ΑΣΚΗΣΗ 1 (Εξετάσεις 7.7.2015)

Παρατηρήσεις:

α) Το διάνυσμα αναφοράς είναι ένα και μάλιστα το V_π όπως δίνει η άσκηση. Δεν μπορούμε να ορίσουμε δύο διανύσματα αναφοράς όπως έκανα πολλοί για διευκόλυνσή τους. Είναι μέγα λάθος.

β) Από τη σχέση $V_\pi = V_\varphi + V_{\gamma\rho}$ δεν προκύπτει $|V_\pi| = |V_\varphi| + |V_{\gamma\rho}|$. Ξαναθυμηθείτε τον ορισμό του μέτρου μιγαδικής ποσότητας.

γ) Μπορούσατε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα των αποτελεσμάτων των σχετικών με τις ισχύες χρησιμοποιώντας την απλή αρχή ότι οι παραγόμενη ισούται με την καταναλισκόμενη συν τις απώλειες στην γραμμή.

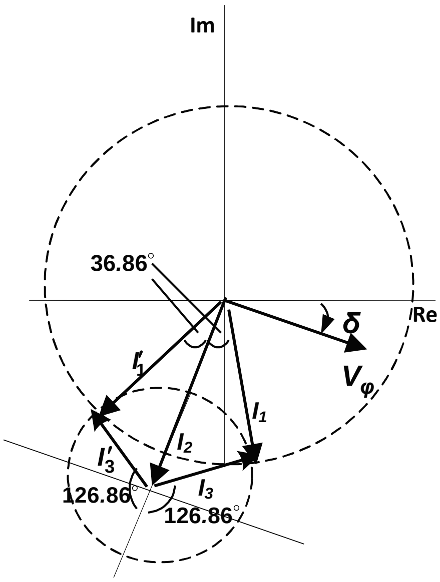
Λύση

Επειδή $V_\pi = 240\underline{/0^\circ}$ V, για να υπάρχει ροή πραγματικής ισχύος προς το φορτίο πρέπει η γωνία της τάσης V_φ να είναι αρνητική, δηλαδή: $V_\varphi = |V_\varphi|\underline{/-\delta}$ V.

Επειδή το ρεύμα δια πηνίου έπεται της τάσης του κατά 90°: $I_2 = 5\underline{/-\delta - 90^\circ}$ A.

Επειδή το ρεύμα I_1 έχει μέτρο $4 = \sqrt{5^2 - 3^2}$, είναι η κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ρεύμα I_2 και άλλη κάθετη πλευρά το ρεύμα I_3. Οι γεωμετρικοί τόποι των ρευμάτων I_3 και I_1 είναι οι δύο κύκλοι που φαίνονται στο σχήμα. Τα σημεία τομής δίνουν τις λύσεις που ικανοποιούν τα δεδομένα της άσκησης.

Τα ρεύματα I_2 και I_1 σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\cos^{-1}(4/5) = 36.86^\circ$. Υπάρχουν δύο λύσεις. Στην πρώτη, το ρεύμα I_3 δια του φορτίου προηγείται της τάσης στα άκρα του κατά γωνία $-\delta - 90^\circ + 126.86^\circ = -\delta + 36.86^\circ$ (οπότε $\Sigma I = \cos(-\delta + \delta - 36.86^\circ) = 0.8$ χωρητικός), ενώ στην δεύτερη το ρεύμα δια του φορτίου I_3' προηγείται της τάσης στα άκρα του κατά γωνία $-\delta - 90^\circ - 126.86^\circ = -\delta - 216.86^\circ$, οπότε $\Sigma I = \cos(-\delta + \delta + 216.86^\circ) = -0.8$, δηλαδή το φορτίο παράγει πραγματική ισχύ, όπερ άτοπο.



Με βάση τα παραπάνω

$I_3 = 3\underline{/-\delta + 36.86^\circ}$ A και $I_1 = 4\underline{/-\delta - 90^\circ + 36.86^\circ} = 4\underline{/-\delta - 53.14^\circ}$ A

Η σύνθετη αντίσταση της γραμμής είναι

$$Z_{\gamma\rho} = 0.26 + j314 \times 0.01412 = 0.26 + j4.43368 = 4.44\underline{/86.64^\circ} \ \ \Omega$$

Από τη σχέση $V_\pi = V_\varphi + Z_{\gamma\rho} I_1$ έχουμε

$$240\underline{/0^\circ} = |V_\varphi|\underline{/-\delta} + (4.44\underline{/86.64^\circ})(4\underline{/-\delta - 53.14^\circ}) = |V_\varphi|\underline{/-\delta} + 17.76\underline{/-\delta + 33.5^\circ} \quad (1)$$

Εξισώνοντας τα μέτρα των δύο μελών της (1) έχουμε

$$240^2 = \left(|V_\varphi|\cos\delta + 17.76\cos(-\delta + 33.5^\circ)\right)^2 + \left(-|V_\varphi|\sin\delta + 17.76\sin(-\delta + 33.5^\circ)\right)^2$$

$$= |V_\varphi|^2 + 17.76^2 + 2|V_\varphi| 17.76\left(\cos\delta\cos(-\delta + 33.5^\circ) - \sin\delta\sin(-\delta + 33.5^\circ)\right)$$

$$= |V_\varphi|^2 + 315.42 + 35.52|V_\varphi|\cos 33.5^\circ = |V_\varphi|^2 + 315.42 + 29.62|V_\varphi|$$

Από την επίλυση της τελευταίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτουν δύο λύσεις: 225 και -254.6. Η δεύτερη λύση απορρίπτεται και συνεπώς

$$|V_\varphi| = 225 \ \text{V}$$

Εξισώνοντας τις γωνίες των δύο μελών της (1) έχουμε

$$\tan^{-1}\frac{-|V_\varphi|\sin\delta + 17.76\sin(-\delta + 33.5^\circ)}{|V_\varphi|\cos\delta + 17.76\cos(-\delta + 33.5^\circ)} = 0$$

από την οποίαν προκύπτει

$$-|V_\varphi|\sin\delta + 17.76\sin(-\delta + 33.5^\circ) = -225\sin\delta + 17.76\sin(-\delta + 33.5^\circ) = 0$$

οπότε $-225\sin\delta + 17.76\left(\sin 33.5^\circ\cos\delta - \cos 33.5^\circ\sin\delta\right) = 0$ και

$$-225\sin\delta + 9.8\cos\delta - 14.81\sin\delta = 0$$

Συνεπώς $\delta = \tan^{-1}\dfrac{9.8}{225 + 14.81} = \tan^{-1}\dfrac{9.8}{239.81} = \tan^{-1}0.0408 = 2.34^\circ$

Άρα $V_\varphi = |V|\underline{/-\delta} = 225\underline{/-2.34^\circ}$ V

$$I_1 = 4\underline{/-\delta - 53.14^\circ} = 4\underline{/-2.34^\circ - 53.14^\circ} = 4\underline{/-55.48^\circ} \ \text{A}$$

$$I_2 = 5\underline{/-\delta - 90^\circ} = 5\underline{/-2.34^\circ - 90^\circ} = 5\underline{/-92.34^\circ} \ \text{A}$$

$$I_\varphi = I_3 = 3\underline{/-\delta + 36.86^\circ} = 3\underline{/-2.34^\circ + 36.86^\circ} = 3\underline{/34.52^\circ} \ \text{A}$$

A1) $v_\varphi(t) = \sqrt{2} \times 225 \cos(\omega t - 2.34^\circ)$ V

$i_\varphi(t) = i_3(t) = \sqrt{2} \times 3 \cos(\omega t + 34.52^\circ)$

A2) $S_\varphi = V_\varphi I_\varphi^* = 225\underline{/-2.34^\circ} \times 3\underline{/-34.52^\circ} = 675\underline{/-36.86^\circ} = 540 - j405$

$\Sigma I = \cos 36.86^\circ = 0.8 \qquad \textit{χωρητικός}$

A3) $S_\pi = V_\pi I_1^* = 240\underline{/0^\circ} \times 4\underline{/55.48^\circ} = 960\underline{/55.48^\circ} = 544.02 + j790.97$

A4) $P_{\alpha\pi} = |I_\varphi|^2 R_{\gamma\rho} = 4^2 \times 0.26 = 4.16$ W

A5) $|Z_L| = \dfrac{|V_\varphi|}{|I_2|} = \dfrac{225}{5} = 45\ \Omega$

$L = \dfrac{|Z_L|}{\omega} = \dfrac{45}{314} = 0.1433H$

A6) $Z_\varphi = \dfrac{V_\varphi}{I_3} = \dfrac{225}{3}\underline{/-2.34^\circ - 34.52^\circ} = 75\underline{/-36.86^\circ} = 60 - j45\ \Omega$

B1) Το ρεύμα δια της γραμμής γίνεται τώρα

$$I_\varphi = I_3 = \frac{V_\pi}{Z_{\gamma\rho} + Z_\varphi} = \frac{240\underline{/0^\circ}}{0.26 + j4.3368 + 60 - j45} = \frac{240\underline{/0^\circ}}{60.26 - j40.66} = \frac{240\underline{/0^\circ}}{72.7\underline{/-34^\circ}} = 3.3\underline{/34^\circ}$$

Παρατηρούμε, συνεπώς, **μείωση** του μέτρου του ρεύματος δια της γραμμής.

B2) Η τάση στα άκρα του φορτίου γίνεται πλέον

$V_\varphi = Z_\varphi I_\varphi = (75\underline{/-36.86^\circ}) \times (3.3\underline{/34^\circ}) = 247.5\underline{/-2.86^\circ}$ V

Παρατηρούμε, συνεπώς, **αύξηση του μέτρου της τάσης και μάλιστα πάνω από το μέτρο της τάσης πηγής.**

B3) $P_{\alpha\pi} = |I_\varphi|^2 R_{\gamma\rho} = 3.3^2 \times 0.26 = 2.83$ W < **4.16 W**