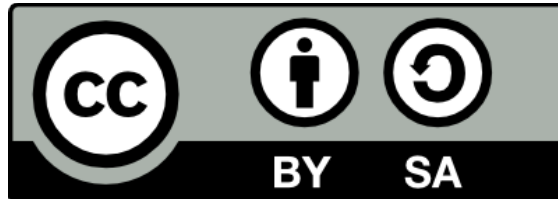
Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αντώνιος Τζές, Ευάγγελος Δερματάς,
«Ρομποτικά Συστήματα. Προβολική γεωμετρία». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/EE804/index.php>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Σύμφωνα με αυτήν την άδεια ο δικαιούχος σας δίνει το δικαίωμα να:

Μοιραστείτε — αντιγράψετε και αναδιανέμετε το υλικό

Προσαρμόστε — αναμείξτε, τροποποιήστε και δημιουργήστε πάνω στο υλικό για κάθε σκοπό

Υπό τους ακόλουθους όρους:

Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στο δημιουργό , με σύνδεσμο της άδειας

Παρόμοια Διανομή — Αν αναμείξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας, Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 2: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(I), Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 3: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(II), Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 4: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Συνθήκες(III), Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 5: Μοντέλο βαθμονόμησης κάμερας, Ιδιο έργο

Εικόνα 6: Θεωρία προβολικής γεωμετρίας-Αβεβαιότητα- Συνθήκες, Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

Εικόνα 7: Εφαρμογή προβολικής γεωμετρίας για εκτίμηση θέσης, Lectures on Computer Vision by Khurram Hassan Shafique, Computer Vision Lab @ Univeristy of California (UCF), Spring 2003, Available at: <http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6411/cap5415/>

