



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 7: Απόδοση συστημάτων γωνίας υπό θόρυβο

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση της γενικής μορφής ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος υπό θόρυβο
- Περιγραφή της επίδρασης του θορύβου σε συστήματα διαμόρφωσης συχνότητας και φάσης
- Παρουσίαση των φίλτρων προέμφασης και αποέμφασης

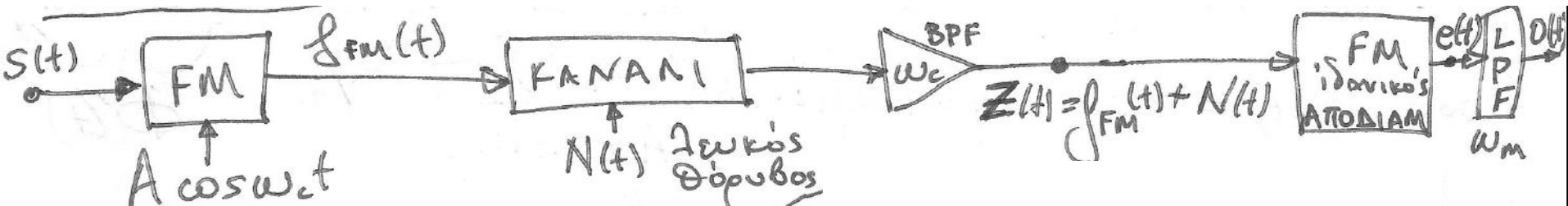
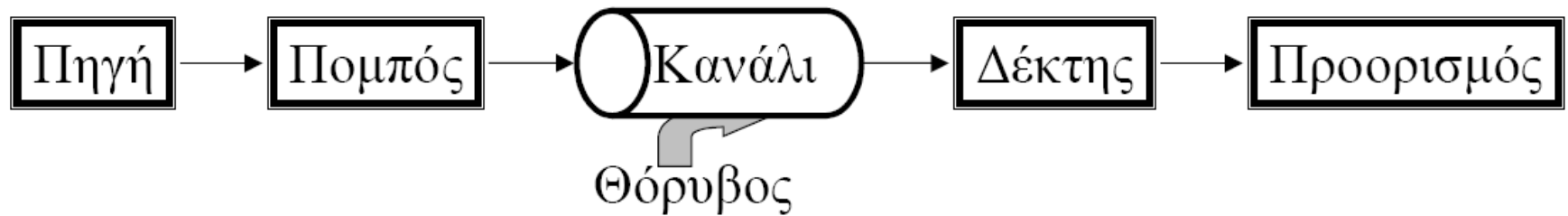


Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΦΙΛΤΡΑ ΠΡΟΕΜΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΕΜΦΑΣΗΣ



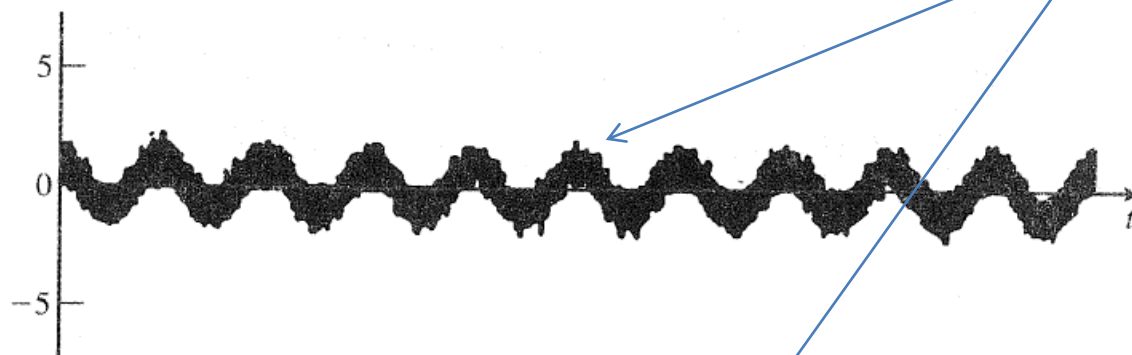
Τηλεπικοινωνιακό σύστημα: Αρχιτεκτονική



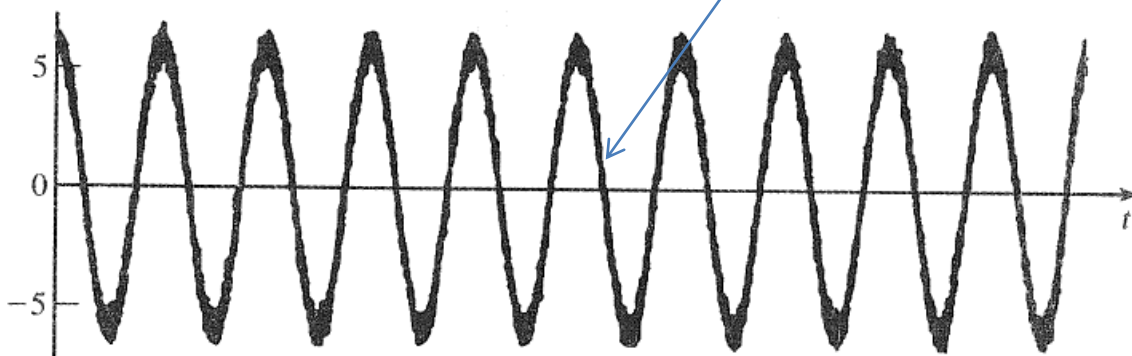
**Σηματοθορυβική Σχέση ή Λόγος Σήματος
προς Θόρυβο (Signal-to-noise Ratio), S/N**

Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (1/5)

Επίδραση του θορύβου στις
διελεύσεις από το 0



(α)



(β)



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (2/5)

$$P_{n_o} = \int_{-W}^{+W} S_{n_o}(f) df = \begin{cases} \int_{-W}^{+W} \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{PM} \\ \int_{-W}^{+W} f^2 \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{FM} \end{cases} \quad \text{Ισχύς θορύβου για FM ή PM}$$
$$= \begin{cases} \frac{2WN_0}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{2N_0W^3}{3A_c^2}, & \text{FM} \end{cases}$$

$$P_{s_o} = \begin{cases} k_p^2 P_M, & \text{PM} \\ k_f^2 P_M, & \text{FM} \end{cases} \quad \text{Ισχύς σήματος για FM ή PM}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_{s_o}}{P_{n_o}} \quad \text{Λόγος σήματος προς θόρυβο για FM ή PM}$$



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (3/5)

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\begin{cases} \beta_p = k_p \max|m(t)|, & \text{PM} \\ \beta_f = \frac{k_f \max|m(t)|}{W}, & \text{FM} \end{cases} \quad P_R = \frac{A_c^2}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{FM} \end{cases}$$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \frac{P_M \beta_p^2}{(\max|m(t)|)^2} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3 \frac{P_M \beta_f^2}{(\max|m(t)|)^2} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \beta_p^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3\beta_f^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (4/5)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{FM} \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την PM: $B_c = 2(\beta+1)W$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την FM: $\Omega = \frac{B_c}{W} = 2(\beta+1)$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (5/5)

- ✓ Τόσο στο PM όσο και στο FM το SNR εξόδου είναι ανάλογο του τετραγώνου του δείκτη διαμόρφωσης β σε αντίθεση με το AM
- ✓ Αυξάνοντας το εύρος ζώνης αυξάνει και το SNR (ανταλλαγή)
- ✓ Μπορούμε να αυξήσουμε το SNR αυξάνοντας το β . Όμως μεγάλο β σημαίνει και μεγάλο B_c και συνεπώς μεγάλη ισχύ θορύβου οπότε δεν ισχύει η προσέγγιση για μεγάλα SNR (φαινόμενο κατωφλίου)
- ✓ Στο AM αυξάνοντας την ισχύ αυξάνει απευθείας το SNR (η πληροφορία στο πλάτος). Στη διαμόρφωση γωνίας δεν αυξάνεται η ισχύς αλλά μειώνεται ο θόρυβος
- ✓ Στο FM η επίδραση του θορύβου είναι μεγαλύτερη σε υψηλότερες συχνότητες



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNR_i (ΛΣΘ_i)

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + k_{FM} \int s(t) dt) \quad \left[\begin{array}{l} \text{"Έσω } N(t)=0 \\ S_i = \frac{A^2}{2} \end{array} \right]$$

$$e(t) = \frac{d}{dt} [\omega_c t + k_{FM} \int s(t) dt] = \omega_c + k_{FM} s(t)$$

Το ημιομοιωτικό σήμα είναι "έξοδο του φίλτρου, $O(t) = k_{FM} s(t)$,
 "έχει ισχύ $S_o = k_{FM}^2 S$ όπου S η ισχύς του $s(t)$.

"Έσω τώρα $N(t) \neq 0$ και $s(t) = 0$ (προσοχή $f_{FM}(t) \neq 0$)
 Ο θόρυβος σαν είσοδο του ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ FM "έχει γίνει
 θόρυβος γενικής φύσης λόγω του BPF (ιδανικό με συνάρτ
 τήση μεταφοράς 1). Δηλαδή η φασματική πυκνότητα ισχύος
 του θορύβου σαν "έξοδο του BPF $[\omega_c - \Delta\omega, \omega_c + \Delta\omega]$ θα είναι
 $S_N(\omega) = \frac{N_o}{2} |H(\omega)|^2 \rightarrow 1 = \frac{N_o}{2}$ από $\omega_c - \Delta\omega$ μέχρι $\omega_c + \Delta\omega$
 (δεν ξεχνάμε τις αντίστοιχες αρνητικές συχνότητες !!!)

$$\text{Η ισχύς } P_{N_i} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \frac{N_o}{2} d\omega = \frac{N_o}{2\pi} \omega \Big|_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} = \frac{2N_o \Delta\omega}{2\pi} = \underline{\underline{2\Delta f \cdot N_o}}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNR_o (ΛΣΘ_o)

$$(\Lambda\Sigma\Theta)_i = \frac{A^2/2}{2N_0\Delta f} = \frac{A^2}{4N_0\Delta f}$$

Στή συνέχεια, πρέπει να υπολογίζουμε την ισχύ του σήματος και του θορύβου στην έξοδο του αποδιαμορφωτή. Για να διευκολύνουμε την κατάσταση, υποθέτουμε ότι όταν το σήμα $s(t)$ και $N(t)$ έπιδρούν μαζί στον αποδιαμορφωτή, η παρουσία του ενός δεν επηρεάζει το άλλο και αντίστροφα. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε την έξοδο του αποδιαμορφωτή αρχικά, όταν στην είσοδο $N(t) = 0$, και μετά όταν $s(t) = 0$ (όχι $f_f(t) = 0$). Η πρώτη περίπτωση βοηθάει στον υπολογισμό της ισχύος του θορύβου στην έξοδο $o(t)$, και η δεύτερη του σήματος.

Έστω πρώτα ότι $N(t) = 0$
(δεν υπάρχει θόρυβος)

$$o(t) = \omega_c + k_f s(t)$$

Άρα η ισχύς του σήματος στην έξοδο είναι,

$$\text{Ισχύς Σήματος} = k_f^2 S$$

πού S η ισχύς του $s(t)$. Πάει αυτό.

Τώρα υποθέτουμε ότι στην είσοδο έχουμε $s(t) = 0$, ή

$$z(t) = A \cos \omega_c t + N(t)$$

πού φυσικά

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$$

πού τά $n_c(t)$ και $n_s(t)$ έχουν σαν πυκνότητα φάσματος ισχύος την σταθερά N_0 όταν τό $N(t)$ έχει $N_0/2$ (ας μην ξεχνάμε ότι $N(t)$, $n_c(t)$ και $n_s(t)$ έχουν την ίδια ισχύ). Φυσικά τά $n_c(t)$, $n_s(t)$ είναι περιορισμένης ζώνης θόρυβοι.



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNR_o (ΛΣΘο) – συνέχεια_1

Αφού $s(t) = 0$, $Z(t) = A \cos \omega_c t + N(t) = A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$

$Z(t) = \sqrt{A^2 + N^2(t)} \cos(\omega_c t + \varphi(t))$

Το μοντέλο του θορύβου στενής ζώνης προκύπτει από
 θόρυβο περιορισμένης ζώνης $X(t)$ ο οποίος πολλαπλασιάζεται
 με ένα συνημιτόνο $\cos(\omega_c t + \theta)$ όπου θ τ.μ. $[0, 2\pi]$
 (ομοιόμορφος) (κατανομή)

$$\begin{aligned}
 \text{δω. } N(t) &= X(t) \cos(\omega_c t + \theta) = \\
 &= \underbrace{X(t) \cos \theta}_{n_c(t)} \cos \omega_c t - \underbrace{X(t) \sin \theta}_{n_s(t)} \sin \omega_c t
 \end{aligned}$$

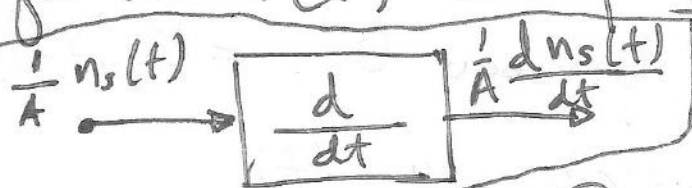


ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNRo (ΛΣΘο) – συνέχεια_2

Το $z(t)$ γράφεται ως $\sqrt{[A+n_c(t)]^2 + n_s(t)^2} \cos(\omega_c t + \phi(t))$
 όπου $\phi(t) = \cos \theta$ εφαπτωμένης $\left[\frac{n_s(t)}{A+n_c(t)} \right] \gamma(t)$ $\phi'(t)$

"Αν $A \gg n_c(t) \Rightarrow \phi(t) \approx \frac{n_s(t)}{A}$

Ο ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΟΤΗΣ FM (Διακρίνισης) δρα πάνω στην γωνία $\phi'(t)$ και μέγεθος των αποκλίσεων



"επειδή ω_c (ξενάρε το ω_c)
 "επειδή $c(t) = \omega_c + \frac{1}{A} \frac{d n_s(t)}{dt}$

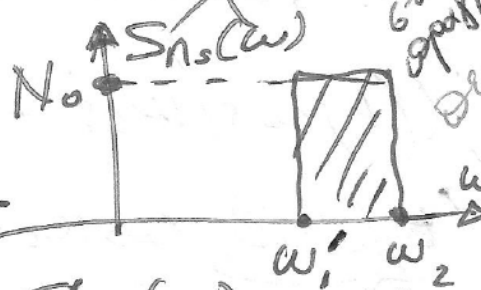
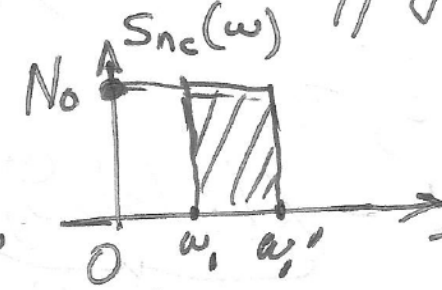
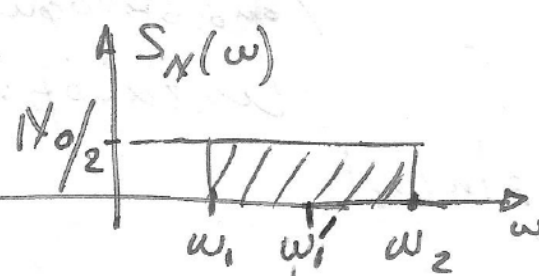
Όπου ο όρος του δορυφωτού είναι το $\frac{1}{A} \frac{d n_s(t)}{dt}$. Πρέπει να

βρούμε το Σ.Σ. Αυτοσυσχετισμός έχω και μετά με M.F. των
 αποκλίσεων φασματικής ισχύος των δορυφωτών
 ολοκληρώσαμε για να βρούμε την ισχύ του (επιπέδο όφως)
 Η βροχή είναι θα βάνοντας δω' όφιν το LPF

Γ.ο. ω_m].

Πυκνότητα φάσματος ισχύος $N(t)$, $n_c(t)$, $n_s(t)$

"Αν η πυκνότητα φασματικής ισχύος του $N(t)$ είναι $N_0/2$ τότε η πυκνότητα φασματικής ισχύος των συνιστωσών $n_c(t)$ και $n_s(t)$ είναι N_0 , ή κάθε μία. Διαδικαστική εξήγηση: Το συνοζωτικό γάμμα συχνοτήτων του $N(t)$ έσω ότι εντείνεται από ω_1 μέχρι ω_2 . Τότε το μισό του φάσματος αριστερά θα οφείλεται στο $n_c(t)$ και το υπόλοιπο μισό στην συνιστώσα $n_s(t)$. Τα εμβαδά όμως αριστερά από την φασματική πυκνότητα των $N(t)$, $n_c(t)$ και $n_s(t)$ πρέπει να είναι ίδια, διότι εκφράζουν ισχύ.



"Αρα $S_{n_c}(\omega) = S_{n_s}(\omega) = N_0 = 2 \cdot S_N(\omega)$

στην φασματική πυκνότητα $n_c(t)$ $n_s(t)$ $n_s(t)$ $n_c(t)$ $n_s(t)$ $n_c(t)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Κ.Α.

$$(\Delta\Sigma\Theta)_i = \frac{A^2/2}{2N_0\Delta f} = \frac{A^2}{4N_0\Delta f}$$

$$(\Delta\Sigma\Theta)_o = \frac{3k_f^2 S A^2 \pi}{N_0 \omega_m^3}$$

Τέλος, τό ΚΑ τοῦ FM εἶναι,

$$KA = \frac{(\Delta\Sigma\Theta)_o}{(\Delta\Sigma\Theta)_i} = \frac{6k_f^2 S \Delta\omega}{\omega_m^3}$$

Αυτό τό ΚΑ δέν εἶναι ἀπλός ἀριθμός, ὅπως στά συστήματα AM, καί χρειάζεται κάποια ἐξήγηση τῆς σημασίας του.

"Ἄς ἐξετάσουμε τήν ἀπλή περίπτωση πού $s(t) = a \sin \omega_s t$. Τότε,

$$s = \frac{a^2}{2}$$

καί $\Delta\omega = \alpha k_f$ (γιατί $\omega_i = \omega_c + \alpha k_f \sin \omega_s t$)

"Ἄρα,

$$KA = 3 \left(\frac{\alpha k_f}{\omega_s} \right)^3$$

"Ἀλλά ἀπό τή γνωστή μας ἀνάλυση τοῦ FM,

$$\frac{\alpha k_f}{\omega_s} = m_f \quad (\text{δείκτης διαμόρφωσης FM})$$

"Ἄρα,

$$KA = 3(m_f)^3$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ὅτι τό ΚΑ ἐξαρτᾶται ἀπό τόν δείκτη διαμόρφωσης m_f . Φυσικά, ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ m_f τόσο μεγαλύτερο πλάτος ζώνης ἔχει τό $f_f(t)$. Παρατηροῦμε, δηλαδή, ὅτι μπορούμε νά αὐξήσουμε τήν ἀπόδοση τοῦ FM μέ τό νά αὐξήσουμε τό πλάτος ζώνης του, πράγμα πού δέν γίνεται στά AM.

Στίς ἐμπομπές FM π.χ., ἡ μέγιστη συχνότητα εἶναι $\omega_m = 15 \text{ KHz}$ καί ἡ μέγιστη μεταβολή συχνότητας εἶναι

$$\alpha k_f = 75 \text{ KHz}$$

$$\text{για } \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = b = \frac{\Delta f}{f_s} =$$

$$= \frac{75 \text{ KHz}}{15 \text{ KHz}}$$

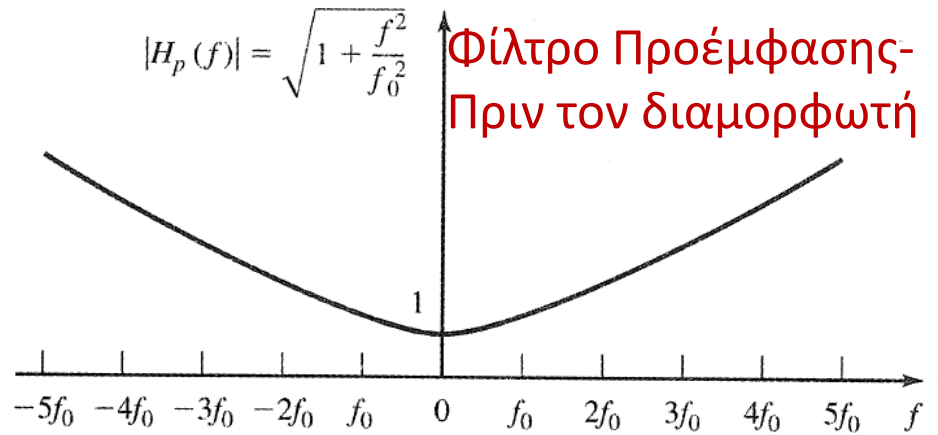
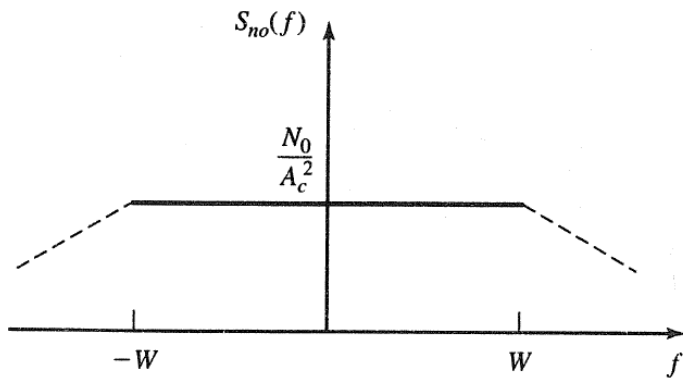
$$\text{Κ.Α.} = 3 \cdot 5^3 = 375$$

Περιεχόμενα ενότητας

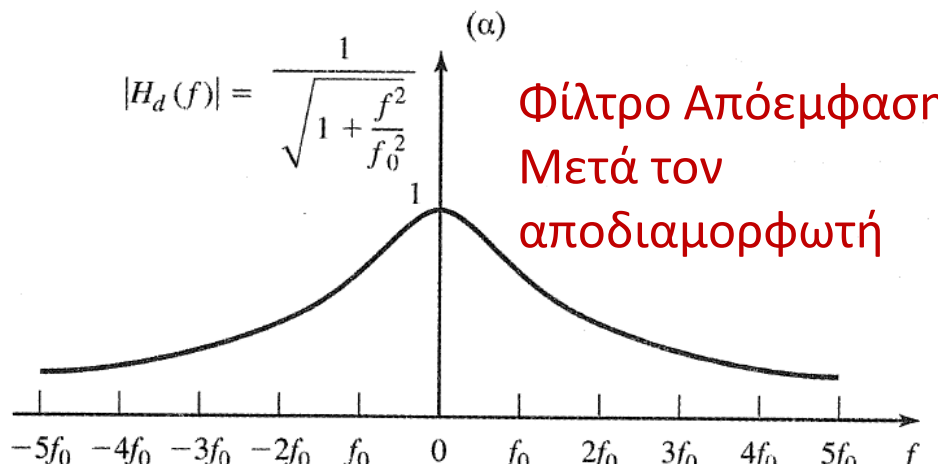
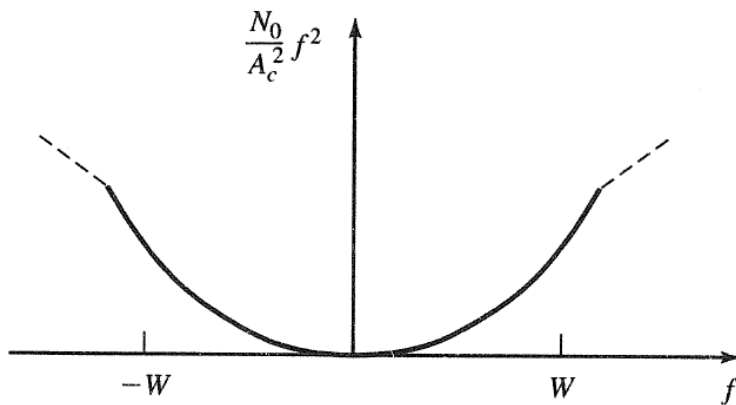
- ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
- ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ΦΙΛΤΡΑ ΠΡΟΕΜΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΕΜΦΑΣΗΣ



Φίλτρα προέμφασης και αποέμφασης (1/2)



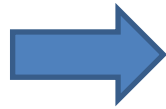
Φίλτρο Προέμφασης-
Πριν τον διαμορφωτή



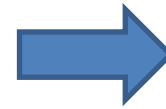
Φίλτρο Απόεμφασης-
Μετά τον
αποδιαμορφωτή

Φίλτρα προέμφασης και αποέμφασης (2/2)

Εμπορικά FM



RC φίλτρα με σταθερά χρόνου 75μs



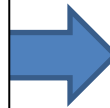
$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

Συχνότητα 3 dB

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \times 75 \times 10^{-6}} = 2.1 \text{ KHz}$$

$$S_{n_{PD}}(f) = S_{n_o}(f) |H_d(f)|^2 = \frac{N_0}{A_c^2} f^2 \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}$$

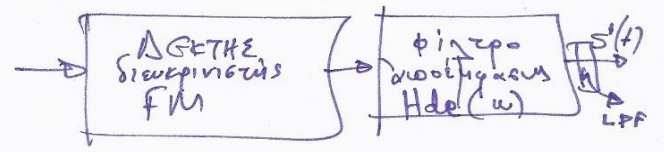
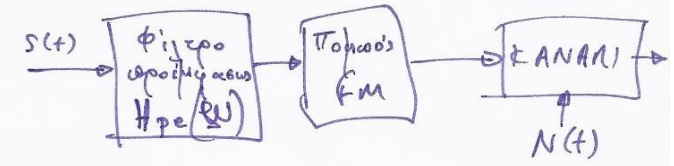
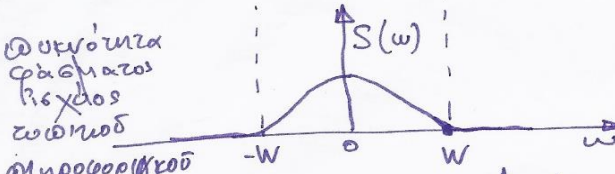
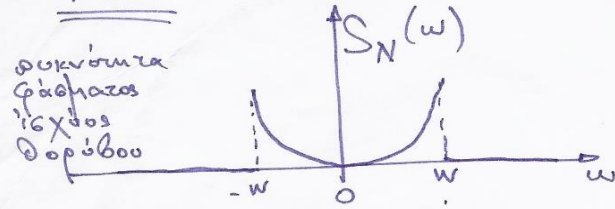
$$\begin{aligned} P_{n_{PD}} &= \int_{-W}^{+W} S_{n_{PD}}(f) df = \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^{+W} \frac{f^2}{1 + \frac{f^2}{f_0^2}} df \\ &= \frac{2N_0 f_0^3}{A_c^2} \left[\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{OPD}}{\left(\frac{S}{N}\right)_o} &= \frac{P_{n_o}}{P_{n_{PD}}} = \frac{\frac{2N_0 W^3}{3A_c^2}}{\frac{2N_0 f_0^3}{A_c^2} \left[\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0} \right]} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)^3}{\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0}} \end{aligned}$$



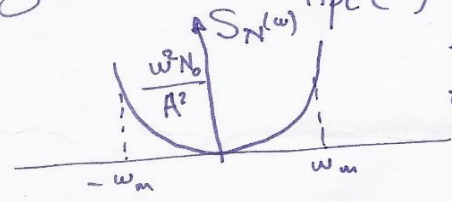
Φίλτρα Προ-έμφασης - Από-έμφασης



αποέμφαση = κονίβουμε τις συνιστώσες ύψους συχνότητας του $S(t)$ πριν το στάδιο FM (δηλ. πριν από την είσοδο μέρους)
 αποέμφαση = στην έξοδο του διακριτικού ενεργείται η αντίστροφη διαδικασία αποέμφασης των ύψων συχνότητας.

Για να μην έχουμε παραμόρφωση του $s(t)$ τα φίλτρα απο-από-έμφασης πρέπει να είναι αντίστροφα μεταξύ τους (δηλ. συσχετισμός μεταστροφής τους).

δηλ. $H_{de}(w) = \frac{1}{H_{pe}(w)}$ $-w_m \leq w \leq w_m$



Τότε η προωσοποιημένη ισχύς του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου αποέμφασης είναι $\int_{-w}^w |H_{de}(w)|^2 \cdot S_N(w) dw$ και μετά το LPF γίνεται:

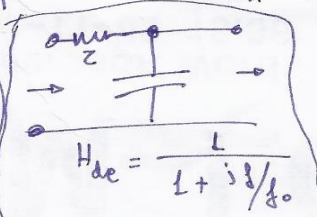
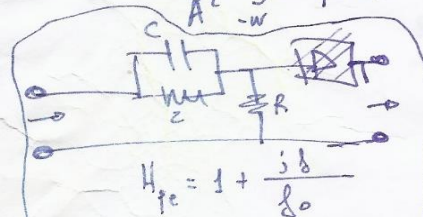
Μέση ισχύς θορύβου με αποέμφαση = $\frac{N_0}{A^2} \int_{-w}^w \omega^2 |H_{de}(w)|^2 dw$

Έστω το S_0 ιδανικά θεωρητικά από-έμφαση ή βελτίωση του SNR₀ από-έμφαση δεν μεταβάλλεται και τα φίλτρα απο-έμφασης ή βελτίωση του SNR₀ από-έμφαση και από θορύβου και ορίζεται:

$D = \frac{\text{Μέση ισχύς θορύβου στην είσοδο χωρίς απο-έμφαση}}{\text{Μέση ισχύς θορύβου στην έξοδο με απο-έμφαση}}$

$D = \frac{2N_0 \omega_m^3}{3A^2 \pi} = \frac{\omega_m^3}{3\pi \int_{-w_m}^w \omega^2 |H_{de}(w)|^2 dw}$

SNR_i βελτιός



$f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$ $R \ll Z$ $2\pi CR \ll 1$

