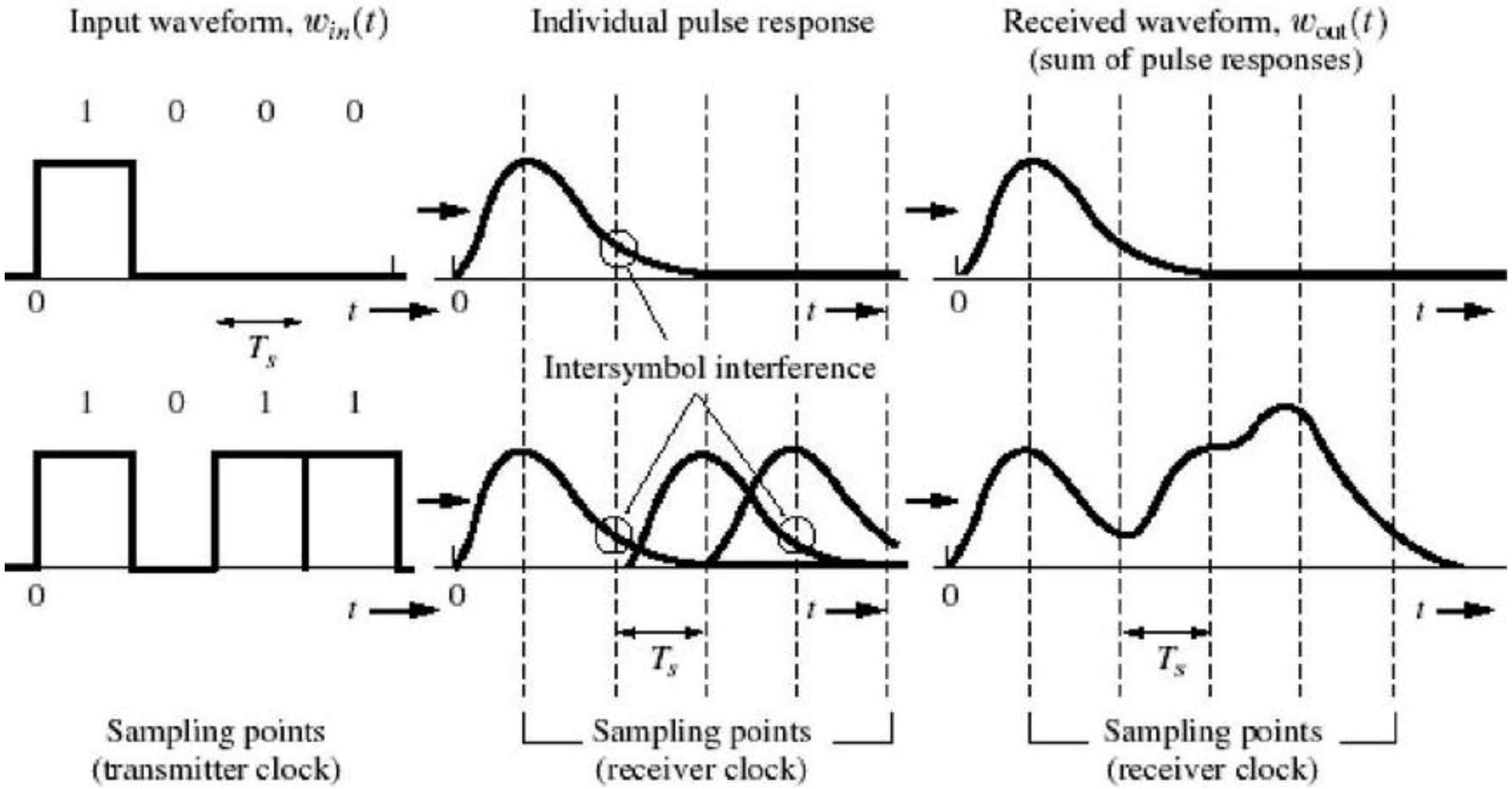
Κριτήρια Nyquist για αποφυγή ISI

Διασυμβολική Παρεμβολή (Intersymbol Interference - ISI)

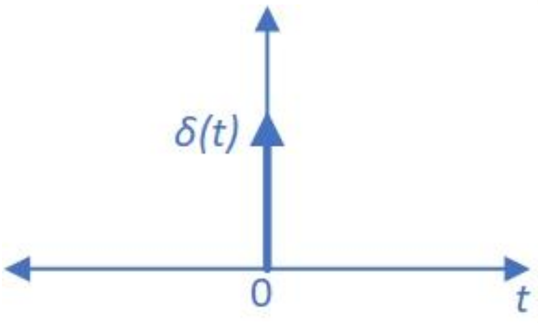


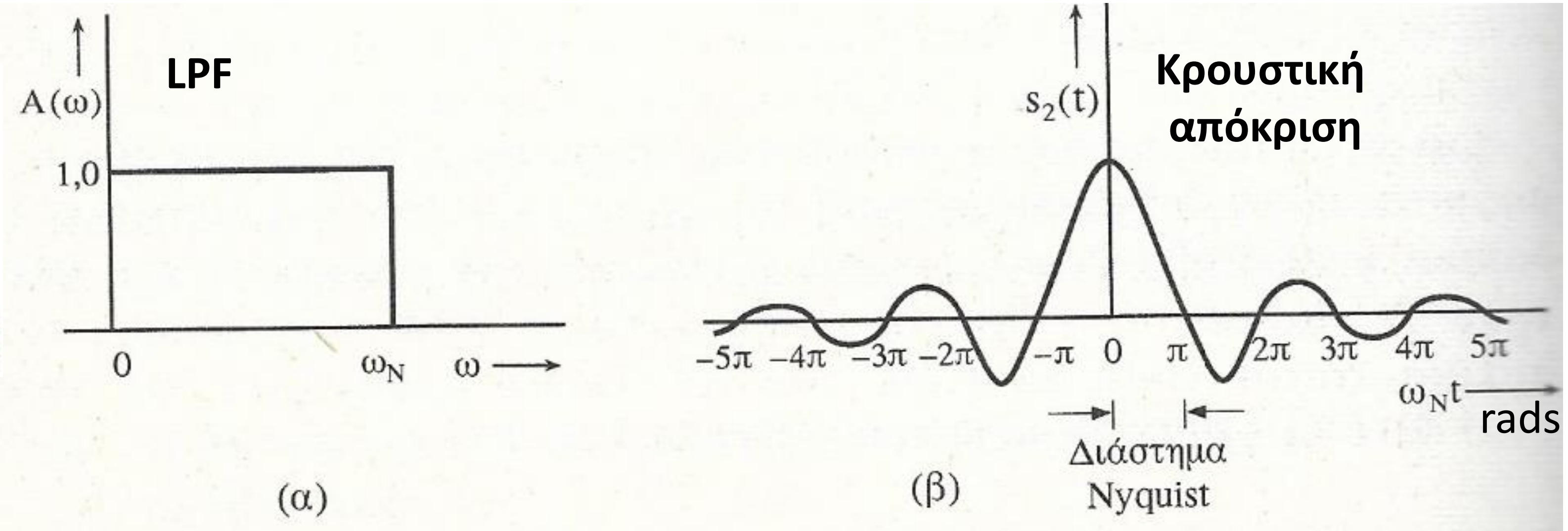
Κρουστική απόκριση ιδανικού φίλτρου

- Για την διαπίστωση των επιπτώσεων της περιορισμένης ζώνης του καναλιού μετάδοσης στο σήμα, έστω ότι το κανάλι συμπεριφέρεται ως ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (LPF). Η κρουστική απόκριση του LPF (δηλ. η έξοδος του φίλτρου όταν η είσοδος είναι η συνάρτηση $\delta(t)$) είναι της μορφής sinx/x (στο πεδίο του χρόνου, x= ωt).
- Η κρουστική απόκριση του LPF, το σήμα $s_2(t)$ όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι μία συνάρτηση sinc που έχει μηδενικές τιμές τις χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια του π:

$$\boldsymbol{\omega_N t = \pm n\pi \Rightarrow t = \pm n\pi/\omega_N \Rightarrow t = \pm n\pi/(2\pi f_N) \Rightarrow t = \pm n/(2f_N)}$$

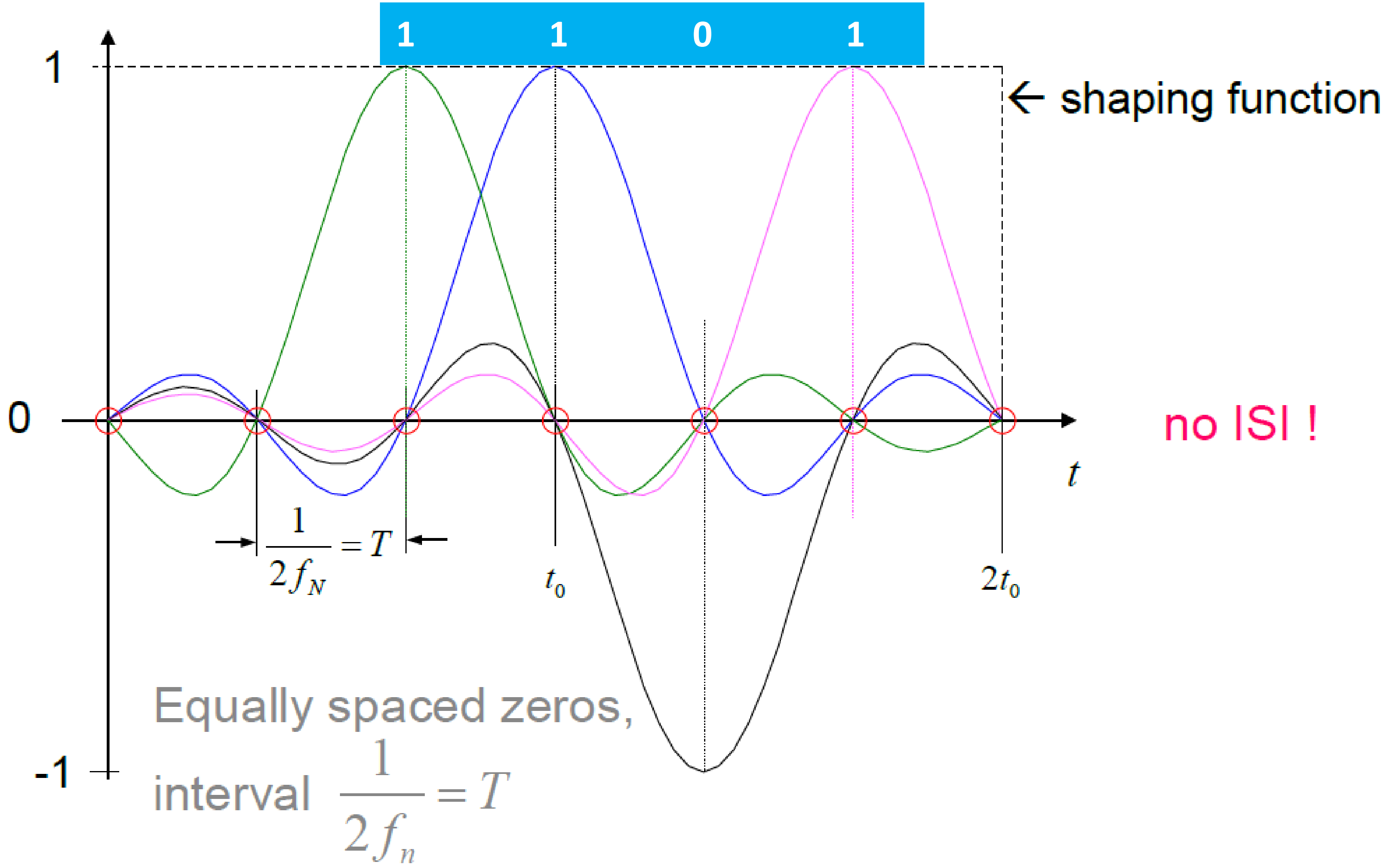
Στο πεδίο του χρόνου, το διάστημα από το 0 μέχρι τον 1ο μηδενισμό καλείται ***διάστημα Nyquist***. Η συχνότητα $2f_N$ είναι η ***συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist***. Στο πεδίο της συχνότητας, η ζώνη $0 – f_N$ (ή $0 – \omega_N$) καλείται ***ζώνη Nyquist***.





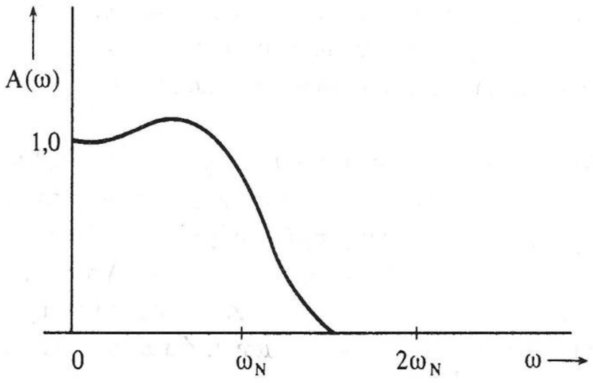
Μετάδοση Χωρίς Διασυμβολική Παρεμβολή - ISI

Παλμοί sinc

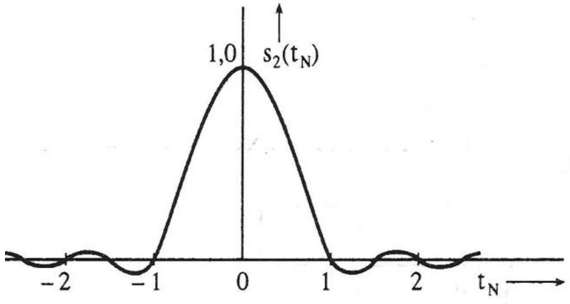


Για να σχηματιστούν οι παλμοί sinc θεωρούμε ότι συναρτήσεις δ(t) πέρασαν μέσα από ένα ιδανικό LPF. Δηλαδή η συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού LPF είναι συνάρτηση “shaping” των δ(t) που δημιουργεί τις sinc-functions.

Μορφοποίηση ορθογωνίου παλμού



(α) Χαρακτηριστική Κατωδιαβατού Φίλτρου (LPF) μορφής x/sinx



(β) Αντίστοιχη απόκριση ορθογωνίου παλμού

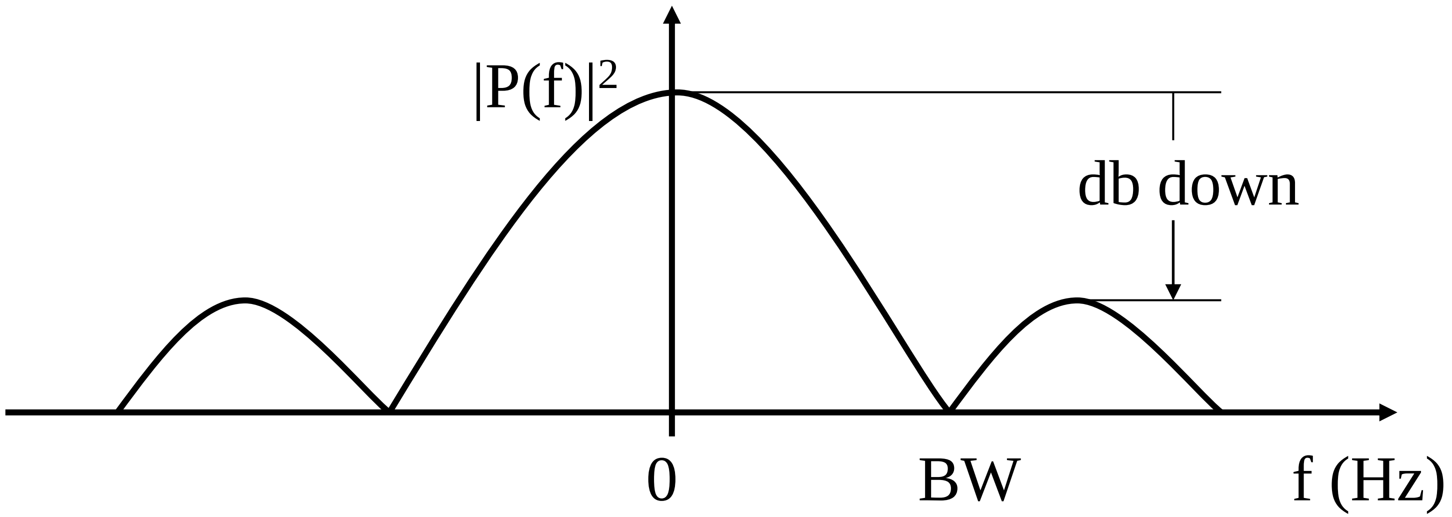
(sinx/x)

- Αν αντί δ(t) έχομε παλμό διάρκειας T, με κατάλληλη μεταβολή με φίλτρα της συνάρτησης μεταφοράς (κρουστικής απόκρισης) του συστήματος μετάδοσης, στον δέκτη μπορούμε να λαμβάνονται παλμοί με συγκεκριμένη, επιθυμητή κυματομορφή (δηλ. στο πεδίον του χρόνου).
- π.χ. με μηδενική τιμή σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές (π.χ. όπως μία *sinc* function).
- Την *sinc*-function την εκμεταλλευόμαστε κατά την δειγματοληψία του σήματος (των μορφοποιημένων παλμών).

Η μορφοποίηση παλμών κι η μετάδοση των μορφοποιημένων παλμών στη βασική ζώνη αναφέρονται και ως «κωδικοποίηση γραμμής» (line encoding).

Παράμετροι Μορφοποίησης Ορθογωνίων Παλμών

- Κύριοι παράμετροι στη σχεδίαση παλμών είναι (στο πεδίο συχνοτήτων):
  - Η **Συχνότητα του 1ου μηδενισμού** (θέλουμε μικρό BW (εύρος ζώνης)).
  - Η **ελάχιστη απόσβεση** των πλαγίων λοβών σε σχέση με την ισχύ στο κύριο λοβό, σε db down (θέλουμε μεγάλο dB down).
- Για μικρό εύρος ζώνης μετάδοσης στο κανάλι «**στρογγυλεύουμε**» τους ορθογώνιους παλμούς.



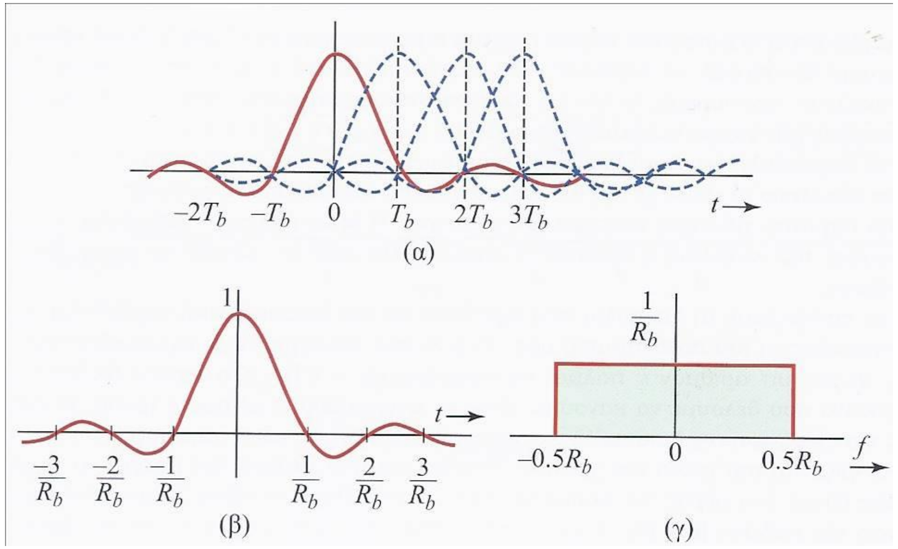
1ο Κριτήριο Nyquist (εξουδετέρωση παραμόρφωσης πλάτους)

I. Κριτήριο

«Για να είναι δυνατή δειγματοληψία στο δέκτη χωρίς διασυμβολική παρεμβολή παλμών που μεταδίδονται με ρυθμό 1/T, αρκεί η κρουστική απόκριση του συστήματος να είναι μηδενική τις χρονικές στιγμές nT(n = 1, 2, ...) και μη μηδενική τη στιγμή t = 0 και όλες τις άλλες στιγμές».

- Σύστημα που ικανοποιεί το 1ο κριτήριο Nyquist είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού φίλτρου (sinc) με συχνότητα αποκοπής f_N (σε χρονικές αποστάσεις πολλαπλάσιες του $1/(2f_N)$) από την στιγμή της δειγματοληψίας έχουμε μηδενικές τιμές). Όμως πρόκειται για θεωρητική περίπτωση.

Προβλήματα της θεωρητικής περίπτωσης *sinc*



Το **(α)** δείχνει την θεωρητική περίπτωση, όπου μία ακολουθία από ίδιους παλμούς ***sinc*** αντιστοιχεί στα bits 1111 (bit rate, R_b bps). Όπως φαίνεται στο **(β)**, κάθε παλμός sinc($\pi R_b t$) έχει τον 1ο μηδενισμό σε χρόνο $T_b=1/R_b$ (sec) και για την μετάδοση απαιτείται εύρος ζώνης καναλιού $R_b/2$, όπως φαίνεται στο **(γ)** από τον Μ.F. του παλμού sinc: $P(f) = (1/R_b)\Pi(f/R_b)$.

$T_b= 1/(2f_N) = 1/R_b \Rightarrow 2f_N = R_b \Rightarrow f_N = R_b / 2$

- Ο παλμός *sinc* μπορεί μεταδοθεί μέσα από ιδανικό κανάλι με εύρος ζώνης συχνοτήτων $R_b/2$ (Hz) και να φθάσει στον δέκτη αναλλοίωτος ικανοποιώντας μάλιστα το 1ο κριτήριο Nyquist.

1. Όμως ο παλμός *sinc* είναι μη υλοποιήσιμος αφού εκτείνεται σε άπειρο χρονικό διάστημα (-∞,∞).
2. Το άπειρο χρονικό διάστημα οδηγεί (M.F.) σε περιορισμένο εύρος ζώνης $R_b/2$ και κάθε προσπάθεια περιορισμού του *sinc* στον χρόνο επεκτείνει το απαιτούμενο εύρος ζώνης στο κανάλι μετάδοσης πέραν του $R_b/2$.
3. Η εξασθένιση του sinc ως προς τον χρόνο δεν είναι ικανοποιητική (εξασθενεί με πολύ αργό ρυθμό, ανάλογον του 1/*t*).
4. Λόγω του (3), αν ο ρυθμός μετάδοσης των data αποκλίνει λίγο από τον R_b bps, τότε τα πλάτη του παλμού sinc δεν θα μηδενίζονται εντελώς στα κέντρα των άλλων παλμών. Η συσσωρευτική δε παρεμβολή σε κάθε κέντρο από τους υπόλοιπους παλμούς θα οδηγήσει σε μια μεγάλη τιμή και σε λάθη στον δέκτη.
5. Λάθη στον δέκτη θα έχομε, ακόμη και αν όλα είναι τέλεια στον πομπό, αλλά ο ρυθμός δειγματοληψίας στον δέκτη αποκλίνει από τον ρυθμό των R_b (Hz) ή αν οι στιγμές δειγματοληψίας αποκλίνουν λίγο, λόγω της αναπόφευκτης χρονικής διακύμανσης των παλμών.

1ο Κριτήριο Nyquist - Φίλτρα υπερυψωμένου συνημιτόνου

- Ο Nyquist απέδειξε ότι μη ιδανικό LPF με συχνότητα αποκοπής BW μεγαλύτερη από την f_N και με χαρακτηριστική φίλτρου που παρουσιάζει περιττή συμμετρία ως προς την f_N έχει κρουστική απόκριση με μηδενικά στις ίδιες θέσεις με την *sinc-function* (και προσθέτει και ορισμένα άλλα).

- <u>Συνάρτηση Μεταφοράς του LPF:</u>

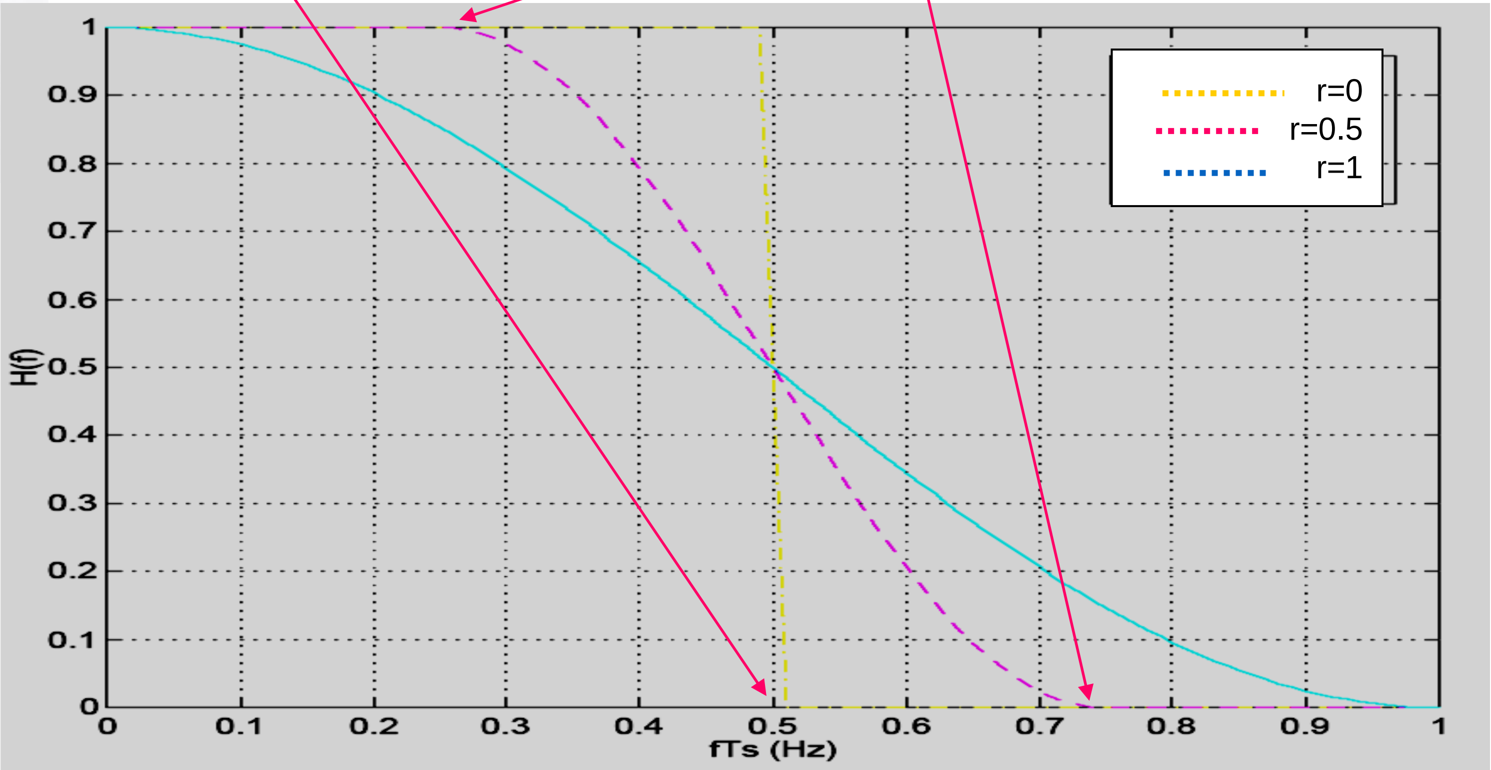
BW είναι το συνολικό εύρος ζώνης συχνοτήτων $\geq \mathbf{f_N}$

$$H(f) = \begin{cases} dT & \text{για } |f| \leq \left(\frac{1}{2T}\right)(1-r) \\ d\left(\frac{T}{2}\right)\left\{1 - \sin\left[\left(\frac{T}{2r}\right)\left(f - \frac{1}{2T}\right)\right]\right\} & \text{για } \left(\frac{1}{2T}\right)(1-r) < f < \left(\frac{1}{2T}\right)(1+r) \\ 0 & \text{για } |f| > (1+r)/(2T) \end{cases}$$

BW = $f_N + f_x = (1+r)/(2T)$

$(1-r)/(2T) = f_N - f_x$

$f_N = 1/(2T)$



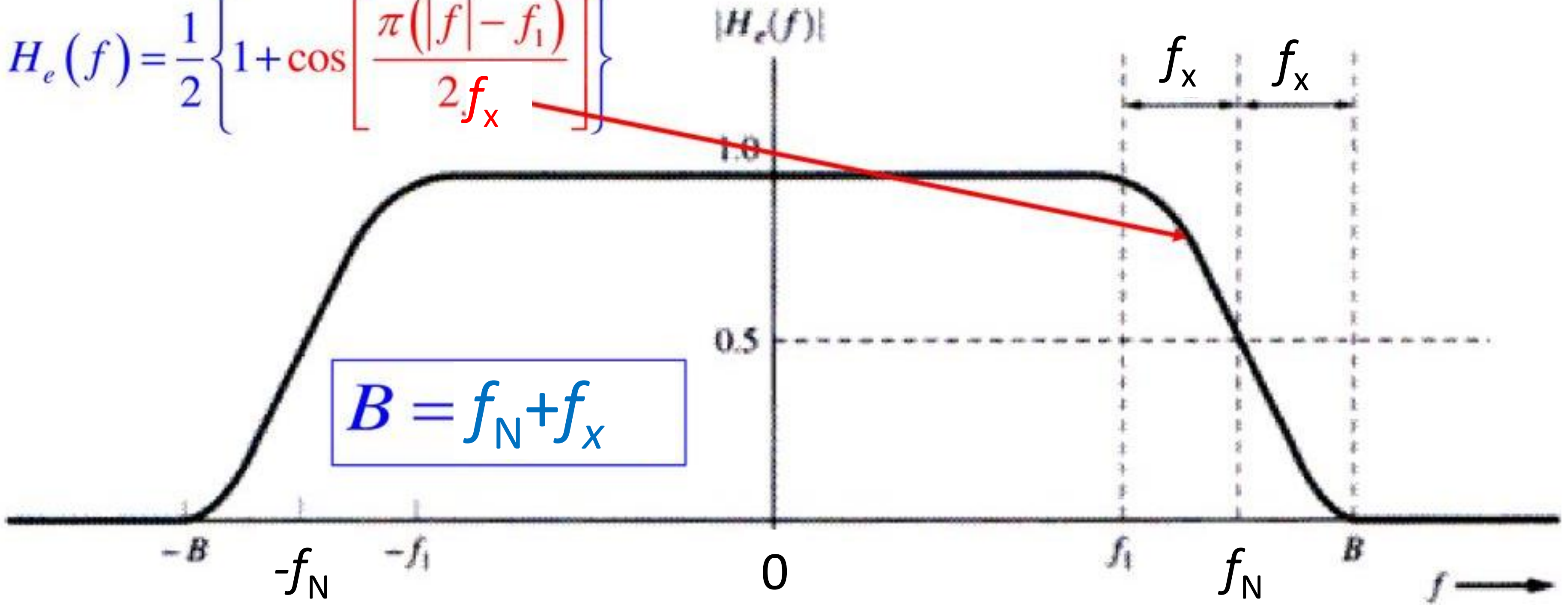
- **$r = f_x / f_N$** λέγεται *roll-off factor*

  (συντελεστής εξομάλυνσης)

Raised Cosine-rolloff Nyquist Filtering

$f_1 = f_N - f_x$ και $r = f_x / f_N$

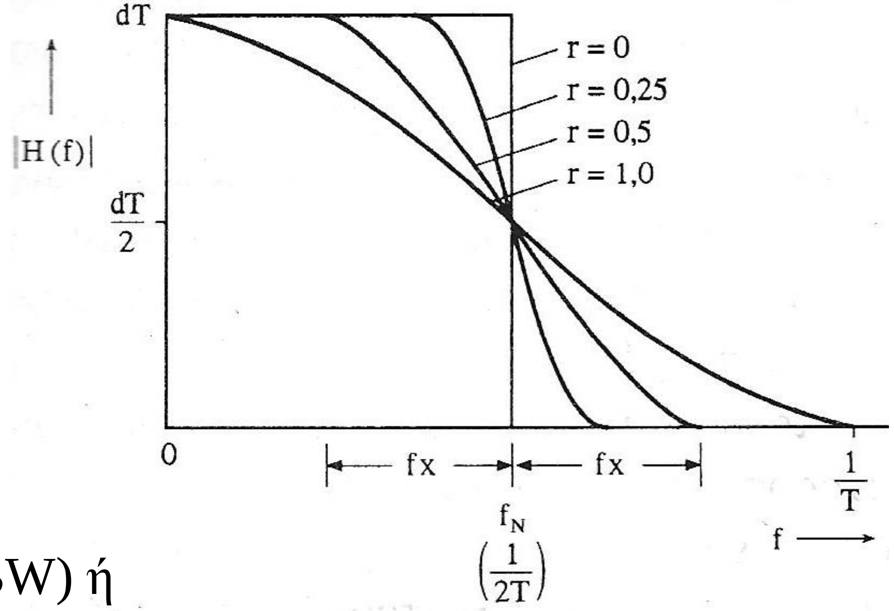
$$H_e(f) = \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\frac{\pi(|f|-f_1)}{2f_x}\right]\right\}$$



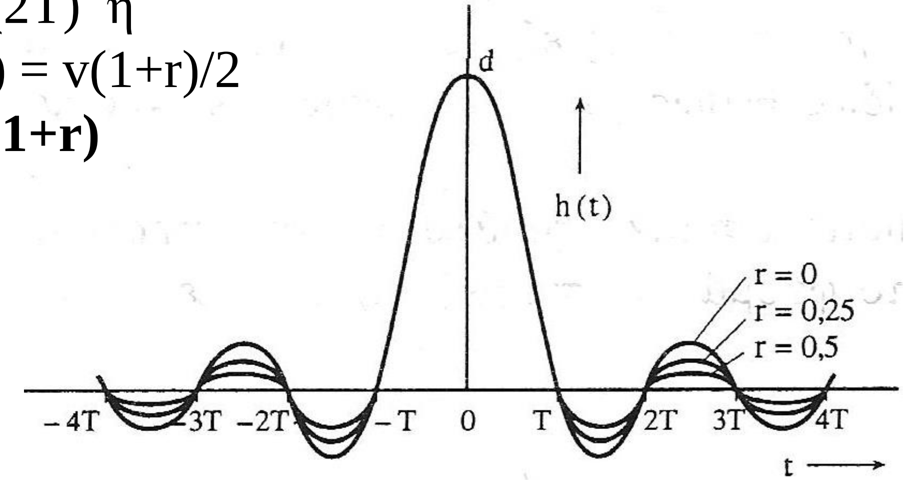
$\boxed{B = f_N + f_x}$

Κρουστική απόκριση h(t) φίλτρων Raised Cosine

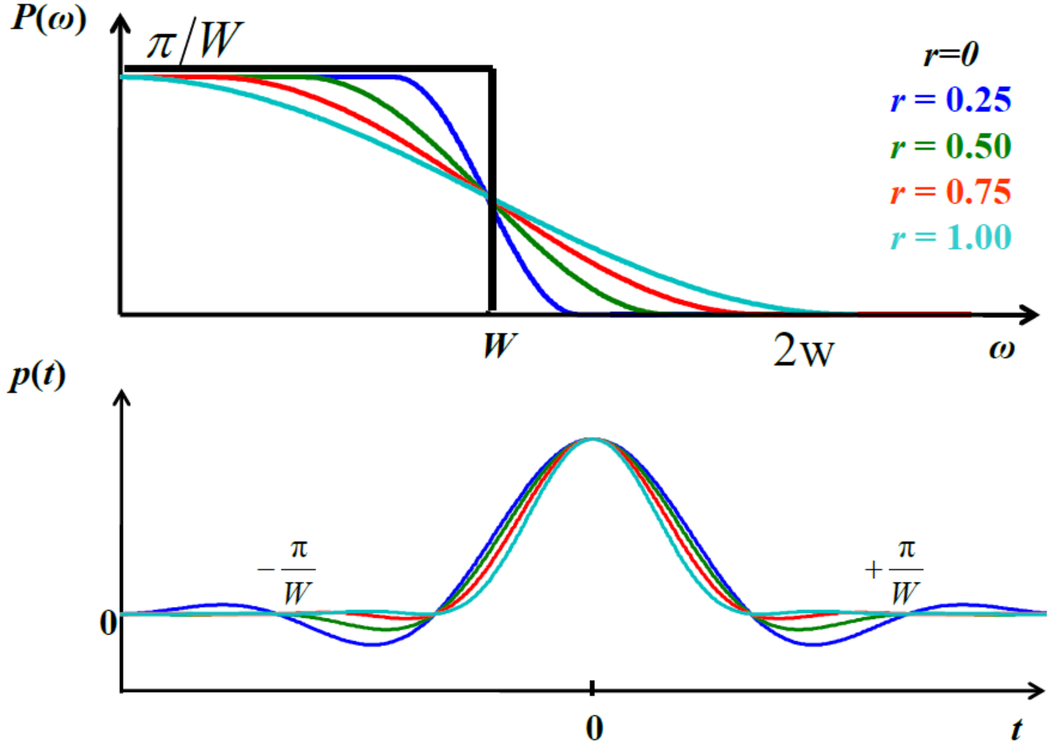
$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{r\pi t}{T}\right)}{1-\left(4r^2/T^2\right)t^2}$$



$f = f_N + f_x$ (= BW) ή
$f = 1/(2T) + r/(2T)$ ή
$f = (1+r) / (2T) = v(1+r)/2$
=> **$v / f = 2 / (1+r)$**



Tradeoff: higher r, higher bandwidth, but smoother in time.



Φασματική απόδοση (bps / Hz) ή Σχέση bps και Hz
Raised Cosine rolloff filter

$$\text{Φασματική απόδοση} = \frac{\text{data rate}}{\text{bandwidth}} = \frac{1/T}{(1+r)/2T} = \frac{2}{1+r} \quad \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

- $f = f_N + f_x$ (= BW)
- $r = f_x / f_N \Rightarrow f_x = r\, f_N$
- $f = 1/(2T) + r/(2T)$
- $f = (1+r) / (2T) = v(1+r)/2$
- **$v / f = 2 / (1+r)$**

$$1\,\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} \le \frac{2}{(1+r)} < 2\,\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

⇩ 2nd Nyquist (r=1)

⇩ r=0

Εύρος ζώνης συχνοτήτων παλμών υπερυψωμένου συνημιτόνου

- Σύστημα PCM με συχνότητα δειγματοληψίας f_s (sampling frequency $f_s = 2\, f_{max}$) και κωδικοποίηση με n bits:
  - **BW = [(1+r)/2]· f_s · n = [(1+r)/2]· R   σε Hz**
  - r = "roll-off factor", $0 \leq r \leq 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $v / f = 2 / (1+r) \Rightarrow f_s \cdot n / BW = 2 / (1+r) \Rightarrow$
- $BW = [(1+r) / 2] \cdot f_s \cdot n$

$r = f_x/f_N$ (Ορισμός του r)

$f_N = 0.5\, f_s = 1/(2T_s)$

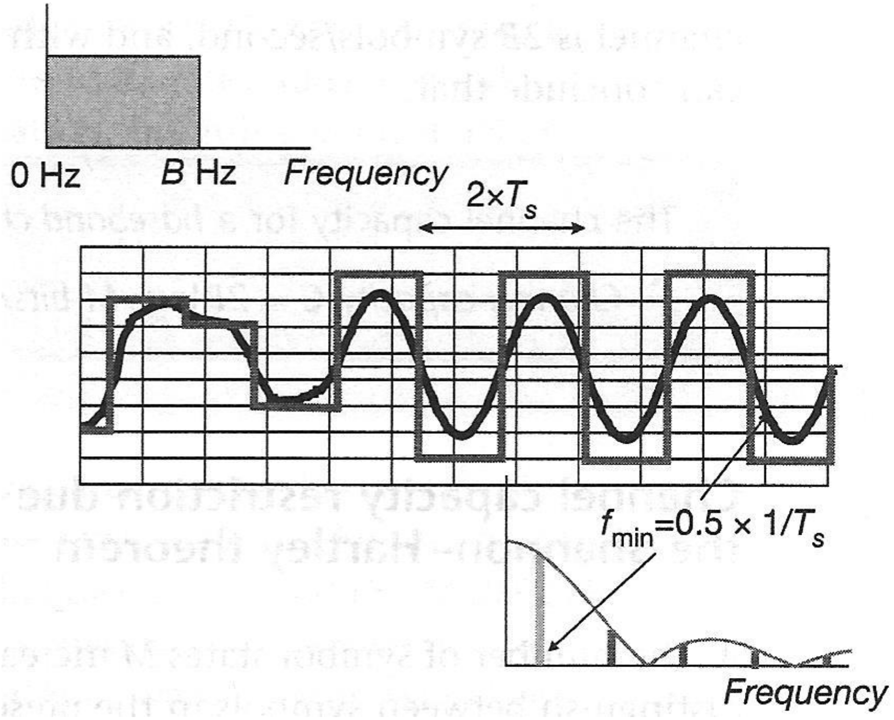
- Όπου:

  αν r = 0,   έχουμε παλμό   sinc(.)

  αν r = 1,   έχουμε τη μέγιστη δυνατή τιμή του r και το φάσμα παίρνει την μορφή υπερυψωμένου συνημιτόνου.

  Τυπική τιμή του r = 0.35 στην Β. Αμερική σε ψηφιακά συστήματα κινητής τηλεφωνίας NA-TDMA και CDMA (πρότυπο IS-54/136).

Ελάχιστο Εύρος Ζώνης Μετάδοσης στη βασική ζώνη (< BW)



Αν η **διάρκεια του συμβόλου** που θέλουμε να μεταδώσουμε είναι $\mathbf{T_s}$ (s – symbol), τότε το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι $\mathbf{B_{min}=1/(2T_s) = f_{min}}$ => $\mathbf{T_s = 1/ (2f_{min})}$
Αντιστοιχεί στην χειρότερη περίπτωση παλμών (δηλ. ορθογωνίων παλμών) και είναι το ελάχιστο, διότι προκύπτει από την 1η συχνότητα μετά την μηδενική (θεμελιώδη συχνότητα – σειρές Fourier).

Συνήθως το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι $\mathbf{(1/2)(1/T_s)} < \mathbf{B \leq 1/T_s}$
(Δηλ. Rolloff factor $0 < r < 1$).

2ο Κριτήριο Nyquist (εξουδετέρωση παραμόρφωσης βήματος)

II. Κριτήριο Nyquist

Το δεύτερο κριτήριο αφορά στην εξουδετέρωση της διασυμβολικής παρεμβολής στο μέσο μεταξύ διαδοχικών παλμών και διατυπώνεται ως εξής: *«Στο διάστημα* $-T \leq t \leq +T$ *από τη στιγμή δειγματοληψίας, η κρουστική απόκριση του συστήματος πρέπει να παρουσιάζει μηδενική τιμή για* $t = \pm nT/2$, $n = 2, 3, \ldots$, *ενώ για* $t = \pm T/2$ *από τη δειγματοληψία η τιμή της θα πρέπει να είναι* $\neq 0$*».*

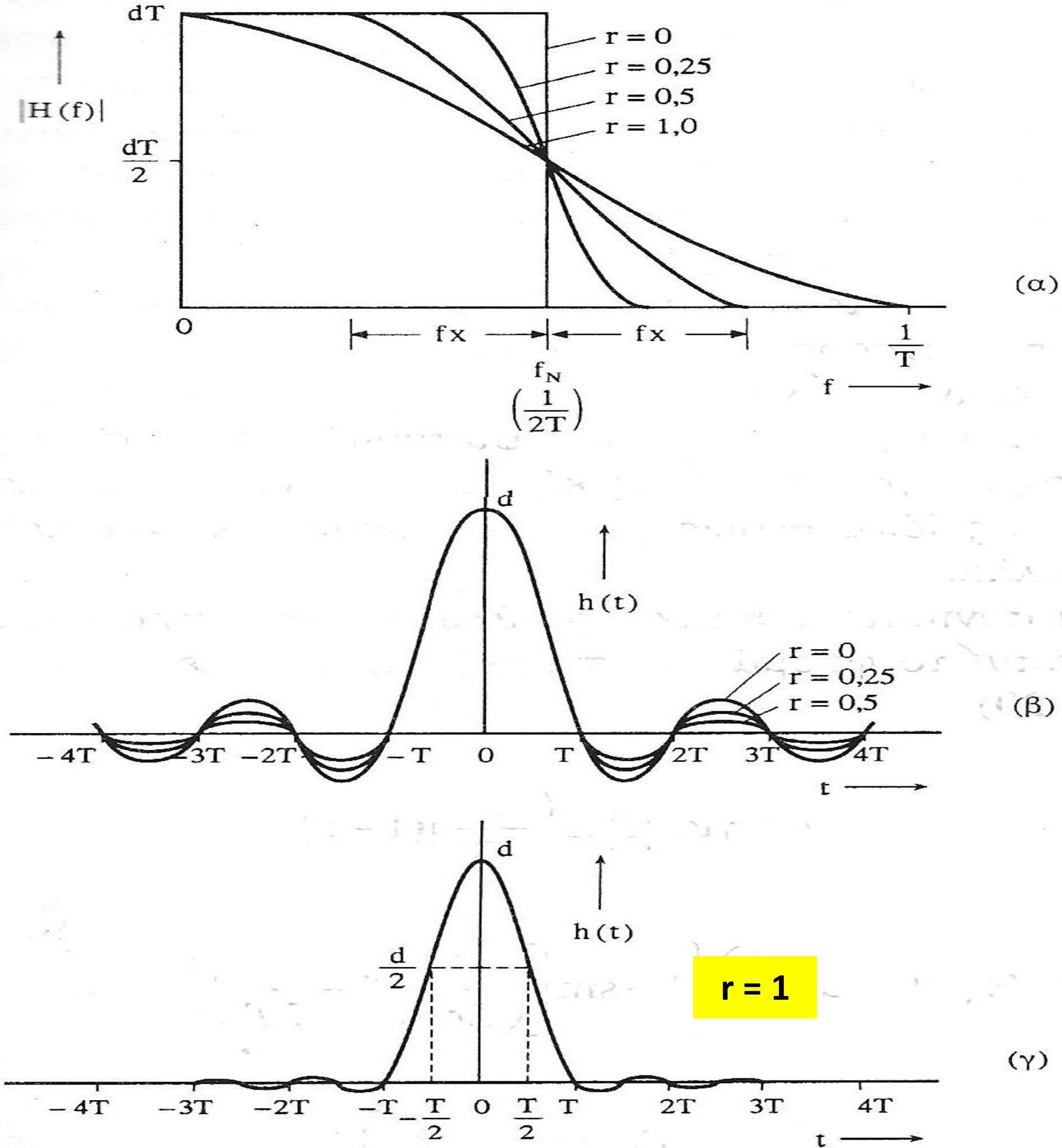
$$H(\omega) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi\omega}{2\omega_N} & 0 < \omega \leq \omega_N \\ 0 & \omega > \omega_N \end{cases}$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου αυτού είναι

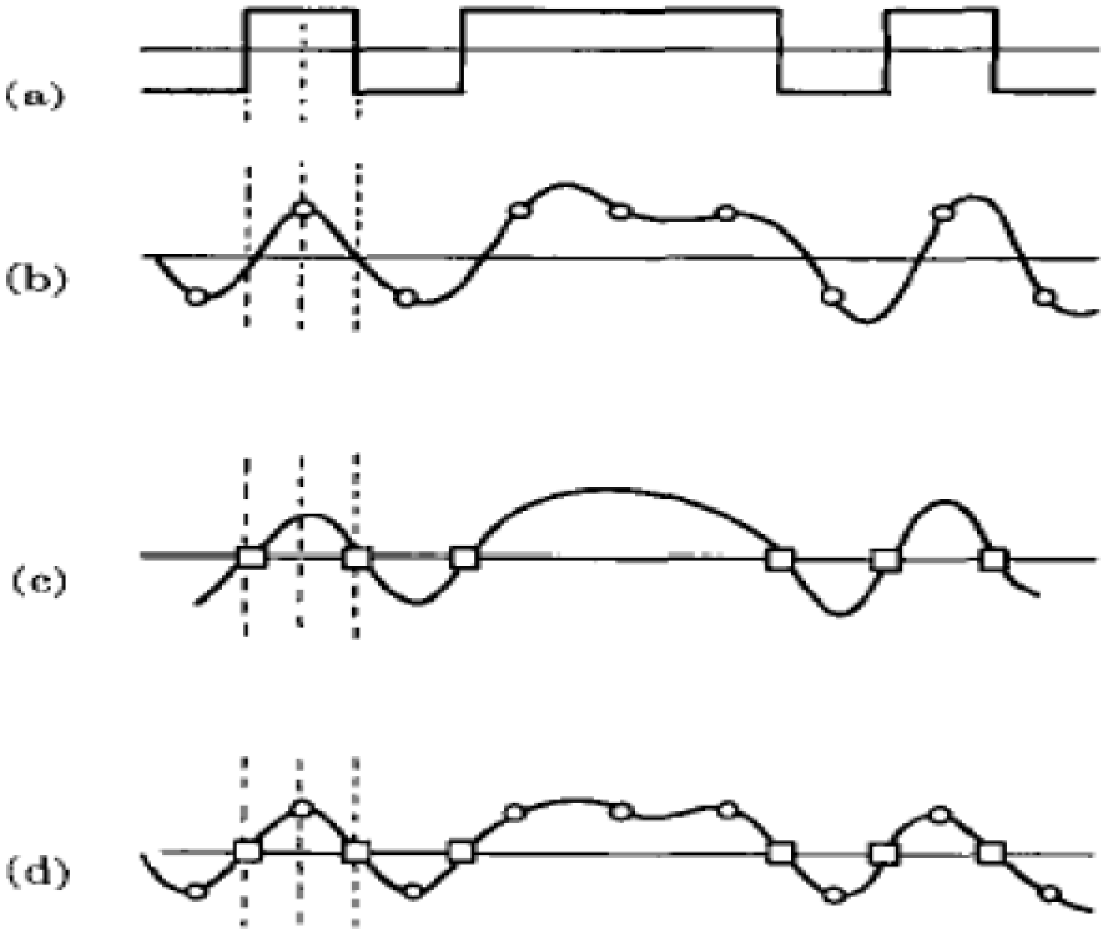
$$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_N} \cos\omega t \cos\frac{\pi\omega}{2\omega_N}\, d\omega =$$

$$= \frac{2\omega_N \cos\omega_N}{\pi^2(1-4\omega_N^2 t^2/\pi^2)} = \frac{4f_N \cos 2\pi f_N t}{\pi(1-16f_N^2 t^2)}$$

2ο Κριτήριο Nyquist: Περισσότεροι μηδενισμοί



Example



Nyquist criteria: (a) input signal, (b) output signal satisfying Nyquist's first criterion—values at pulse centers unchanged, (c) output signal satisfying Nyquist's second criterion—values at pulse edges unchanged, (d) output signal satisfying Nyquist's first and second criteria—values at pulse centers and edges unchanged.

Cosine rolloff filter: Eye pattern