Q Function
Πιθανότητα λάθους
Bit Error Rate (BER)

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας - probability density function (pdf)

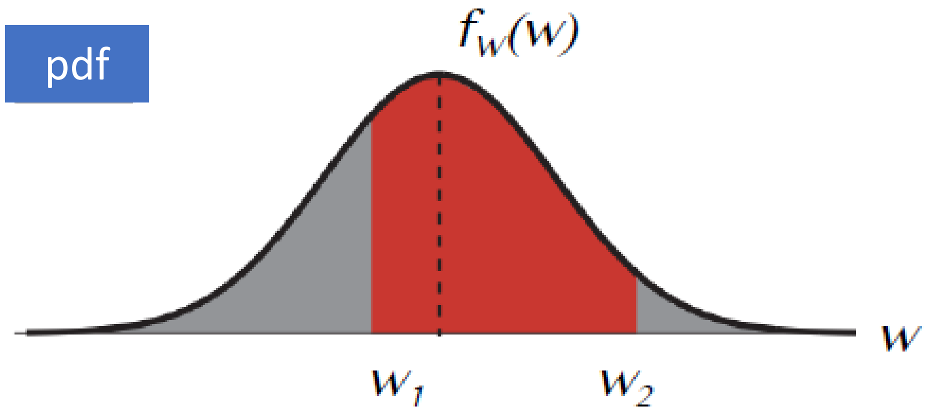
<u>Πείραμα</u>

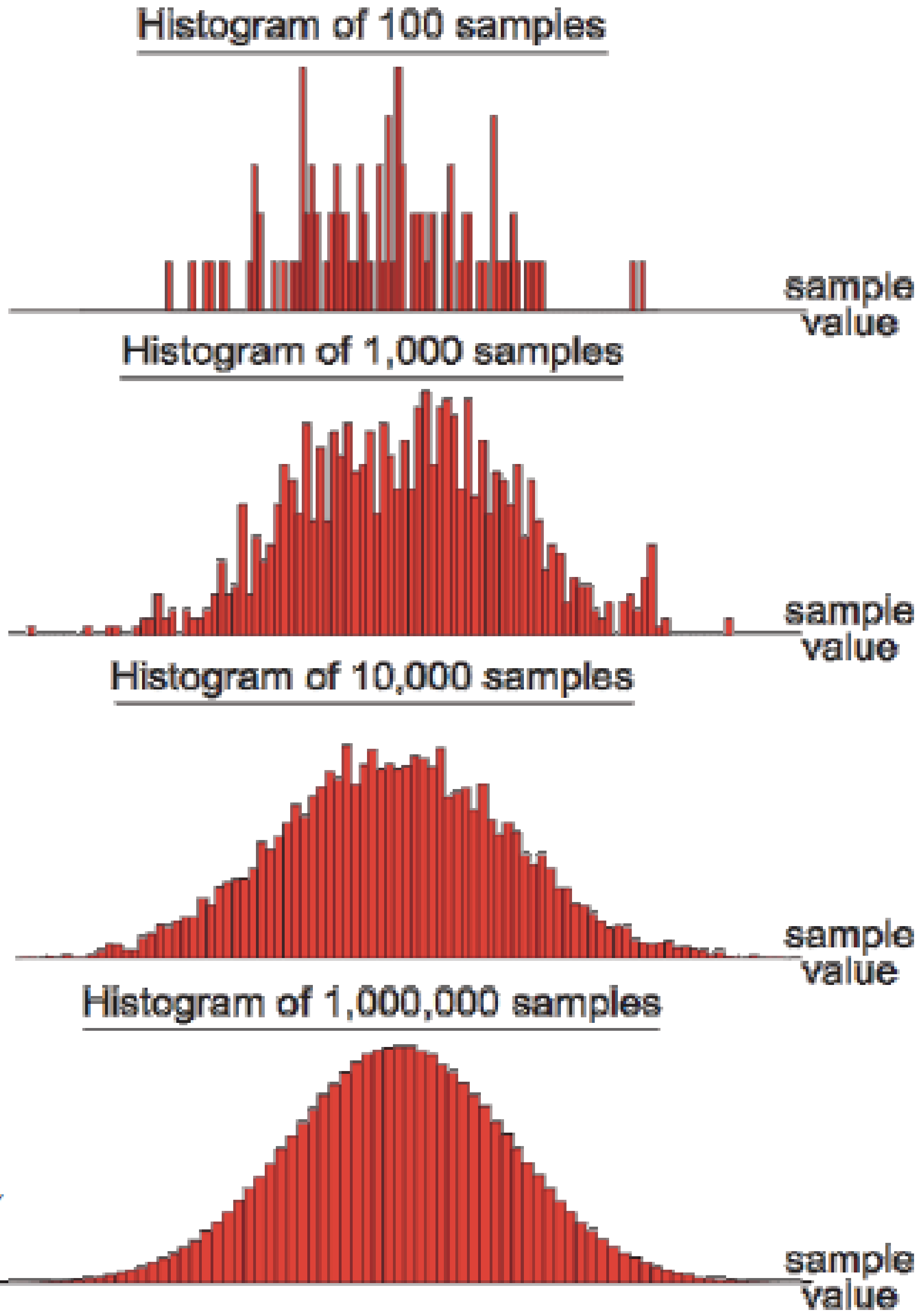
Δημιουργήστε ιστογράμματα των τυχαίων τιμών ενός πειράματος κάνοντας ανεξάρτητες επαναλήψεις με αυξανόμενο αριθμό τιμών κάθε φορά.

Τα ιστογράμματα θα συγκλίνουν σε σχήμα όπως το τελευταίο, παραπλεύρως.

Αν <u>κανονικοποιήσουμε</u> το σχήμα ώστε το εμβαδόν του να είναι μονάδα, τότε στο περίγραμμα έχομε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**pdf**).

$$p(w_1 < W < w_2) = \int_{w_1}^{w_2} f_W(w)dw$$

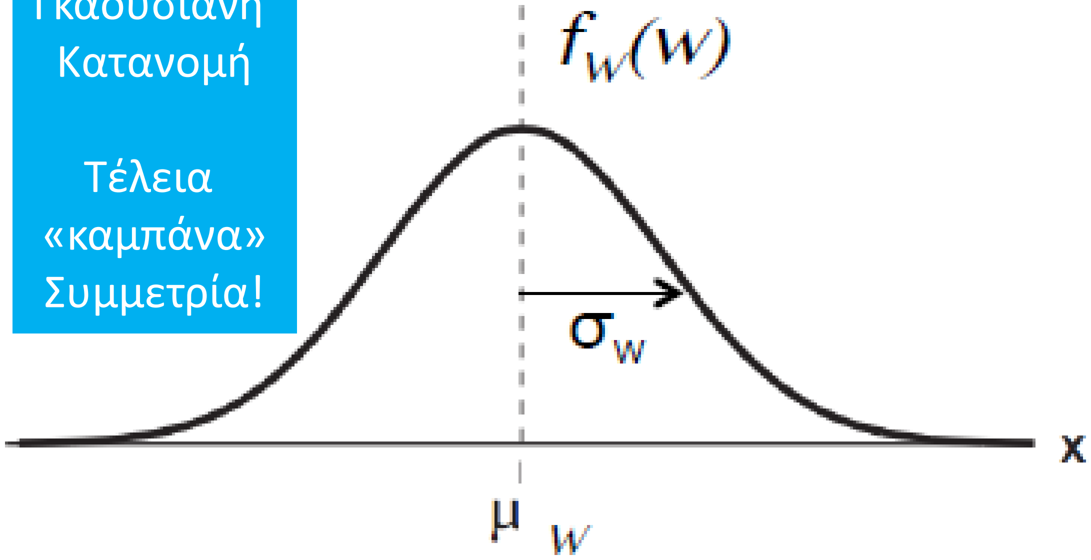


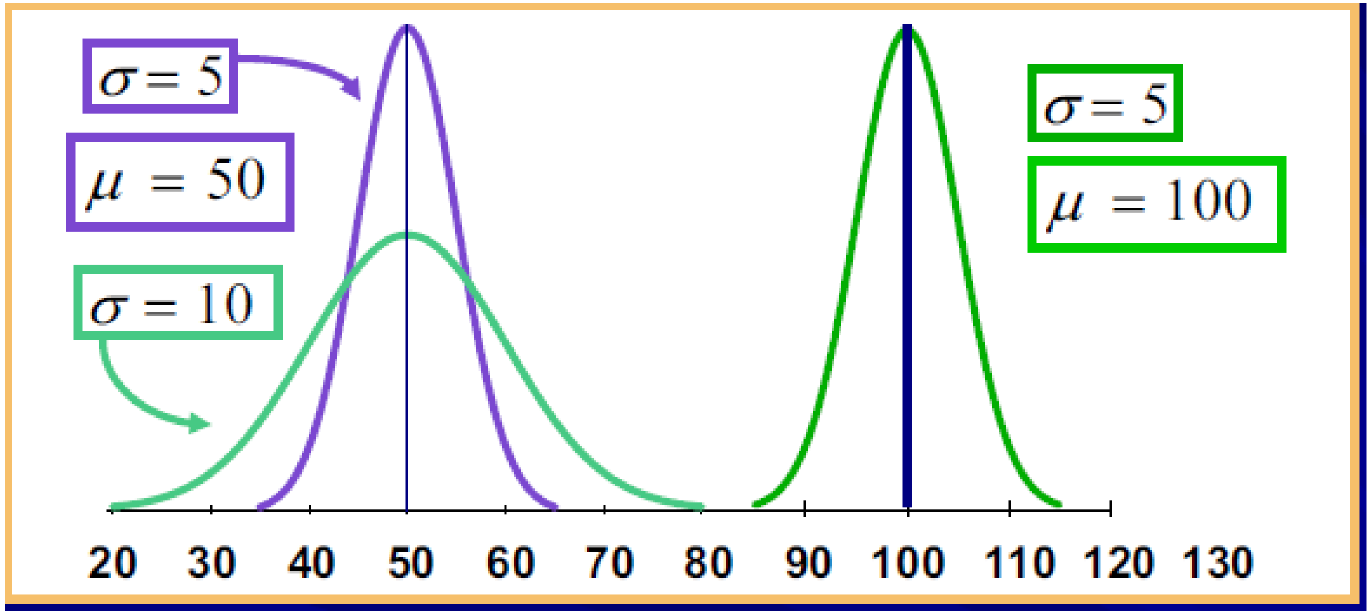


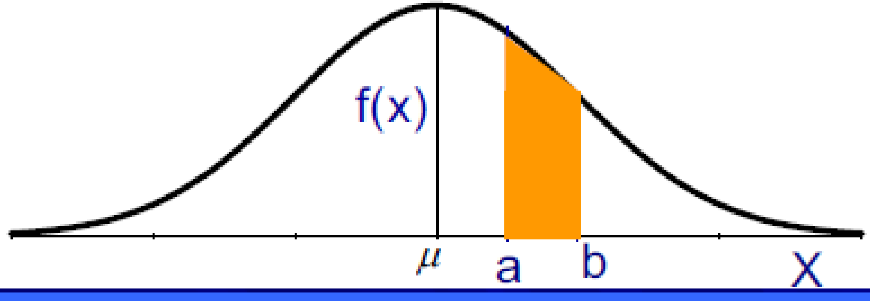
Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ. W

Γκαουσιανή Κατανομή

Τέλεια «καμπάνα» Συμμετρία!







Μέση τιμή μ $\mu_W = \int_{-\infty}^{\infty} w\, f_W(w)\,dw$

Διασπορά σ^2 $E[(W-\mu_W)^2] = \sigma_W^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w-\mu_W)^2 f_W(w)\,dw$

Τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

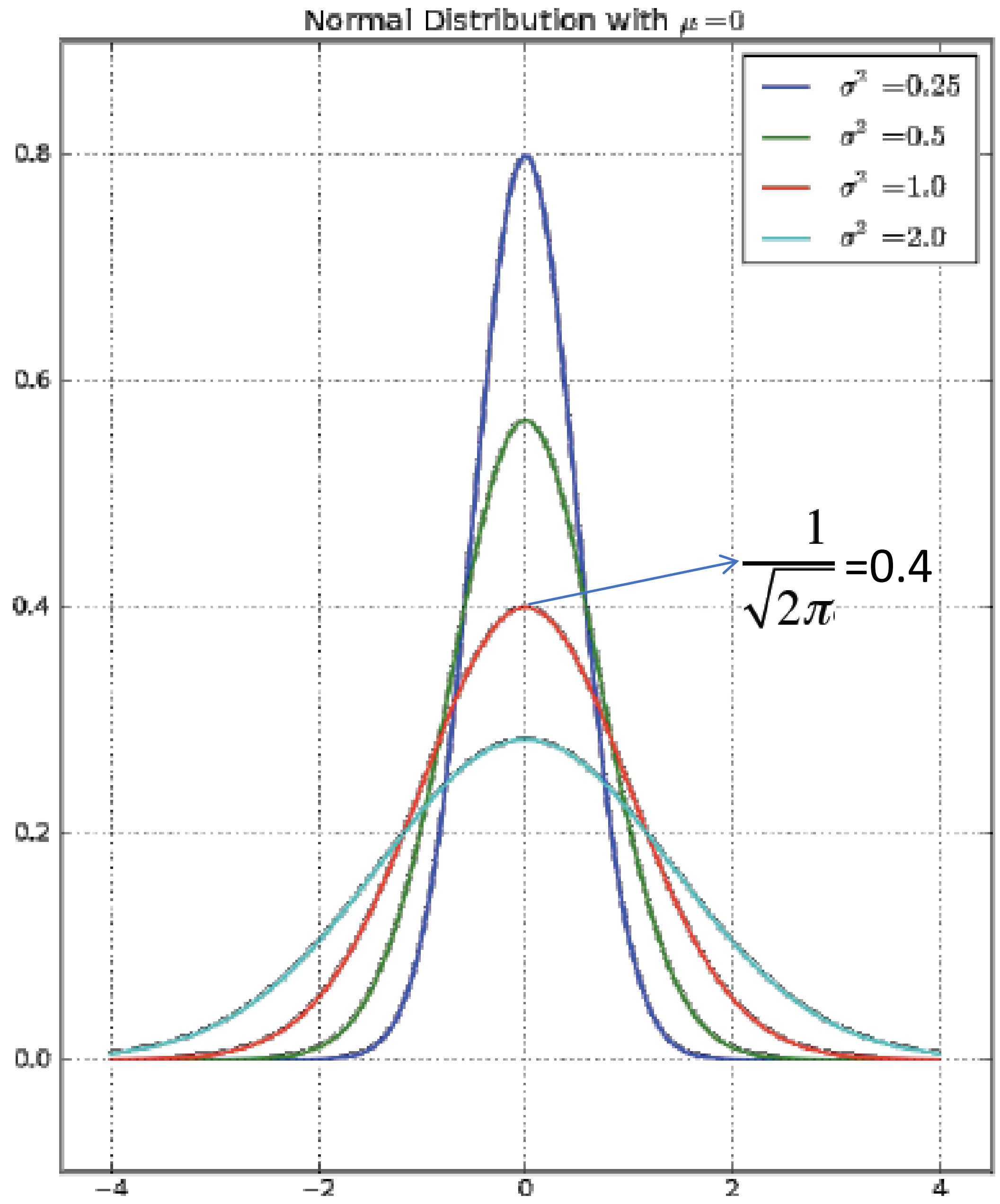
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Η Κατανομή του Gauss – Κανονική κατανομή

A Gaussian random variable W with
mean μ and
variance σ^2 has a **pdf** described by

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

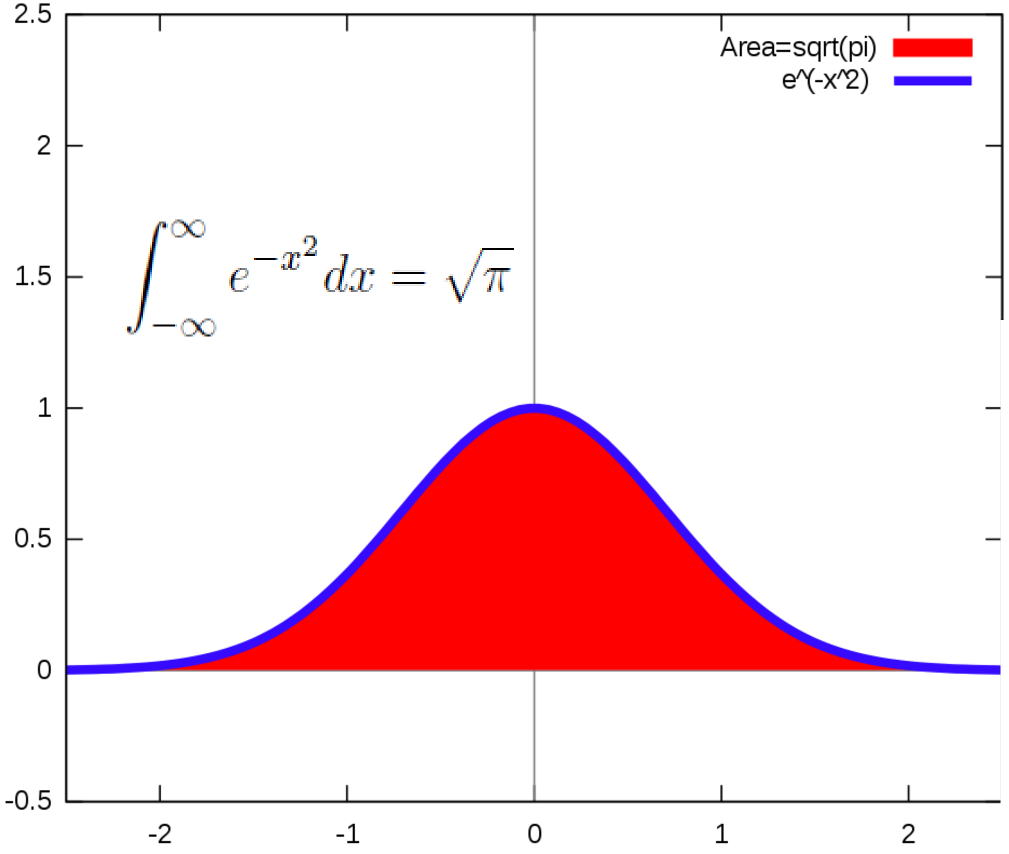
Αν μ=0 και σ^2 =1 τότε έχομε την κανονική κατανομή N(0,1)

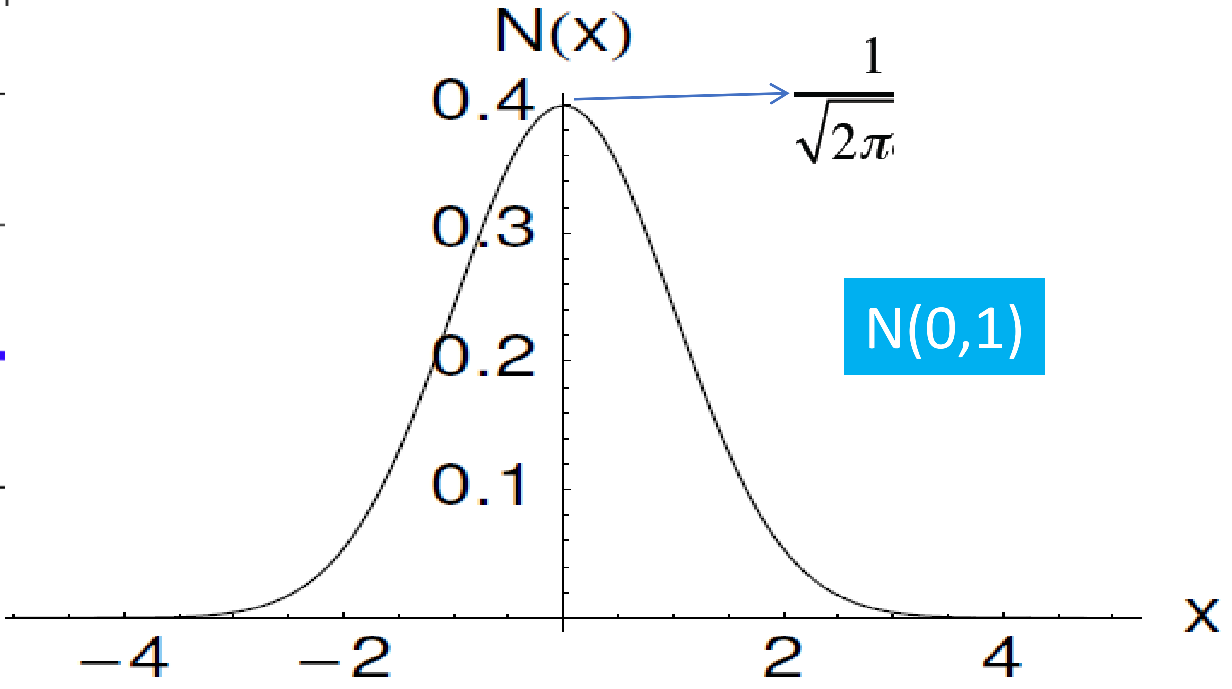


Σχόλια στην κατανομή Gaussian / Normal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

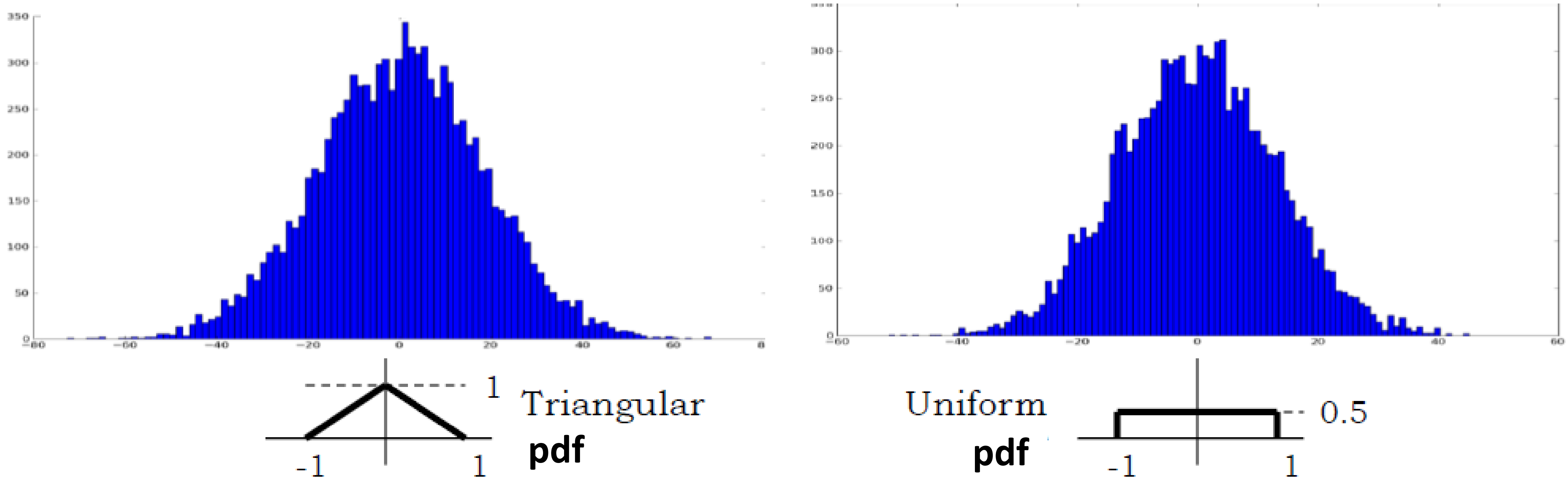
$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$



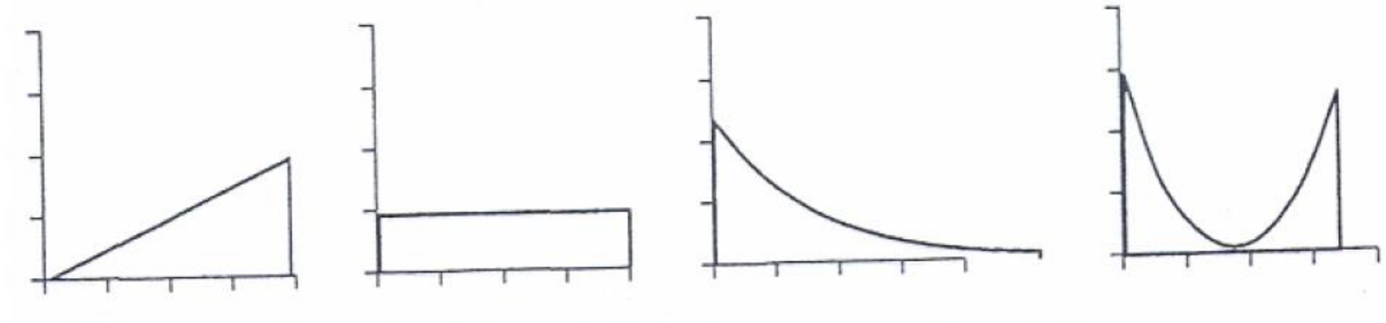


Πανταχού παρόν – Γκαουσιανός Θόρυβος

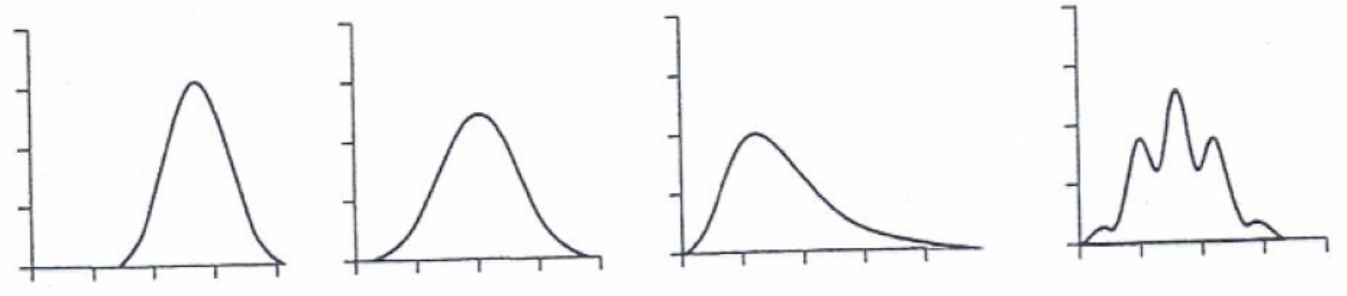
- Ο θόρυβος που λαμβάνεται στον δέκτη είναι συχνά το άθροισμα πολλών επιμέρους θορύβων ανεξάρτητων μεταξύ τους που προέρχονται από πολλές διαφορετικές πηγές. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα λέει ότι το άθροισμά τους θα είναι Γκαουσιανός θόρυβος, ειδικά αν ο αριθμός τους είναι μεγάλος.
- Το σχήμα δείχνει τα ιστογράμματα των αποτελεσμάτων 10.000 δοκιμών (επαναλήψεων) αθροίσματος 100 τυχαίων δειγμάτων που αντλήθηκαν από [-1,1] χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές.



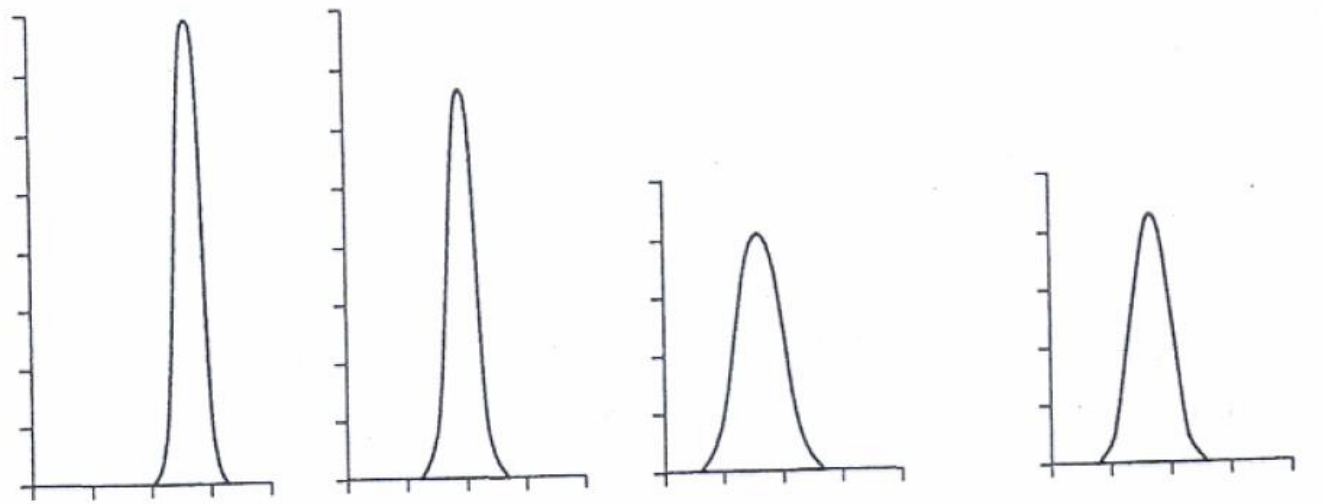
Παράδειγμα Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος



[redacted] οι κατανομές των <u>δειγματικών μέσων</u> είναι αντίστοιχα,
για ***n = 4***:



και για ***n = 25***:



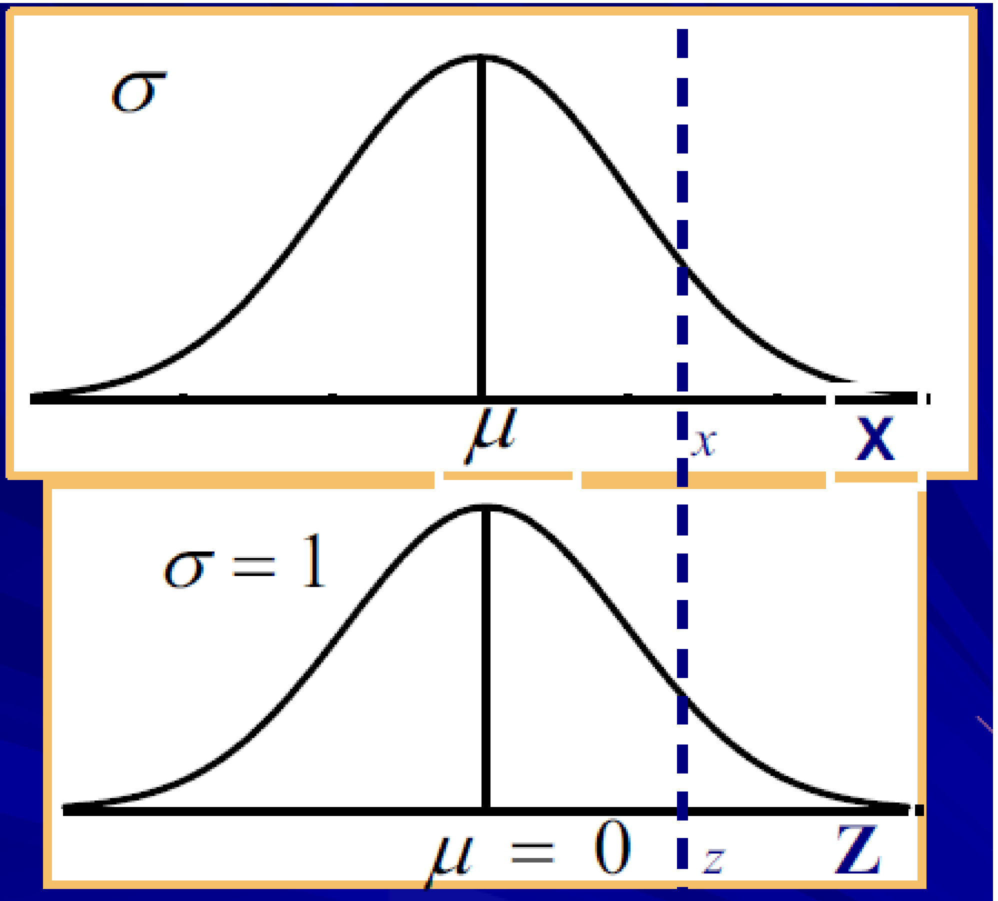
Σχέση της Γκαουσιανής κατανομής με την Κανονική N(0,1)

- Value x from RV X $N(\mu,\sigma)$:

Γκαουσιανή κατανομή

- Value z from RV Z N(0,1):

Τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή
Κανονική κατανομή N(0,1)



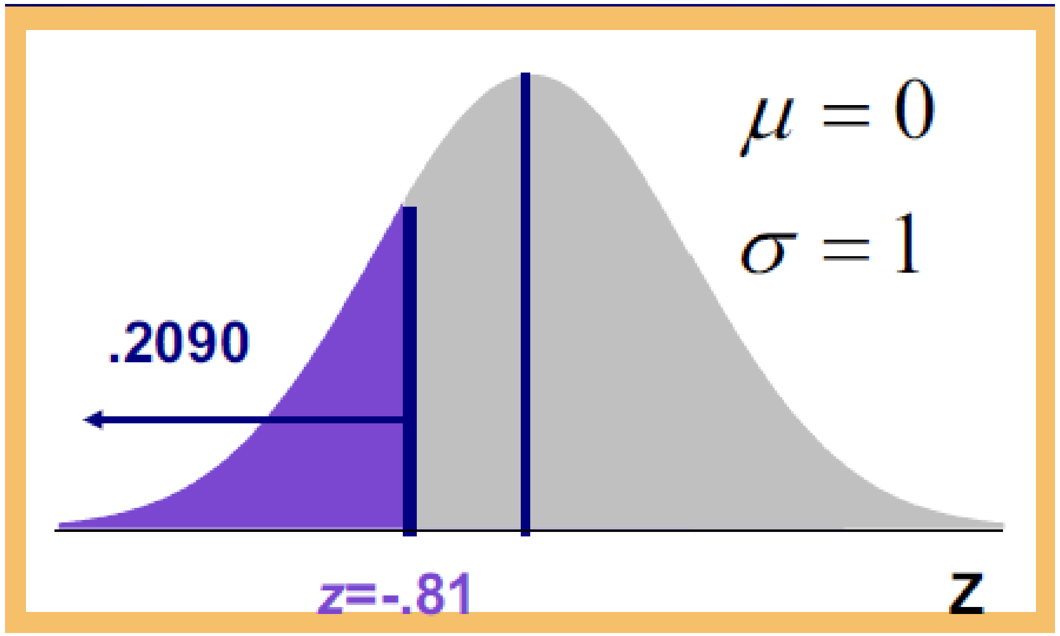
- z Score transformation:

Η τιμή *z* δείχνει πόσες τυπικές αποκλίσεις *σ* απέχει η τιμή *x* από το μέσο όρο *μ*. Έστω *x* =190, *μ* =150, *σ* =25, τότε *z* =(190–150)/25 = 1,6.
Δηλ. η τιμή 190 είναι 1,6 τυπικές αποκλίσεις πάνω από το 150.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Χρήση της τυποποιημένης κατανομής N(0,1)

Διατίθενται πίνακες που δείχνουν τιμές της αθροιστικής κατανομής (Cumulative Distribution Function - CDF)
Π.χ. για z = - 0.81, τότε από τους πίνακες παίρνουμε $CDF(z) = P(z \le -0.81) = 0.2090$



CDF της τυποκοιημένης Κανονικής Κατανομής

Cumulative Distribution Function of the Standard Normal Distribution

Example: If Z is standard Normal random variable, then F(1.00) = P(Z ≤ 1.00) = .8413

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
–0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

CDF
της τυποποιημένης
Κανονικής
Κατανομής

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

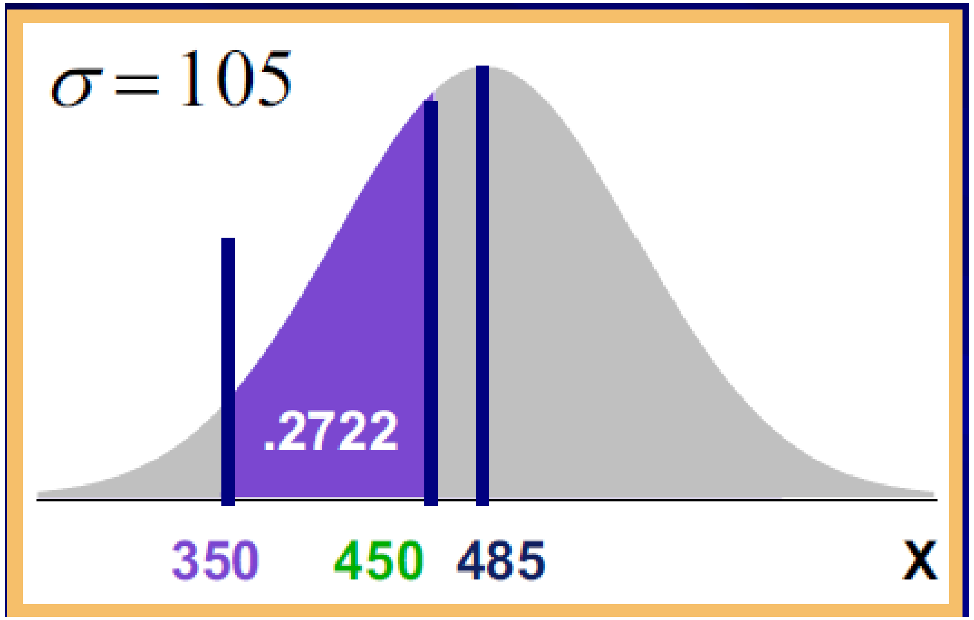
Εύρεση Πιθανότητας από Γκαουσιανή Κατανομή N(μ,σ)

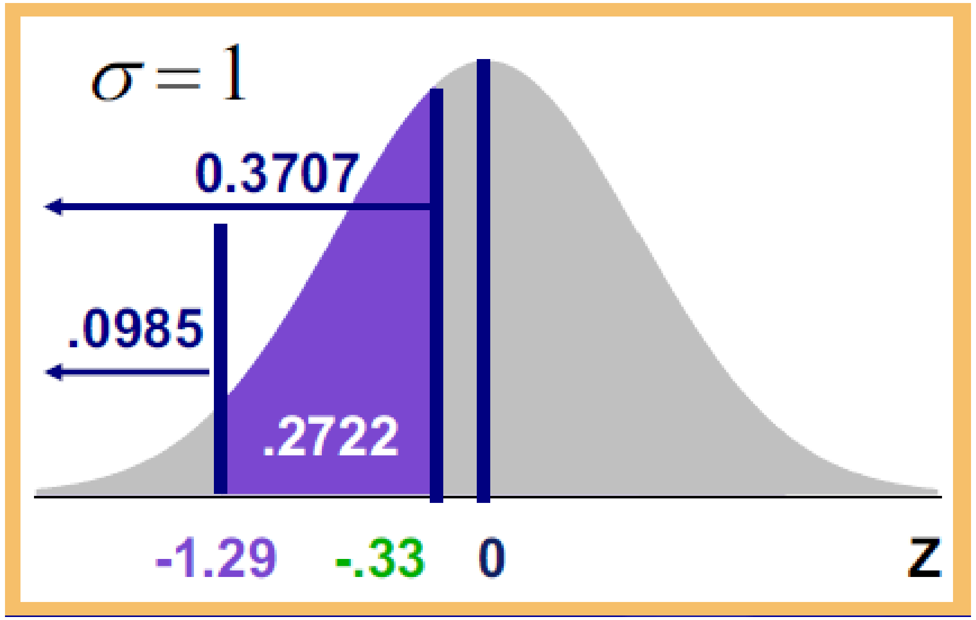
X is normally distributed with $\mu = 485$, and $\sigma = 105$

$$P(350 \le x \le 450) = P(-1.29 \le z \le -0.33)$$

$$= P(z \le -0.33) - P(z \le -1.29) = 0.3707 - 0.0985 = 0.2722$$

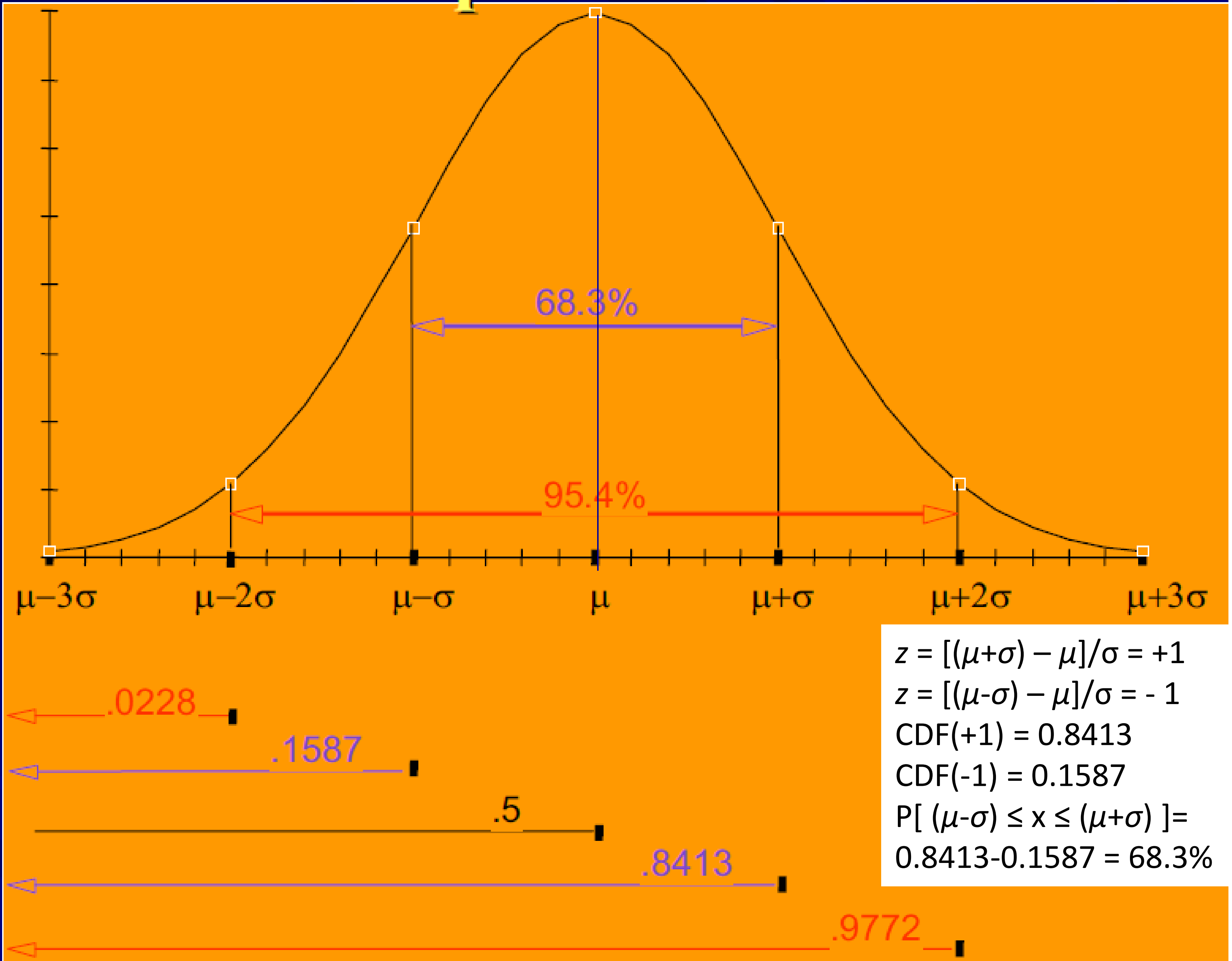
Μετασχηματίζουμε τις τιμές x σε z: z = (450-485)/105 = **-0.33** και z = (350-485)/105 = **-1.29**
και χρησιμοποιούμε τους πίνακες CDF της τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής N(0, 1)





Some helpful rules of thumb

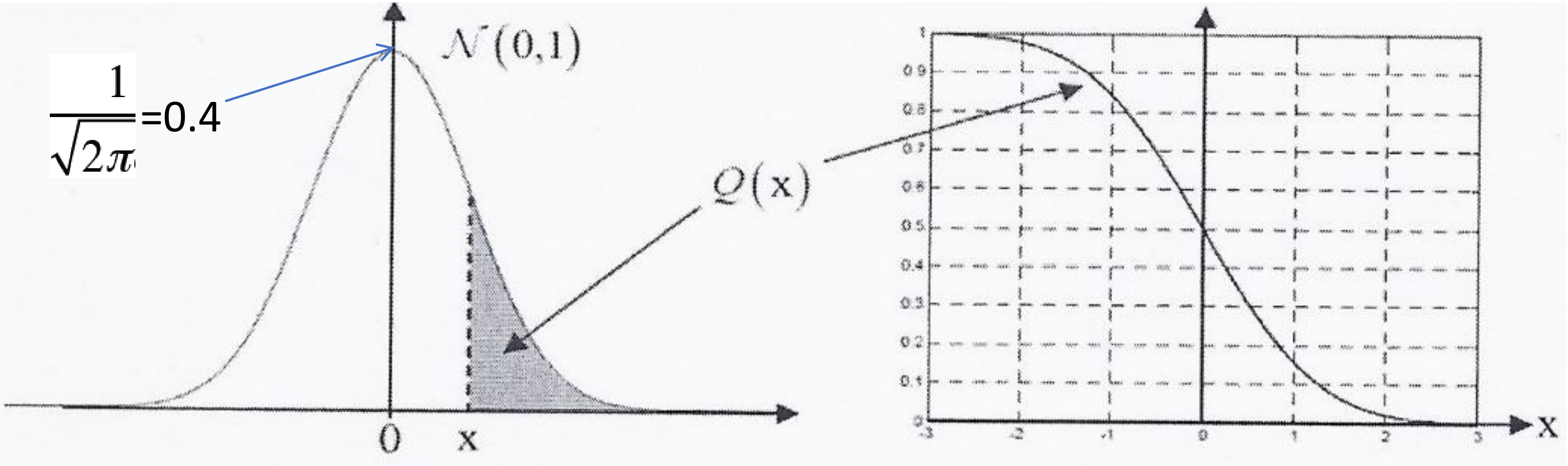
Αξίζει να θυμόμαστε από την N(μ,σ)



$z = [(\mu+\sigma) - \mu]/\sigma = +1$
$z = [(\mu-\sigma) - \mu]/\sigma = -1$
CDF(+1) = 0.8413
CDF(-1) = 0.1587
P[$(\mu-\sigma) \leq x \leq (\mu+\sigma)$]=
0.8413-0.1587 = 68.3%

Q-Function: Πιθανότητα «ουράς» Κανονικής Κατανομής

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad Q(-\infty) = 1 \quad ; \quad Q(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad Q(\infty) = 0 \quad ; \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$



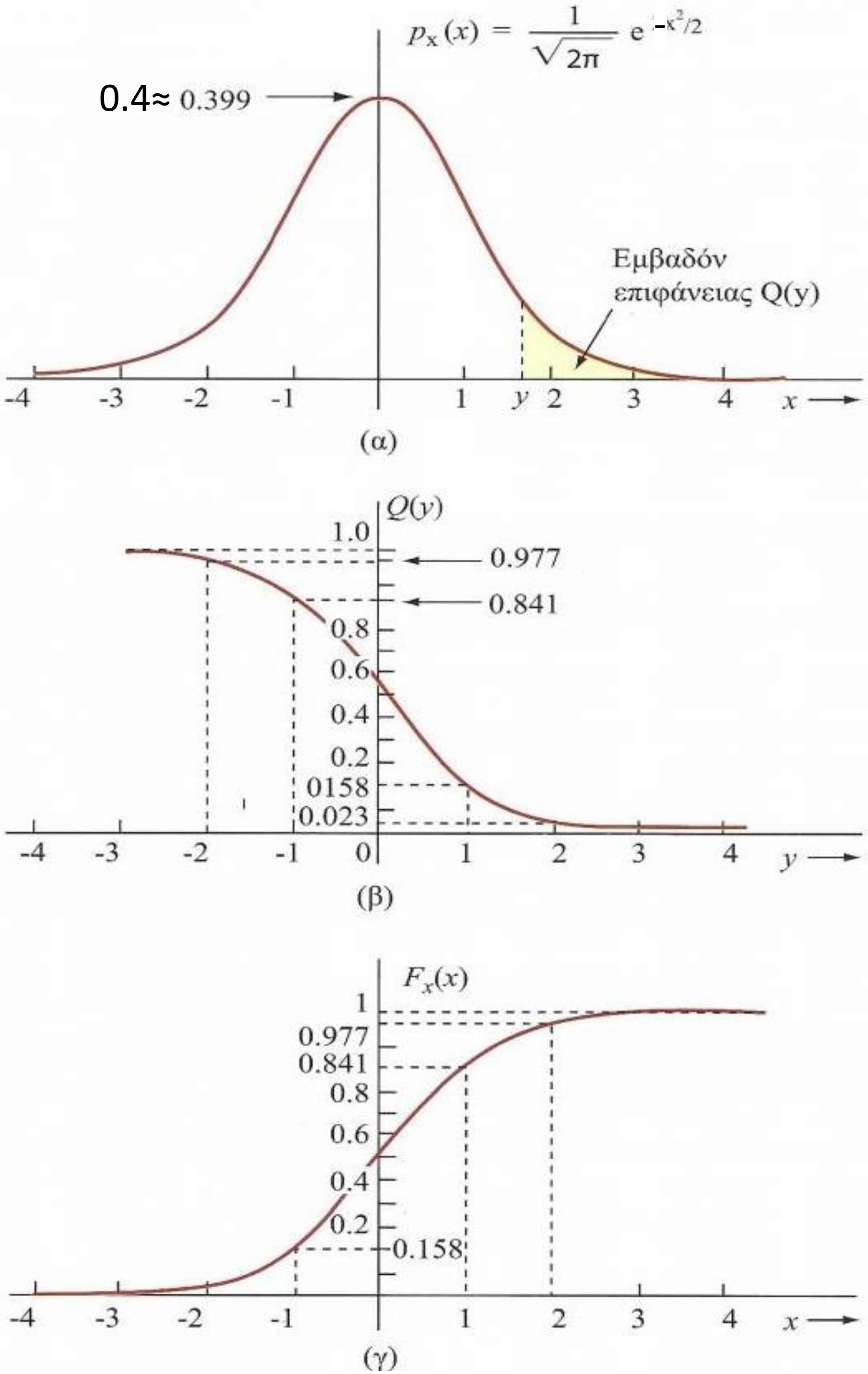
Q*(*a*) = 1 – CDF(*a*), όπου CDF(*a*) η τιμή της CDF από τους πίνακες της N(0,1) για *z* = *a
***Π.χ. Q*(1) = 1 – CDF(1) = 1 – 0.8413 = 0.1587**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \Pr\{X > \mu + a\} = \Pr\{X < \mu - a\} = Q\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

Gaussian Distribution (α)

Q-function (β)

Cumulative Distribution (γ)



Q(2)= 1-F(2)= 1-0.977=0.023

F(2)= 1-Q(2)= 1-0.023=0.977

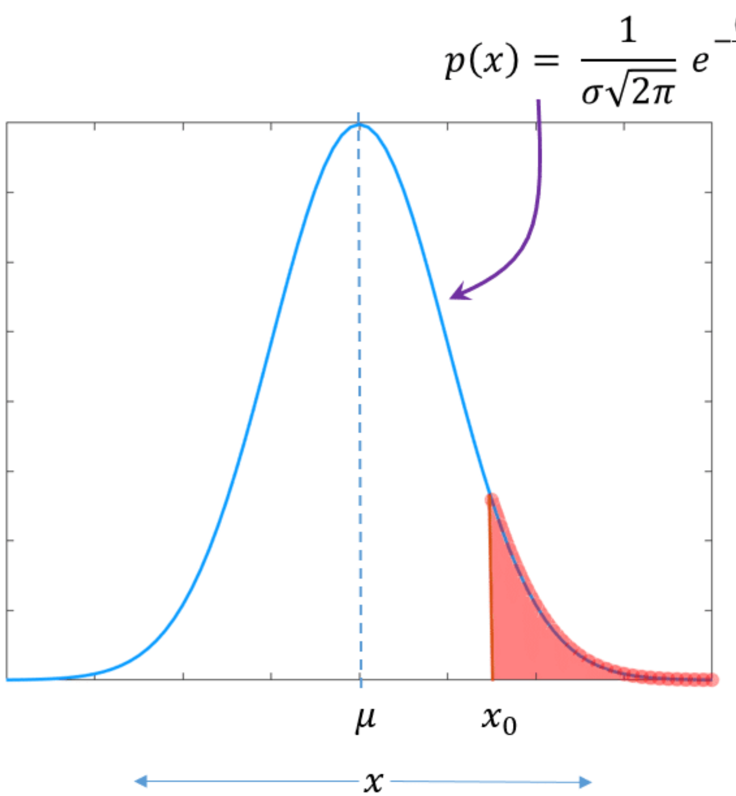
Τιμές της Q-function

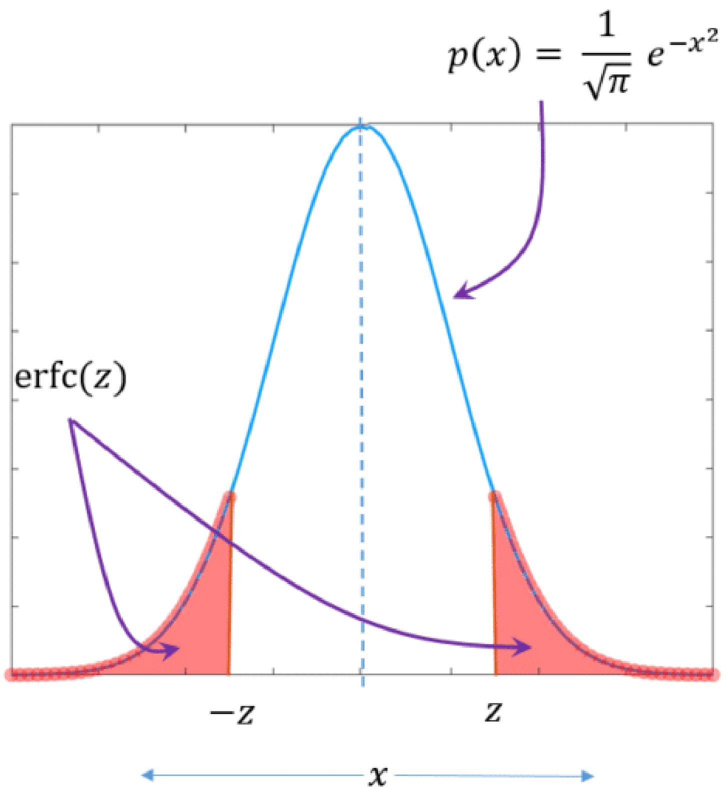
x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0.00	0.5	2.30	0.010724	4.55	2.6823×10^{-6}
0.05	0.48006	2.35	0.0093867	4.60	2.1125×10^{-6}
0.10	0.46017	2.40	0.0081975	4.65	1.6597×10^{-6}
0.15	0.44038	2.45	0.0071428	4.70	1.3008×10^{-6}
0.20	0.42074	2.50	0.0062097	4.75	1.0171×10^{-6}
0.25	0.40129	2.55	0.0053861	4.80	7.9333×10^{-7}
0.30	0.38209	2.60	0.0046612	4.85	6.1731×10^{-7}
0.35	0.36317	2.65	0.0040246	4.90	4.7918×10^{-7}
0.40	0.34458	2.70	0.003467	4.95	3.7107×10^{-7}
0.45	0.32636	2.75	0.0029798	5.00	2.8665×10^{-7}
0.50	0.30854	2.80	0.0025551	5.05	2.2091×10^{-7}
0.55	0.29116	2.85	0.002186	5.10	1.6983×10^{-7}
0.60	0.27425	2.90	0.0018658	5.15	1.3024×10^{-7}
0.65	0.25785	2.95	0.0015889	5.20	9.9644×10^{-8}
0.70	0.24196	3.00	0.0013499	5.25	7.605×10^{-8}
0.75	0.22663	3.05	0.0011442	5.30	5.7901×10^{-8}
0.80	0.21186	3.10	0.0009676	5.35	4.3977×10^{-8}
0.85	0.19766	3.15	0.00081635	5.40	3.332×10^{-8}
0.90	0.18406	3.20	0.00068714	5.45	2.5185×10^{-8}
0.95	0.17106	3.25	0.00057703	5.50	1.899×10^{-8}
1.00	0.15866	3.30	0.00048342	5.55	1.4283×10^{-8}
1.05	0.14686	3.35	0.00040406	5.60	1.0718×10^{-8}
1.10	0.13567	3.40	0.00033693	5.65	8.0224×10^{-9}
1.15	0.12507	3.45	0.00028029	5.70	5.9904×10^{-9}
1.20	0.11507	3.50	0.00023263	5.75	4.4622×10^{-9}
1.25	0.10565	3.55	0.00019262	5.80	3.3157×10^{-9}
1.30	0.0968	3.60	0.00015911	5.85	2.4579×10^{-9}
1.35	0.088508	3.65	0.00013112	5.90	1.8175×10^{-9}
1.40	0.080757	3.70	0.0001078	5.95	1.3407×10^{-9}
1.45	0.073529	3.75	8.8417×10^{-5}	6.00	9.8659×10^{-10}
1.50	0.066807	3.80	7.2348×10^{-5}	6.05	7.2423×10^{-10}
1.55	0.060571	3.85	5.9059×10^{-5}	6.10	5.3034×10^{-10}
1.60	0.054799	3.90	4.8096×10^{-5}	6.15	3.8741×10^{-10}
1.65	0.049471	3.95	3.9076×10^{-5}	6.20	2.8232×10^{-10}
1.70	0.044565	4.00	3.1671×10^{-5}	6.25	2.0523×10^{-10}
1.75	0.040059	4.05	2.5609×10^{-5}	6.30	1.4882×10^{-10}
1.80	0.03593	4.10	2.0658×10^{-5}	6.35	1.0766×10^{-10}
1.85	0.032157	4.15	1.6624×10^{-5}	6.40	7.7688×10^{-11}
1.90	0.028717	4.20	1.3346×10^{-5}	6.45	5.5925×10^{-11}
1.95	0.025588	4.25	1.0689×10^{-5}	6.50	4.016×10^{-11}
2.00	0.02275	4.30	8.5399×10^{-6}	6.55	2.8769×10^{-11}
2.05	0.020182	4.35	6.8069×10^{-6}	6.60	2.0558×10^{-11}
2.10	0.017864	4.40	5.4125×10^{-6}	6.65	1.4655×10^{-11}
2.15	0.015778	4.45	4.2935×10^{-6}	6.70	1.0421×10^{-11}
2.20	0.013903	4.50	3.3977×10^{-6}	6.75	7.3923×10^{-12}
2.25	0.012224				

x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)
0	0.5	2.9	0.00186581	5.8	3.31575e-9
0.1	0.460172	3.0	0.0013499	5.9	1.81751e-9
0.2	0.42074	3.1	0.000967603	6.0	9.86588e-10
0.3	0.382089	3.2	0.000687138	6.1	5.30342e-10
0.4	0.344578	3.3	0.000483424	6.2	2.82316e-10
0.5	0.308538	3.4	0.000336929	6.3	1.48823e-10
0.6	0.274253	3.5	0.000232629	6.4	7.76885e-11
0.7	0.241964	3.6	0.000159109	6.5	4.016e-11
0.8	0.211855	3.7	0.0001078	6.6	2.05579e-11
0.9	0.18406	3.8	0.000072348	6.7	1.0421e-11
1.0	0.158655	3.9	0.0000480963	6.8	5.23096e-12
1.1	0.135666	4.0	0.0000316712	6.9	2.60013e-12
1.2	0.11507	4.1	0.0000206575	7.0	1.27981e-12
1.3	0.0968005	4.2	0.0000133457	7.1	6.23784e-13
1.4	0.0807567	4.3	8.53991e-6	7.2	3.01063e-13
1.5	0.0668072	4.4	5.41254e-6	7.3	1.43884e-13
1.6	0.0547993	4.5	3.39767e-6	7.4	6.80922e-14
1.7	0.0445655	4.6	2.11245e-6	7.5	3.19089e-14
1.8	0.0359303	4.7	1.30081e-6	7.6	1.48065e-14
1.9	0.0287166	4.8	7.93328e-7	7.7	6.80331e-15
2.0	0.0227501	4.9	4.79183e-7	7.8	3.09536e-15
2.1	0.0178644	5.0	2.86652e-7	7.9	1.39452e-15
2.2	0.0139034	5.1	1.69827e-7	8.0	6.22096e-16
2.3	0.0107241	5.2	9.96443e-8		
2.4	0.00819754	5.3	5.79013e-8		
2.5	0.00620967	5.4	3.33204e-8		
2.6	0.00466119	5.5	1.89896e-8		
2.7	0.00346697	5.6	1.07176e-8		
2.8	0.00255513	5.7	5.99037e-9		

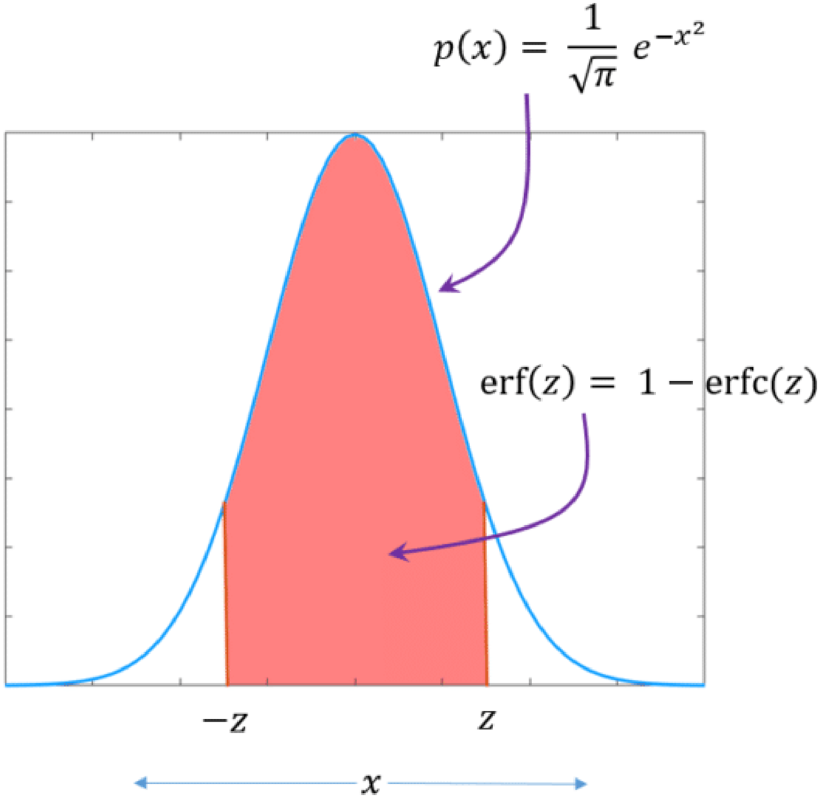
Error Functions (erf - erfc) and Q-Function

Προσοχή!!! Ο τύπος της erf ή της erfc δίδεται για Γκαουσιανή κατανομή με μ=0 και σ^2=1/2 $\Rightarrow$ σ=1/$\sqrt{2}$





Complementary error function : erfc(z)



Error function : erf(z)

$$Q(z) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$erfc(z) = 2\,Q(z\sqrt{2})$$

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} e^{-x^2} dx$$

$$erf(z) = 1 - erfc(z)$$

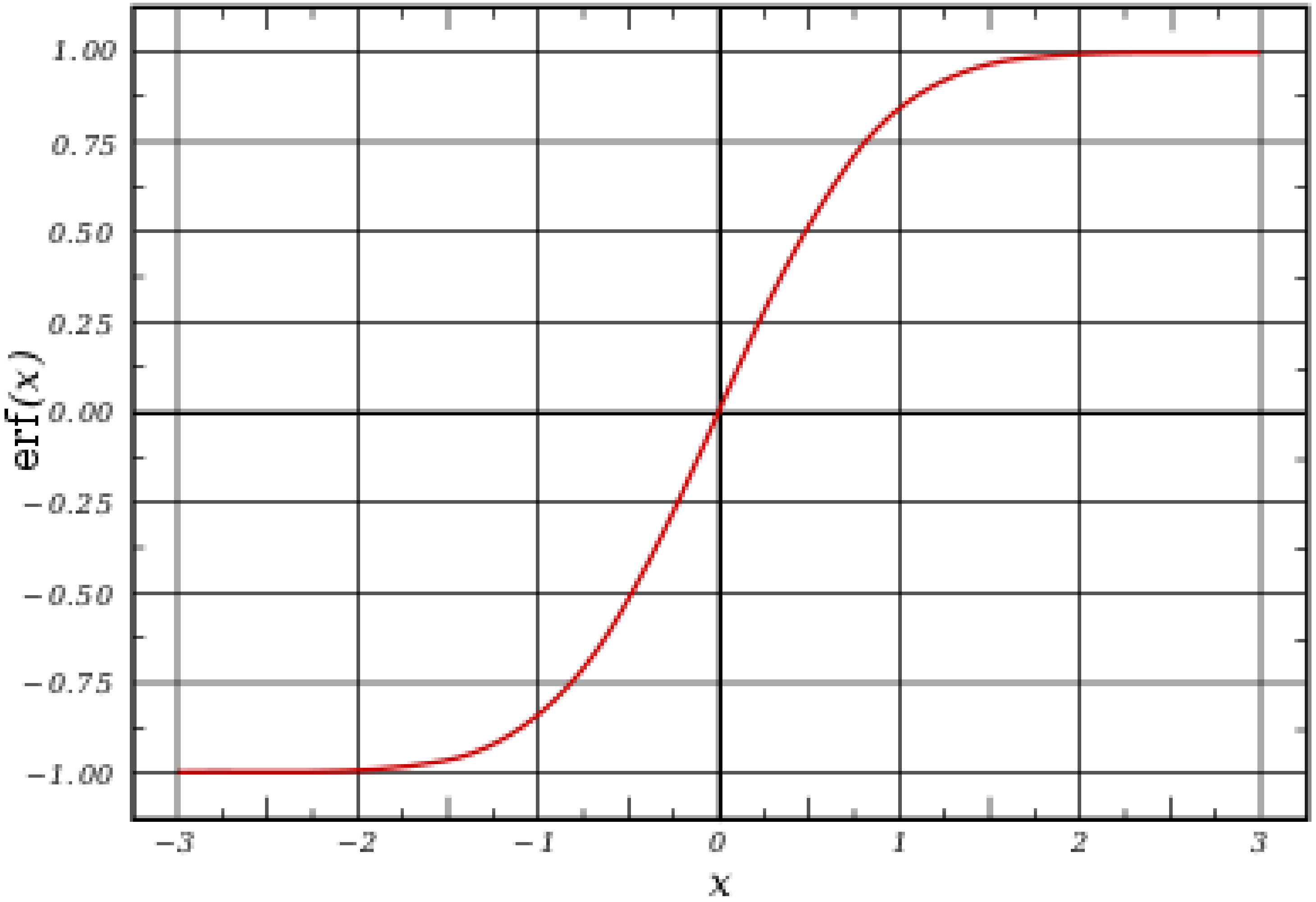
Error Functions (erf - erfc) and Q-Function (συνέχεια)

$$\mathbf{erfc}\ x = 1 - \mathbf{erf}\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt = 2Q(\sqrt{2}\,x)$$

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

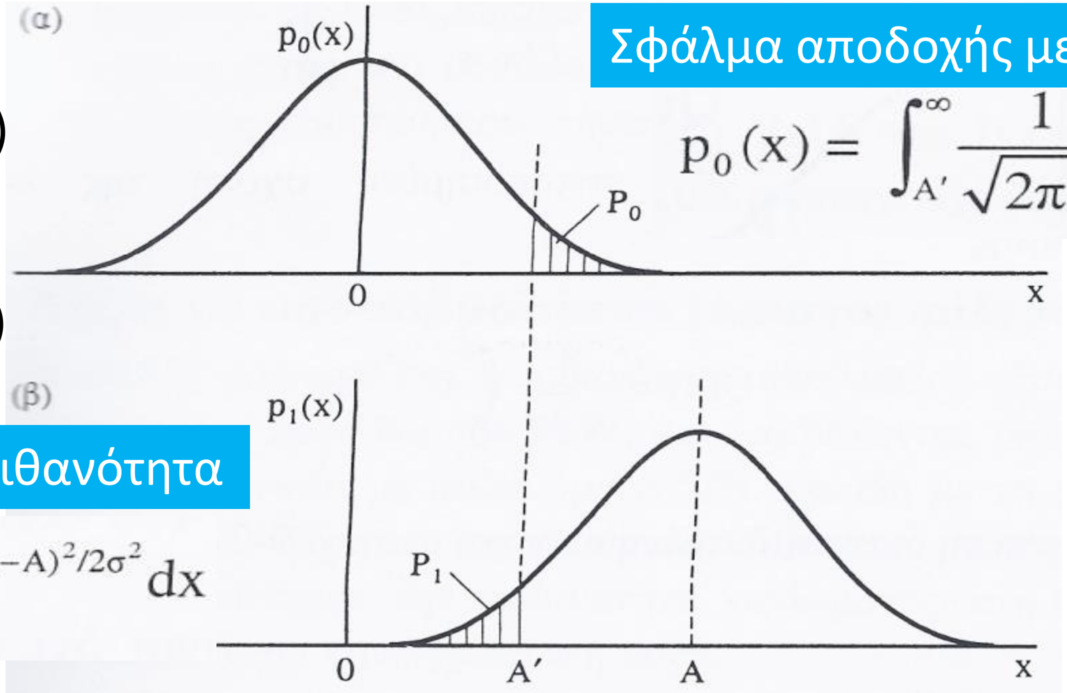


Πιθανότητα σφάλματος στην ψηφιακή μετάδοση βασικής ζώνης υπό θόρυβο

- Έστω μονοπολική κωδικοποίηση (**NRZ**): για το «1» στέλνομε παλμό A Volts και για το «0» παλμό 0 Volts.
- Στον δέκτη χρησιμοποιούμε (βέλτιστο) κατώφλι απόφασης A’ = A/2 Volts.
- Αν την στιγμή της δειγματοληψίας ανιχνεύσουμε πλάτος > A’ τότε εκτιμούμε ότι εστάλη το «1».
- Αν την στιγμή της δειγματοληψίας ανιχνεύσουμε πλάτος < A’ τότε εκτιμούμε ότι εστάλη το «0».
- Υπεισέρχεται δε AWGN (με μ=0 και ισχύ σ^2). Λόγω του θορύβου έχομε σφάλμα αποδοχής και απόρριψης.

(α) εστάλη «0» (+ θόρυβος)

(β) εστάλη «1» (+ θόρυβος)



Σφάλμα αποδοχής με πιθανότητα

$$p_0(x) = \int_{A'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

Σφάλμα απόρριψης με πιθανότητα

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{A'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-A)^2/2\sigma^2} dx$$

Πιθανότητα σφάλματος για μονοπολική μετάδοση

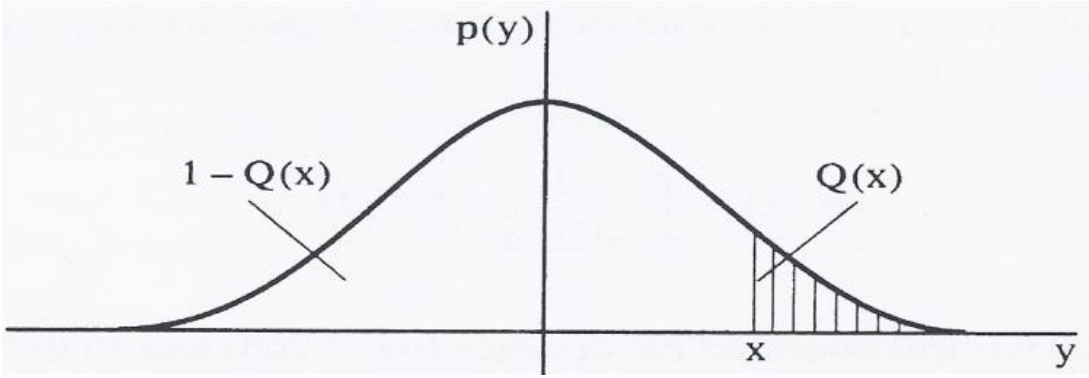
- Αν P_0' και P_1' οι πιθανότητες μετάδοσης των «0» και «1», η ολική πιθανότητα σφάλματος είναι:

$$\mathbf{P_\sigma = P_0 P_0' + P_1 P_1'}$$

Αν θεωρήσουμε ότι κατά μέσον όρο $P_0' = P_1' = 50\%$ τότε $\mathbf{P_\sigma = ½ (P_0 + P_1)}$

Επειδή A' = A/2 οι πιθανότητες $P_0 = P_1$ και άρα $\mathbf{P_\sigma = ½(2P_0) = P_0 = P_1}$

Δηλαδή: $$p_\sigma(x) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$



Με χρήση της Q-function έχομε:

$$p_\sigma = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/2} dy = Q[A/(2\sigma)]$$

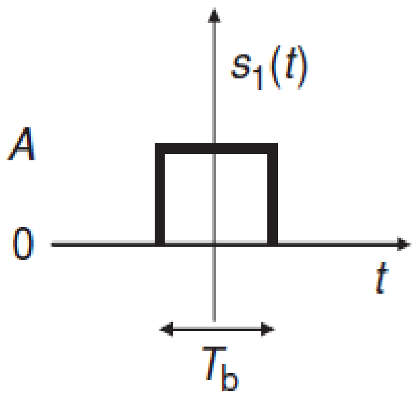
$z = (A/2–\mu)/\sigma = A/(2\sigma)$

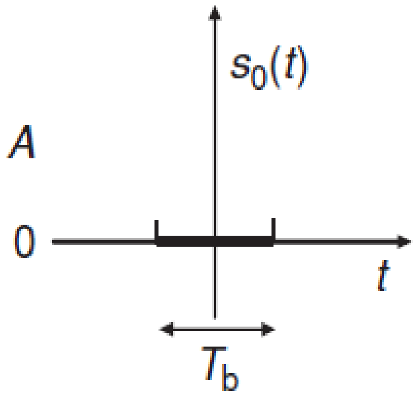
Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η μέση ισχύς ισοπίθανων μονοπολικών παλμών είναι: $S = \frac{1}{2}(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)A^2 = \frac{A^2}{2}$

και η ισχύς του λευκού θορύβου $\sigma^2 = P_N$, τότε $\mathbf{P_\sigma = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2P_N}}\right) = BER}$ (σύνδεση BER-SNR)

BER συναρτήσει E_b/N_0 για unipolar coding

- Μέση ενέργεια bit = $\mathbf{E_b = S/R_b}$ *όπου* $\mathbf{R_b=1/T_b}$ (bps), S μέση ισχύς συμβόλου = ισχύ bit για binary κωδικοποίηση (δηλ. M-ary με **M=2**).
- $\mathbf{E_b/N_0= S/(R_bN_0)}$ $R_b/B=2/(1+r) \Rightarrow \max R_b=2B \Rightarrow B=R_b/2$ $\mathbf{P_N= \sigma^2= N_0B= N_0R_b/2 \Rightarrow N_0R_b= 2\sigma^2}$





$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = A^2T_b$$

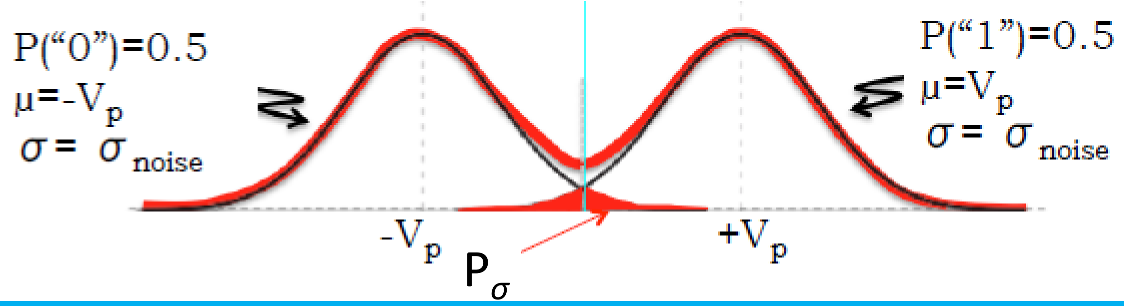
$$E_0 = \int_0^{T_b} s_0^2(t)\,dt = 0$$

$$E_b = P_0E_0 + P_1E_1 = \frac{1}{2}(E_0+E_1) = \frac{A^2T_b}{2}$$

UNIPOLAR
$\mathbf{E_b/N_0=}$
$\mathbf{A^2T_b/(2N_0) =}$
$\mathbf{A^2/(2N_0R_b)=}$
$\mathbf{A^2/(4\sigma^2)=}$
$\mathbf{[A/(2\sigma)]^2}$
$\mathbf{BER=Q(\sqrt{E_b/N_0})}$

BER συναρτήσει SNR ή E_b/N_0 για polar coding

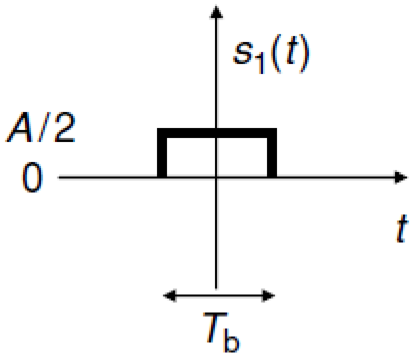
$$V_p = \sqrt{E_S}$$
$$2\sigma^2 = N_0$$

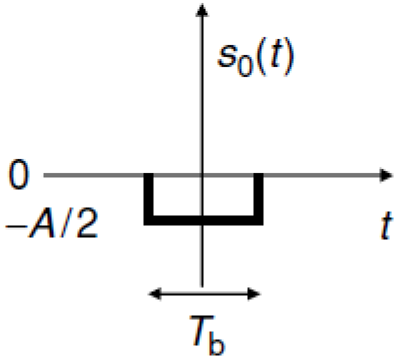


Για σύγκριση με unipolar coding έστω V_p = A/2. Οπότε 0 Volts είναι το (βέλτιστο) κατώφλι απόφασης

$$p_\sigma(x) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \qquad p_\sigma = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/2} dy = Q[A/(2\sigma)]$$

Η μέση ισχύς ισοπίθανων παλμών είναι: $S=½(-A/2)^2+½(A/2)^2=(A/2)^2 \Rightarrow A/2=\sqrt{S} \Rightarrow P_\sigma=Q[\sqrt{(S/P_N)}]=BER$





$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = \frac{A^2 T_b}{4}$$

$$E_0 = \int_0^{T_b} s_0^2(t)\,dt = \frac{A^2 T_b}{4}$$

$$E_b = P_0 E_0 + P_1 E_1 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \frac{A^2 T_b}{4}$$

POLAR
E_b/N_0=
$A^2T_b/(4N_0)$ =
$A^2/(4N_0R_b)$=
$A^2/(8\sigma^2)$=
$[A/(2\sigma)]^2/2$
BER=$Q(\sqrt{2E_b/N_0})$

Συγκριτικά: BER για μονοπολική – πολική κωδικοποίηση, συναρτήσει SNR και E_b/N_0

Μονοπολική κωδικοποίηση (NRZ):
για «1» στέλνομε παλμό A Volts και για «0» παλμό 0 Volts.

Πολική κωδικοποίηση (NRZ):
για «1» στέλνομε παλμό A/2 Volts και για το «0» παλμό –A/2 Volts.

Ισοπίθανα bits «1», «0».
Βέλτιστο κατώφλι απόφασης.

	BER (Unipolar)	**BER (Polar)**	
	$Q[\sqrt{(S/2P_N)}]$	$Q[\sqrt{(S/P_N)}]$	SNR
	$Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]$	$Q[\sqrt{(2E_b/N_0)}]$	E_b/N_0

S ισχύς σήματος
P_N ισχύς θορύβου

E_b ενέργεια ανά bit
N_0/ 2 φασματική πυκνότητα θορύβου