Απόρροια του θεωρήματος Shannon-Hartley

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

Φασματική Αποδοτικότητα (Spectral efficiency)

- Παλμός/σύμβολο διάρκειας T, $W_{min}=1/T$ (Hz)
- 1 σύμβολο το μεταδίδουμε με K bits = $\log_2 M$ (M-ary coding)
- $R \equiv R_b = K/T \Rightarrow N_{BW} = R/W = (K/T)/W$ (φασματική απόδοση) $\Rightarrow$

  max $N_{BW} = \log_2 M$ bps/Hz (απουσία θορύβου)

- <u>Παρουσία AWGN</u>, max $R_b = C = W \log_2(1 + SNR)$

  max $N_{BW} = C / W = \log_2(1 + SNR)$

- *Για γραμμική αύξηση της φασματικής απόδοσης, πρέπει να επιτύχουμε εκθετική αύξηση του SNR (στην είσοδο του δέκτη):* $C/W = \log_2(1+SNR) \Rightarrow 2^{C/W} = 1+SNR$ *ή* $SNR = 2^{C/W}-1$
- $C/W=\log_{10}(1+SNR)/\log_{10}(2) \Rightarrow C/W \cong (3{,}322 \times 10/10)\log_{10}(SNR)$

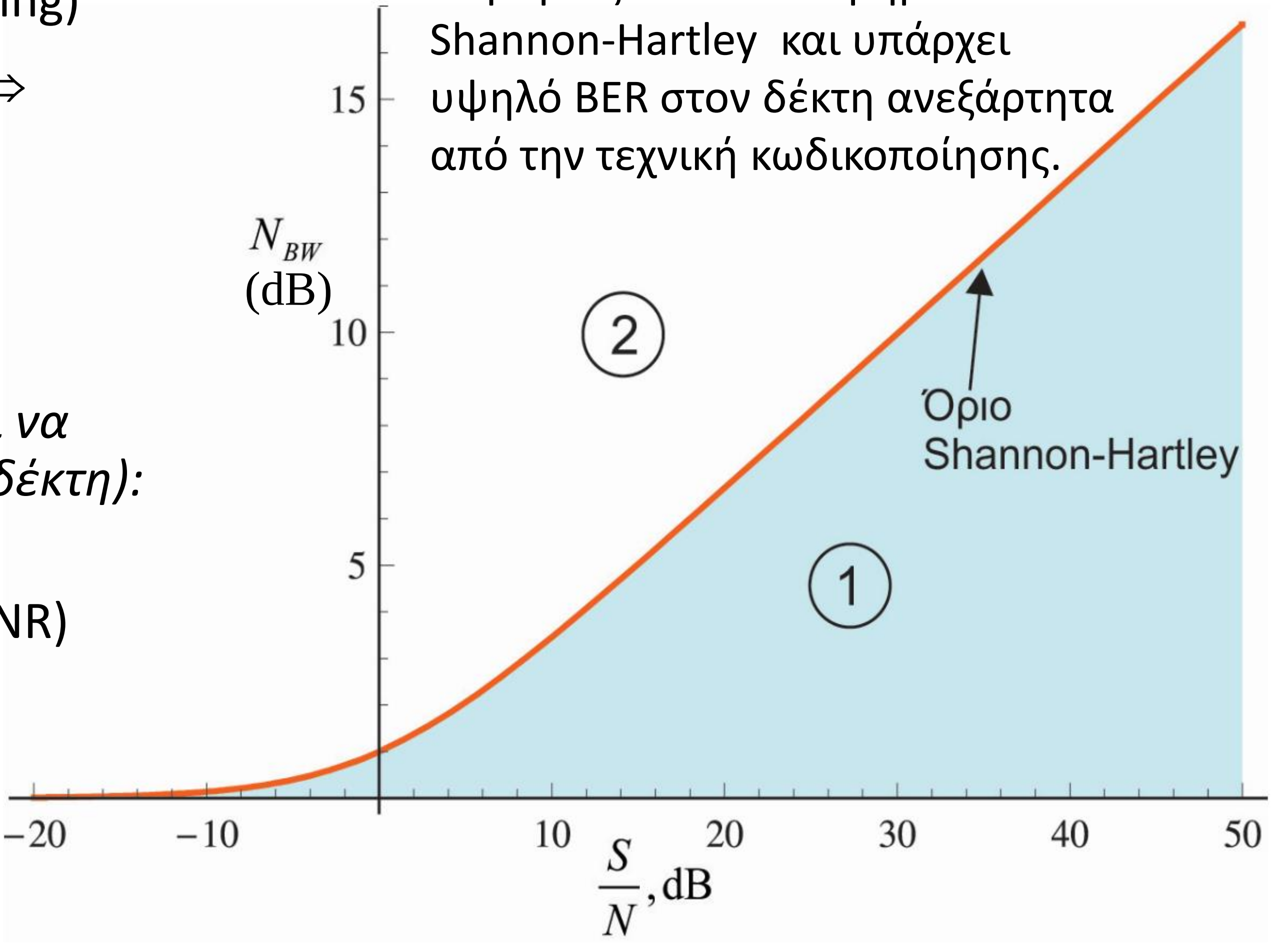
  $\Rightarrow$ max $N_{BW} = C/W = 0{,}3322(SNR)_{db}$

  όπου για SNR = 0 dB, C = W, max $N_{BW} = 1$

<u>Παράδειγμα:</u> Σήμα ομιλίας μεταδίδεται με 64 Kbps σε κανάλι AWGN εύρους ζώνης 48 KHz. Το ελάχιστο SNR είναι

$SNR = 2^{(64/48)} - 1 = 1{,}52 \Rightarrow (SNR)dB = 10\log(1{,}52) \cong 1{,}8$ dB

<u>Περιοχή (2):</u> Παραβιάζεται το θεώρημα Shannon-Hartley και υπάρχει υψηλό BER στον δέκτη ανεξάρτητα από την τεχνική κωδικοποίησης.



<u>Περιοχή (1):</u> Ισχύει το θεώρημα Shannon-Hartley και έχομε αυθαίρετα χαμηλό BER στον δέκτη.

Bit Rate vs Symbol Rate (Baude Rate)

SNR vs E_b/N_0

Αν η (χρονική) διάρκεια των bits (1 ή 0) είναι T_b τότε
Data rate, **$R_b = 1/T_b$ (bps)**.
Ένα σύμβολο μπορεί να αντιστοιχεί σε 1 bit (binary symbol)
ή σε σύνολο από *n* bits
ή σε σύνολο M ξεχωριστών επιπέδων τάσεως (Volts).
Αν η (χρονική) διάρκεια των συμβόλων είναι T_s τότε
Symbol rate ή Baud rate **$R_s = 1 / T_s$ (baud ή symbols/s)**.
Αν $M=2^n$, τότε **$R_b = R_s \log_2 M = R_s\, n$ (bps)**

SNR ή **(10logSNR)db** εκφράζει την λόγο της ισχύος του χρήσιμου Σήματος προς την ισχύ του θορύβου.
Σε ψηφιακά συστήματα πιο χρήσιμος είναι ο λόγος **E_b/N_0**

R_b = bit rate (in bits per second)
S = total signal power (watts)
E_b = energy per bit (in joules/bit)
N = total noise power (over entire bandwidth B in Hz)
N_0 = noise spectral density ($N = N_0 \cdot B$ where B = bandwidth)

$$\frac{S}{R_b} = E_b \qquad \frac{E_b}{N} = \frac{S}{R_b \cdot N} \qquad SNR = \frac{R_b E_b}{N_0 B}$$

Αύξηση $R_b \Rightarrow$ αύξηση SNR αλλά και του θορύβου N που μπορεί να ελαττώσει τον SNR

Φασμασματική απόδοση (N_{BW}) συναρτήσει του E_b/N_0

- Η λαμβανομένη ισχύς (λευκού) θορύβου είναι άμεση συνάρτηση του εύρους ζώνης μετάδοσης. Αν π.χ. έχομε εύρος ζώνης W, η ισχύς του θορύβου είναι N_0W.
- Αν η ισχύς του πληροφοριακού σήματος είναι $P_s = E_b R$, τότε

  $SNR = P_s /(N_0W) = E_bR/(N_0W)$
- $N_{BW} = R/W \leq \log_2(1+SNR) \Rightarrow$

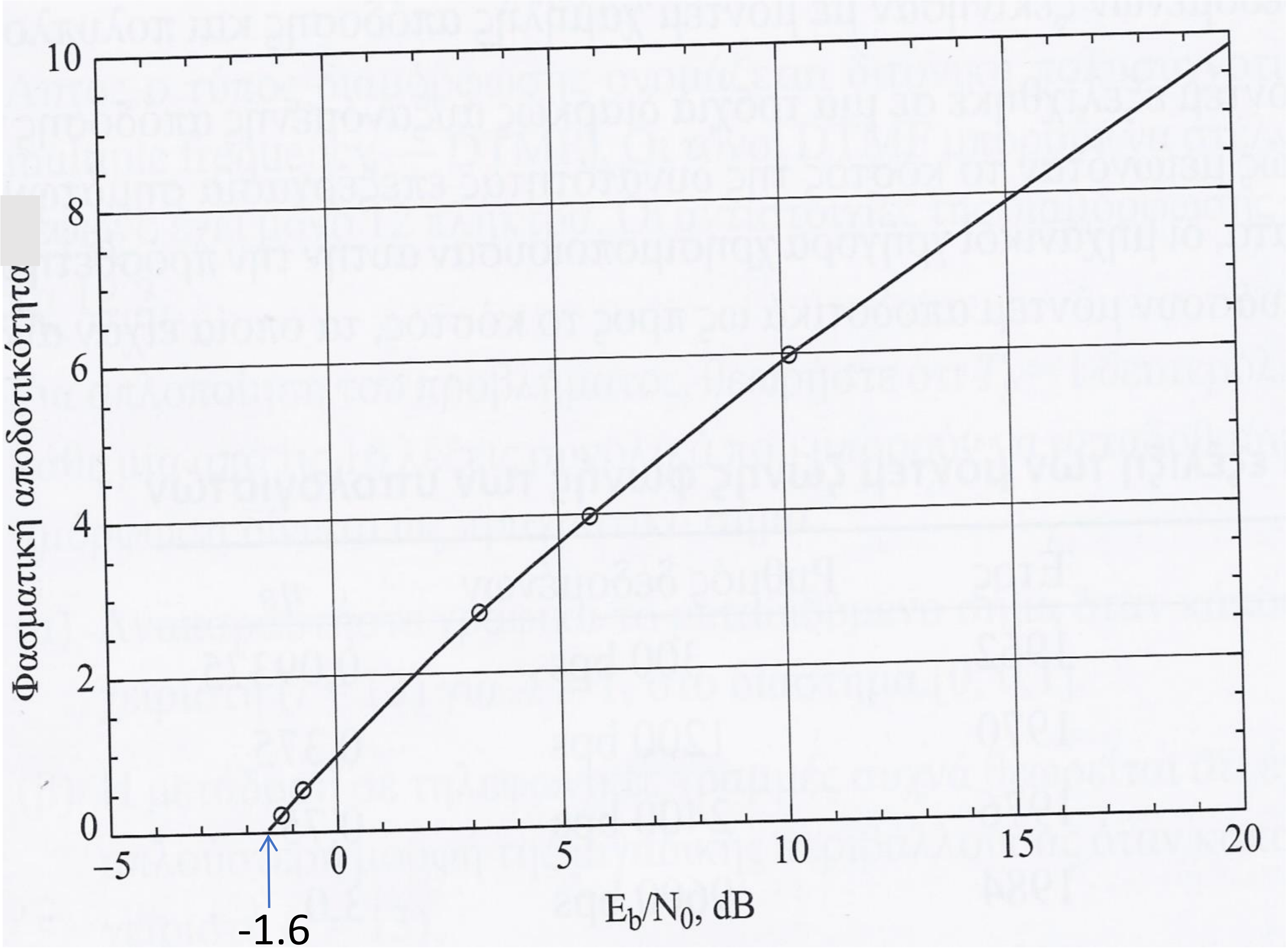
  $N_{BW} \leq \log_2(1+E_bR/ (N_0W)) \Rightarrow$

  $N_{BW} \leq \log_2(1 + (E_b/N_0)N_{BW}) \Rightarrow$

  $2^{N_{BW}} \leq 1 + (E_b/N_0)N_{BW} \Rightarrow$

$$\mathbf{(E_b/N_0)_{min} = (2^{N_{BW}} - 1)/N_{BW}}$$

Για να πετύχουμε φασματική απόδοση N_{BW} απαιτείται μια τιμή “*energy per bit to noise power spectral density ratio*” (normalized SNR) τουλάχιστον $(E_b/N_0)_{min.}$



$(E_b/N_0)_{min}$ συναρτήσει της φασματικής απόδοσης N_{BW}

$N_{BW} = \log_2(1 + (E_b/N_0)\, N_{BW}) \Leftrightarrow$

$2^{N_{BW}} = 1 + (E_b/N_0)\, N_{BW} \Leftrightarrow$

$(E_b/N_0) = (2^{N_{BW}} - 1)/\, 2^{N_{BW}} \Leftrightarrow (E_b/N_0)_{min} =$

$\lim(2^{N_{BW}} - 1)/\, N_{BW}$ (όταν $N_{BW} \to 0$) $\Leftrightarrow$

$(E_b/N_0)_{min} = \ln(2) = 0.69 \Leftrightarrow$

$(E_b/N_0)_{min} = -1.5917$ dB

ή **$(E_b/N_0)_{min} \cong -1.6$ dB**

Δηλ. υπάρχει κάτω όριο για $(E_b/N_0)_{min}$ στην τιμή 0.69 ή -1.6 dB. Κάτω από αυτό το όριο, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε χαμηλό BER (ακόμη και με ιδιαίτερα πολύπλοκη τεχνική κωδικοποίησης).

Διάγραμμα **$(E_b/N_0)_{min}$** σε dB ως προς την φασματική απόδοση επίσης σε dB