Άσκηση 4

Αναγνώριση συνάρτησης μεταφοράς γραμμικού συστήματος

Σκοπός της άσκησης είναι η αναγνώριση ένος συστήματος με την βοήθεια του LabView. Συγκεκριμένα, θα ολοκληρωθεί η αναγνώριση του συστήματος στο πεδίο του συχνότητας αυτήν την φορά, με την δημιουργία του διαγράμματος Bode μέσω κατάλληλων σημάτων δοκιμής.

Θεωρία

Ένα Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα μπορεί να περιγραφεί μέσω της συνάρτησης μεταφοράς, η οποία έχει την εξής γενική μορφή:

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

με $n \geq m$, όπου z_i, $i=1,\ldots,m$ είναι τα μηδενικά του συστήματος και p_j, $j=1,\ldots,n$ οι πόλοι του ανοικτού συστήματος και K μια σταθερά. Η αναγνώριση του συστήματος επικεντρώνεται στην εκτίμηση αυτών των παραμέτρων, όπου διεγείρουμε το σύστημα με κάποια τυποποιημένα σήματα αναφοράς (test signals), καταγράφουμε την έξοδο του συστήματος σε αυτά τα σήματα, και προχωρούμε σε επεξεργασία των αποτελεσμάτων για την αναγνώριση. Ανάλογα με τα σήματα που χρησιμοποιούμε και την περαιτέρω επεξεργασία που εφαρμόζουμε, η αναγνώριση χωρίζεται σε δύο γενικές μέθοδους: Αναγνώριση στον χρόνο και αναγνώριση στην συχνότητα.

Στο προηγούμενο εργαστήριο είδαμε την αναγνώριση του συστήματος μέσω της βηματικής του απόκρισης. Οι πληροφορίες εν γένει που μπορούμε να πάρουμε από αυτή είναι περιορισμένες και γι αυτό συνήθως καταφεύγουμε σε μεθόδους αναγνώρισης της συχνότητας για να εξάγουμε πλήρως ένα μοντέλο του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή διεγείρουμε το σύστημα με σήματα που περιέχουν μεγάλος εύρος συχνοτήτων, να καταγράψουμε την έξοδο τους, και στην συνέχεια να υπολογίσουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Υπολογισμός απόκρισης συχνότητας

Η αναγνώριση στο πεδίο της συχνότητας βασίζεται στη διέγερση του συστήματος προς αναγνώριση κάνοντας χρήση συγκεκριμένων σημάτων και, ακολούθως, στην εύρεση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, δηλαδή την κατασκευή του λεγόμενου διάγραμματος bode.

Όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ αποτελεί μια μιγαδική συνάρτηση, αφού το s ανήκει στους μιγαδικούς αριθμούς. Αν το s είναι ένας καθαρά φανταστικός αριθμός $s=j\omega$, τότε η $H(j\omega)$ αποτελεί τον μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση συναρτήσει της συχνότητας ω.

Αν ως είσοδο ενός LTI συστήματος θεωρήσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα της μορφής:

$$u(t) = Acos(\omega t) = Re\left\{Ae^{j\omega t}\right\}$$

τότε στην έξοδο του συστήματος θα λάβουμε:

$$y(t) = Re\left\{u(t)H(j\omega)\right\} = Bcos(\omega t + \varphi)$$

όπου $B = |H(j\omega)|A$ και $\varphi = \angle H(j\omega)$.

Το διάγραμμα bode αποτελεί την απεικόνιση του μέτρου (εκφρασμένο σε κλίμακα dB ως $K = 20\log|H(j\omega)|$) και της φάσης της γωνίας εκφρασμένη σε λογαριθμική κλίμακα της συχνότητας. Οι λόγοι για τους οποίους επιλέγεται η λογαριθμική κλίμακα για την απεικόνιση του μέτρου και της φάσης είναι α) η δυνατότητα παρουσίασης και μελέτης ενός μεγάλου εύρους συχνοτήτων και β) το γεγονός ότι οι πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μετατρέπονται σε προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν έχουμε στη διάθεση μας το διάγραμμα bode ενός συστήματος, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αναγνώριση του συστήματος εξάγοντας χαρακτηριστικά όπως:

- Το κέρδος μόνιμης κατάστασης (DC-Gain), το οποίο αποτελεί το κέρδος κοντά στην μηδενική συχνότητα
- Την παρουσία πόλου, η οποία οδηγεί σε *μείωση* της κλίσης του διαγράμματος μέτρου κατά 20db/δεκάδα
- Την παρουσία μηδενικού, η οποία οδηγεί σε *αύξηση* της κλίσης του διαγράμματος μέτρου κατά 20db/δεκάδα
- Τα περιθώρια κέρδους και φάσης του συστήματος
- Το εύρος ζώνης

κ.λ.π.

Ιδανικά, για να λάβουμε το διάγραμμα bode, αρκεί να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Στην πράξη, όμως, δεν μπορούμε να παράγουμε μια ιδανική κρουστική για τη διέγερση του συστήματος και γι’ αυτό το λόγο έχουμε καταφύγει σε εναλλακτικές μεθόδους για την κατασκευή του διαγράμματος:

Διαγράμματα Lissajous

Διέγερση του συστήματος με ημίτονο της μορφής $Acos(\omega t)$. Με βάση το ημίτονο της εξόδου $Bcos(\omega t + \varphi)$ και απεικονίζοντας στο επίπεδο x-y τα δύο ημίτονα (όπου στο x άξονα τοποθετούμε την είσοδο, και στον y άξονα την έξοδο), δημιουργούμε τα λεγόμενα διαγράμματα Lissajous, τα οποία είναι ελλείψεις διαφόρων μορφών. Το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκεται από την σχέση $|H(j\omega)|=B/A$, ενώ από την κλίση του κύριου άξονα της έλλειψης βρίσκουμε την φάση $\angle H(j\omega) = \varphi$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για διάφορες τιμές της συχνότητας μπορούμε να κάνουμε μια αρχική εκτίμηση της απόκρισης συχνότητας.

Ημίτονο μεταβλητής συχνότητας (chirp signal)

Διέγερση του συστήματος με σήμα το οποίο περιέχει ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων, όπως, για παράδειγμα, το σήμα chirp. Το chirp είναι ένα ημιτονοειδές σήμα σταθερού πλάτους και ολοένα αυξανόμενης συχνότητας, $u(k) = Asin(2\pi(f_0 + ak) \cdot t)$, όπου f_0 η αρχική συχνότητα του σήματος, α μια θετική σταθερά και $t=k/f_s$. Στην περίπτωση αυτή, το εκτιμώμενο διάγραμμα μέτρου του συστήματος είναι η περιβάλλουσα του σήματος $20log_{10}\left(\frac{|y(k)|}{A}\right)$. Είναι προφανές βέβαια ότι για να έχουμε μια απεικόνιση από τον χρόνο *t* (μιας και το σήμα *y* είναι στον χρόνο) στην συχνότητα *f(Hz)*, πρέπει να καθορίσουμε κατάλληλα την σταθερά *α* του σήματος *u(k)*. Αν λοιπόν θέλουμε να υλοποιήσουμε το παραπάνω chirp σήμα *u* με *N* δείγματα, και να σαρώσουμε τις συχνότητες από f_0 έως f_f, η σταθερά *α* θα πρέπει να είναι $a = {(f_f - f_0)}/{N}$.

Ημίτονο μεταβλητής συχνότητας (chirp signal)

Διέγερση του συστήματος με σήμα πλούσιου συχνοτικού περιεχομένου, όπως ο λευκός θόρυβος. Ο λευκός θόρυβος είναι ένα σήμα το οποίο περιέχει με την ίδια ένταση όλες τις συχνότητες. Στην περίπτωση αυτή, υπολογίζοντας τους μετασχηματισμούς Fourier της εισόδου και της εξόδου (χρησιμοποιώντας π.χ. τον Fast Fourier Transform – FFT) μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε το bode διάγραμμα του συστήματος.

Εφαρμογές

4.1 Τροποποιήστε το IO_Template.vi που δημιουργήσατε στην προηγούμενη εργαστηριακή άσκηση, ώστε το σύστημα να δέχεται ημιτονειδής είσοδο (χρήση Sine Wave PtByPt), και να γίνεται απεικόνιση εισόδου και εξόδου σε κοινό διάγραμμα. Στην συνέχεια κάνοντας χρήση της συνάρτησης Data Queue PtByPt, απεικονίστε το διάγραμμα Lissajous σε πραγματικό χρόνο. Κάνοντας χρήση των συναρτήσεων Array min & max, υπολογίστε το κέρδος του συστήματος για κάθε μια από τις συχνότητες που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Στην συνέχεια κατασκευάστε μια αρχική μορφή του bode διαγράμματος. Θεωρητικά μέχρι ποια συχνότητα ημιτόνων μπορούμε να βάλουμε ως είσοδο στο σύστημα; Πρακτικά μέχρι ποια συχνότητα μπορούμε να φτάσουμε, και που οφείλεται κατά την γνώμη σας αυτό; Με βάση αυτό που παρατηρήθηκε, το σύστημα μας ως τι είδους φίλτρο συμπεριφέρεται;

ω(rad/sec)	0.1	0.5	1	2	5	7	10	12	15	17	20	22	25	27	30	40	50	60
B/A																		

4.2 Διεγείρετε το σύστημα με ένα σήμα chirp τουλάχιστον 10000 σημείων επιλέγοντας όρια συχνοτήτων με βάση τα αποτελέσματα από το προηγούμενο ερώτημα. Αποθηκεύστε την έξοδο του συστήματος σε ένα διάνυσμα. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τα εργαλεία abs και peak detector, εξάγετε την περιβάλλουσα του συστήματος. Τέλος απεικονίστε το bode διάγραμμα του συστήματος.

4.3 Δώστε στο σύστημα ως είσοδο λευκό θόρυβο (με χρήση της συνάρτησης Uniform White Noise PtByPt). Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Transfer Function PtByPt, υπολογίστε και απεικονείστε το διάγραμμα bode του συστήματος σε πραγματικό χρόνο. Συγκρίνετε το bode με αυτό του προηγούμενου ερωτήματος. Πότε θα χρησιμοποιούσατε την αναγνώριση με chirp signal, και πότε με λευκό θόρυβο;

4.4 Με βάση τα όσα παρατηρήσατε μέχρι στιγμής, κάντε πλήρη αναγνώριση του συστήματος.