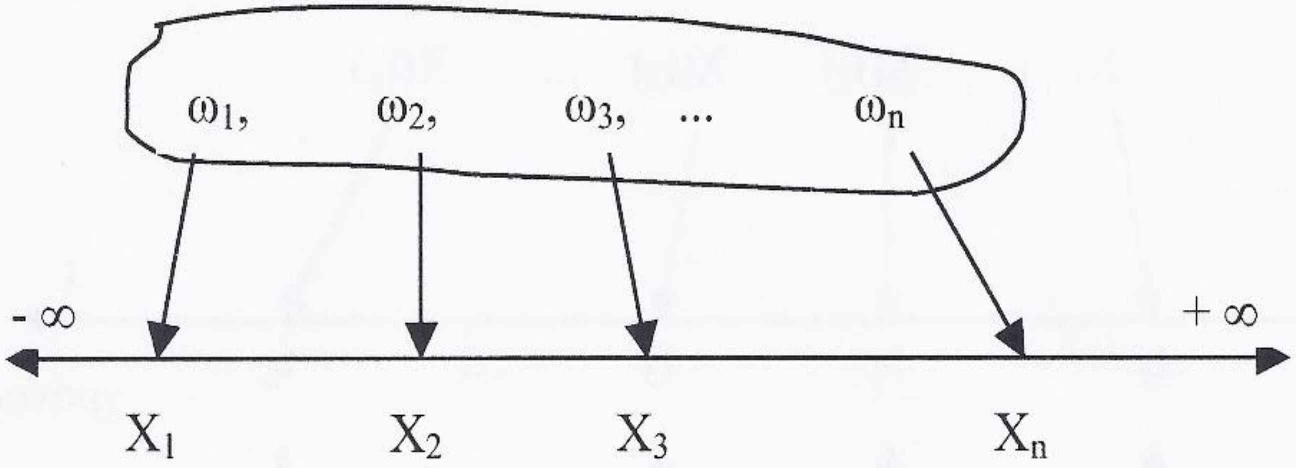
Στοχαστικά Σήματα
ή
Στοχαστικές Διαδικασίες

Ο ΘΟΡΥΒΟΣ ΩΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΣΗΜΑ

Τυχαία Μεταβλητή

Ας θυμηθούμε όμως πρώτα τι είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X.
Τ.μ. X είναι η αντιστοίχηση των αποτελεσμάτων ενός (τυχαίου) πειράματος στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Έστω ότι το πείραμα έχει n αποτελέσματα: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.
Το κάθε αποτέλεσμα συμβαίνει με μια συγκεκριμένη πιθανότητα: $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots, P(\omega_n)$, έτσι ώστε το $\Sigma P(\omega_i) = 1$, $(i=1,\ldots,n)$.
Αν αντιστοιχίσουμε το ω_1, στο X_1, το ω_2 στο X_2 ... και το ω_n στο X_n, έχουμε την τ.μ.. X (το σύνολον των X_i).



ΣΧΗΜΑ 1 – Τυχαία Μεταβλητή

Πολλές φορές η αντιστοίχιση είναι προφανής. Π.χ. αν η τ.μ. N είναι ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα (π.χ. τηλεφωνικό κέντρο) υπονοούμε ότι αν έχουμε 1 κλήση θα την αντιστοιχίσουμε στον αριθμό 1, αν έχουμε 0 κλήσεις στο 0, αν έχουμε 10 κλήσεις στο 10, κ.λ.π.

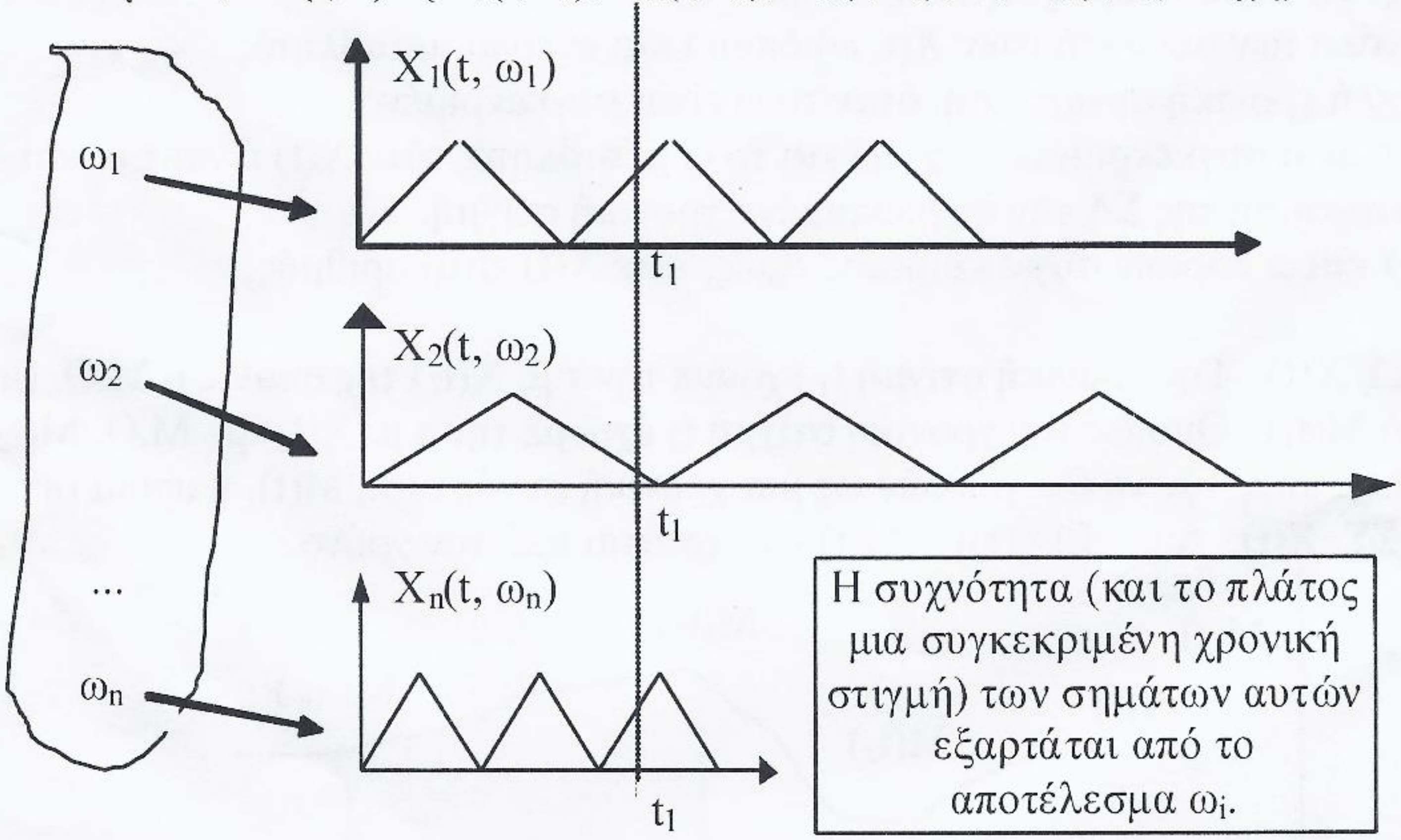
Στοχαστικό Σήμα
ή
Στοχαστική Διαδικασία

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1</u>

Ας δούμε τώρα τι είναι στοχαστικό σήμα ή στοχαστική διαδικασία.

Αν στα αποτελέσματα του πειράματος αντιστοιχίσουμε όχι ένα αριθμό αλλά μία (ολόκληρη!!!) χρονική συνάρτηση, τότε η συλλογή όλων αυτών των συναρτήσεων, ονομάζεται στοχαστικό σήμα (ΣΣ) ή στοχαστική διαδικασία (ΣΔ – stochastic process) (καλώς ή κακώς, με την λέξη στοχαστική εννοούμε απλά τυχαία).

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1:</u> ΣΣ ή ΣΔ είναι λοιπόν το σύνολο των χρονικών συναρτήσεων που εξαρτώνται από το αποτέλεσμα ω_i: $\mathbf{X(t,\omega)}=\{X_1(t,\omega_1), X_2(t,\omega_2), X_3(t,\omega_3), \ldots, X_n(t,\omega_n)$ Σχηματικά:



ΣΧΗΜΑ 2 – Στοχαστικό Σήμα

Στον συμβολισμό του ΣΣ $\mathbf{X(t, \omega)}$, πολλές φορές «ξεχνούμε» το ω: $\mathbf{X(t)}$.

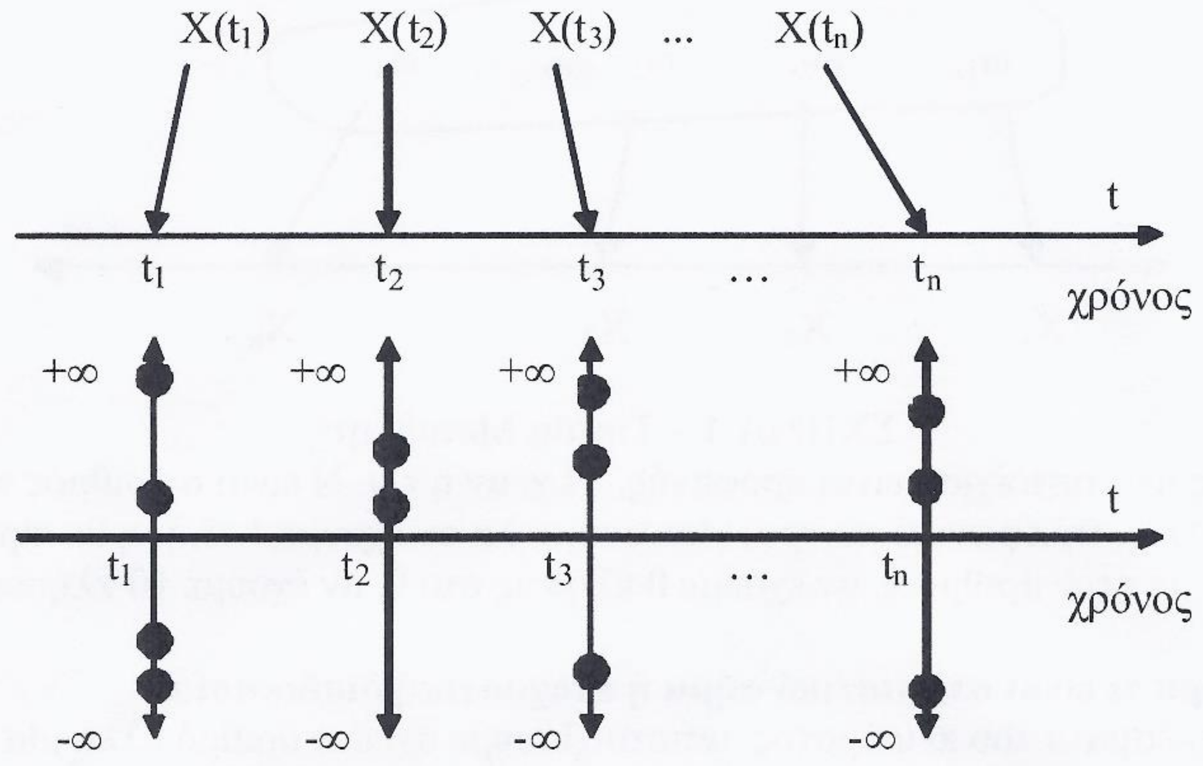
Στοχαστικό Σήμα
ή
Στοχαστική Διαδικασία

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2</u>

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την τιμή του $X(t, \omega)$ σε ένα ωρισμένο σημείο του χρόνου t, το t_1. Τότε το $X(t_1, \omega)$ είναι μια τ.μ., αφού το ω μπορεί να πάρει όλες τις τιμές $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, και για κάθε τιμή που παίρνει δίδει διαφορετική τιμή στο $X(t_1, \omega)$. Δες στο προηγούμενο σχήμα (ΣΧΗΜΑ 2).
Δηλαδή σε κάθε σημείο του χρόνου t ορίζεται μία τ.μ. Άρα:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2:</u> ΣΣ ή ΣΔ είναι μια συλλογή τ.μ. $X(t, \omega)$, η κάθε μία από τις οποίες ορίζεται σε όλα τα σημεία του t. «Ξεχνώντας» πάλι το ω, γράφουμε **X(t)**.

Καλό είναι εκτός από το σχήμα 2, να έχουμε στο μυαλό μας και το ακόλουθο σχήμα, ΣΧΗΜΑ 3, για να έχουμε πλήρη εικόνα του τι ειναι ΣΣ ή ΣΔ.



ΣΧΗΜΑ 3

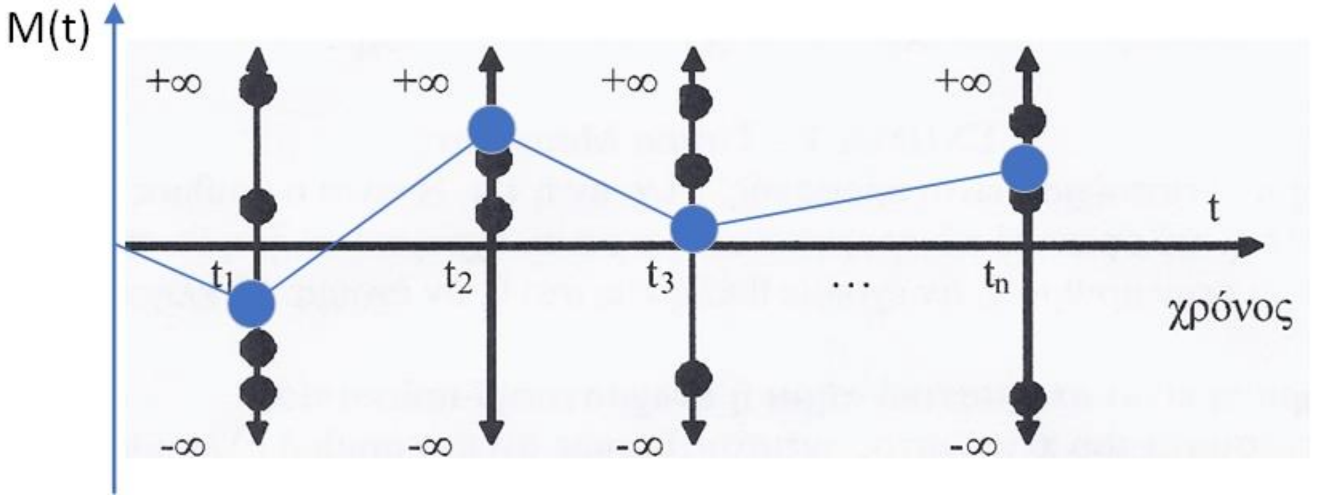
Συμβολισμός Στοχαστικού Σήματος

- **Ο συμβολισμός X(t), αν πρόκειται για Σ.Σ. (Σ.Δ.), δηλ. Σ.Σ. X(t), σημαίνει:**

1. Το σύνολο των συναρτήσεων X(t, ω), όταν t και ω είναι μεταβλητές.
2. Μια απλή συνάρτηση χρόνου, όταν το ω έχει συγκεκριμένη τιμή.
3. Μια τυχαία μεταβλητή, όταν το t έχει συγκεκριμένη τιμή (π.χ. t_1) και το ω είναι μεταβλητή, και δείχνει την κατάσταση της Σ.Δ. την συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
4. Έναν συγκεκριμένο αριθμό (μια τιμή), όταν t και ω πάρουν συγκεκριμένες τιμές.

Μέσος Όρος (Μέση Τιμή) Στοχαστικού Σήματος

- Έστω το Σ.Σ. $X(t)$.
- Την χρονική στιγμή $t = t_1$, έχομε την τ.μ. $X(t_1)$ της οποίας η Μέση Τιμή είναι $M(t_1)$. Για $t = t_2$, έχομε την τ.μ. $X(t_2)$ της οποίας η Μέση Τιμή είναι $M(t_2)$. κ.ο.κ.
- Στα διάφορα σημεία του χρόνου, κάθε τ.μ. έχει μία Μέση Τιμή.
- Όλες οι Μέσες Τιμές μπορούν να θεωρηθούν ως μία συνάρτηση χρόνου $M(t)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Μέση Τιμή ή **Μέσος Όρος** του Σ.Σ. $X(t)$. Δηλ. $E[X(t)] = M(t) \rightarrow$ συνάρτηση χρόνου.



Διασπορά Στοχαστικού Σήματος (sigma^2)

Όπως ο Μ.Ο. $M(t)$ είναι χρονική συνάρτηση, έτσι και η διασπορά $\sigma^2(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.

$$\sigma^2(t) = E\left[\left(X(t) - M(t)\right)^2\right] = \int_{X(t)} \left(X(t) - M(t)\right)^2 f\left(X(t)\right) dX(t)$$

f η πυκνότητα Σ.Σ.

$$\sigma^2(x) = E\left[\left(X(t) - M(t)\right)\left(X(t) - M(t)\right)\right] =$$

$$= E\left[X(t)^2\right] - \left(M(t)\right)^2 \equiv \text{VAR}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}([X - \mathrm{E}(X)]^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2 - 2X\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2
\end{aligned}$$

Συνδιασπορά (Covariance) Σ.Σ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)]) \\
&= \mathrm{E}(XY - X\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)Y + \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}[x(t_1), x(t_2)] &= E[(x(t_1) - M(t_1))(X(t_2) - M(t_2)] = \\
&= E[x(t_1)X(t_2) - X(t_1)M(t_2) - M(t_1)X(t_2) + M(t_1)M(t_2)] \\
&= E[x(t_1)x(t_2)] - E[X(t_1)]M(t_2) - M(t_1)E[x(t_2)] + M(t_1)M(t_2) \\
&= \underbrace{E[x(t_1)X(t_2)]}_{R(t_1,t_2)} - M(t_1)\cdot M(t_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Αν } t_1 = t_2 = t \quad \mathrm{cov}[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2(t)}$$

Στατιστική Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (Σ.Σ.Α.)

ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ Σ.Σ.

Γνώση:

- Μ.Ο. = M(t) και $cov[X(t_1),X(t_2)]$ (Μέση τιμή και Συνδιασπορά)

ή

- Μ.Ο. = M(t) και $R(t_1, t_2)$ (Μέση τιμή και Στατιστική Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης)

ή

- Μ.Ο. = M(t) και $\sigma^2(t)$ (Μέση τιμή και Διασπορά)

Αφού cov, Σ.Σ.Α. και VAR στην ουσία είναι τα ίδια πράγματα.

Στάσιμα Στοχαστικά Σήματα – ΙΣΧΥΡΑ ΣΤΑΣΙΜΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΙΣΧΥΡΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

(ΣΤΑΣΙΜΟ Σ.Σ. ΜΕ ΤΗΝ ΣΤΕΝΗ ΕΝΝΟΙΑ)

Πρέπει $f(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) = f(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau))$

για όλα τα n και $\tau \in (-\infty, \infty)$

δηλ. δεν αλλάζουν οι πυκνότητες πιθανότητας του Σ.Σ.

Για $n=1$ θα ισχύει: $f(X(t_1)) = f(X(t_1+\tau))$

δηλ. η 1η πυκνότητα του Σ.Σ. δεν εξαρτάται από τον χρόνο t. Με άλλα λόγια, όλες οι τ.μ. (τυχαίες μεταβλητές) είναι ίδιες!!!

Ασθενικά

Στάσιμο

Στοχαστικό

Σήμα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΣΘΕΝΙΚΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

(Στάσιμο Σ.Σ. ΜΕ ΤΗΝ ΕΥΡΕΙΑ ΕΝΝΟΙΑ)

Πρέπει: (α) $M(t) = M$ δηλ. όλες οι τ.μ. έχουν ίδιο Μ.Ο.

Μ.Ο. ≡ Μέσο Όρον

(β) $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau)$

Παράδειγμα: $X(t) = A\cos(\omega_c t + \varphi)$ όπου φ τ.μ. $\in [0, 2\pi]$

Είναι στάσιμο με την ευρεία έννοια

(α) $E(X(t)) = A\,E(\cos(\omega_c t + \varphi)) = 0$ διότι η μέση τιμή του $\cos = 0$

δηλ. αποδείξαμε ότι έχει σταθερό Μ.Ο.

(β) $R(t_1, t_2) = E[A\cos(\omega_c t_1 + \varphi) \cdot A\cos(\omega_c t_2 + \varphi)] =$

$= A^2 E\left(\frac{1}{2}\cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) + \frac{1}{2}\cos(\omega_c t_1 + \omega_c t_2 + 2\varphi)\right) =$

$= A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) + \frac{1}{2} E\left(\cos(\omega_c t_1 + \omega_c t_2 + 2\varphi)\right)$

$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_1 - t_2)$

δηλ. ισχύει και το (β) "πρέπει": $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau)$

$\tau = t_1 - t_2$

Εργοδικό Σ.Σ.

Εργοδικότης ως προς τον Μ.Ο.

ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΓΙΑ Σ.Σ.

Πώς θα περιγράψουμε το Σ.Σ.;

ΣΥΝΗΘΩΣ ΜΕ ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ (Μ.Ο. και COV)

Πώς θα βρούμε το μη πλήρες μοντέλο;

ΑΝ ΤΟ Σ.Σ. ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΣΙΜΟ (ΑΣΘΕΝΙΚΑ ΑΡΚΕΙ), ΤΟΤΕ ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΕΝΑ ΜΟΝΟ ΜΕΛΟΣ ΤΟΥ (ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΛΛΟΓΗ ΤΟΥ Σ.Σ.), ΕΙΝΑΙ ΕΥΚΟΛΟ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΕΝΑ ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ, ΑΡΚΕΙ ΤΟ Σ.Σ. ΝΑ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ, ΔΗΛΑΔΗ ΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ Μ.Ο. ΝΑ ΙΣΟΥΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΥΣ ΧΡΟΝΙΚΟΥΣ Μ.Ο.

Ορισμός: "Ένα Στάσιμο Σ.Σ. είναι εργοδικό ως προς τον Μ.Ο. M, όταν όλα τα μέλη του έχουν τον ίδιο χρονικό Μ.Ο. $\overline{X_1(t)}$ και $M=\overline{X_1(t)}$

$$\overline{X_1(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X_1(t)\,dt = M$$

Στατιστικός Μ.Ο.

δηλ. $M=E[X(t)]$

Εργοδικό Σ.Σ.

Εργοδικότης ως προς την Σ.Σ.Α.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

αξν. στάσιμο Σ.Σ είναι <u>εργοδικό ως προς των Σ.Σ.Α. R(τ)</u>, όταν όλα τα μέλη του έχουν την ίδια χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\phi(\tau)$ και $\Phi(\tau) = R(\tau)$

$$\Phi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_1(t-\tau)\, dt$$

για $f_1(t)$ σήμα ενέργειας

$$\Phi_{11}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)\, f_1(t-\tau)\, dt$$

για $f_1(t)$ σήμα ισχύος

αν το σήμα ισχύος είναι περιοδικό με T δεν χρειάζεται το όριο (lim).

Ιδιότητες και Εφαρμογές της Σ.Σ.Α.

1η ιδιότητα: $R(0) = E[X(t)^2]$

$R(\tau) = R(t_2 - t_1) = E[X(t_1)(X(t_1+\tau))] \underset{(\tau=0)}{\Rightarrow} R(0) = E[X(t_1)^2]$

για $\tau = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \tau$

2η ιδιότητα: $R(\tau) = R(-\tau)$ άρτια (δηλ. συμμετρία ως προς άξονα y)

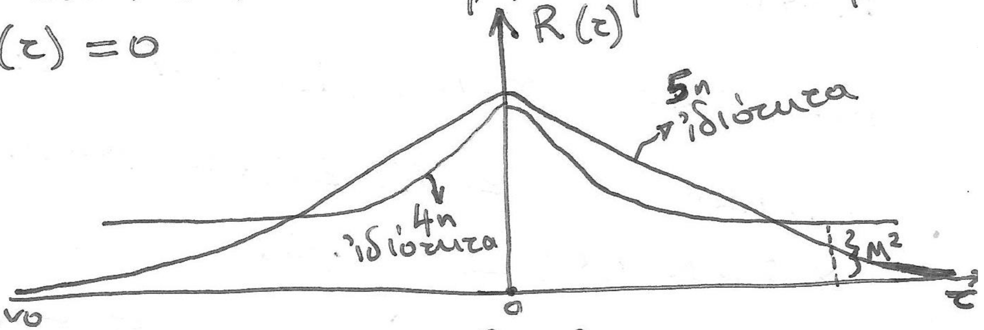
3η ιδιότητα: $R(0) \geq |R(\tau)|$ η ισότητα ισχύει αν η $R(\tau)$ περιοδική

4η ιδιότητα: "Αν $E[X(t)] = M \neq 0$ τότε $X(t) = M + Y(t)$ και

$R_X(\tau) = E[(Y(t)+M)(Y(t+\tau)+M)] = E[Y(t)Y(t+\tau)] + M^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(\tau) = R_Y(\tau) + M^2$

5η ιδιότητα: "Αν $M=0$ και στο $X(t)$ δεν υπάρχει περιοδικό όρο τότε $\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = 0$



<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>

Στον δέκτη το λαμβανόμενο σήμα είναι το $X(t)$. Το ερώτημα είναι: <u>τι λάβαμε;</u>

$$X(t) = \begin{cases} N(t) & (\text{θόρυβο}) \\ S(t) + N(t) & (\text{χρήσιμο σήμα + θόρυβο}) \end{cases}$$

Θεωρήσεις: (α) $S(t)$ κ' $N(t)$ Σ.Σ. ασθενικά στάσιμα και Στατιστικώς Ασυσχέτιστα.

(β) $S(t)$ είναι περιοδικό $\Rightarrow R_S(\tau)$ περιοδική

(γ) $E(N(t)) = 0$ και $N(t)$ χωρίς περιοδικούς όρους

Σ.Σ.Α. - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

<u>Απάντηση</u> Θα βρούμε την $R_X(\tau)$ και θα την εξετάσουμε για μεγάλες τιμές του τ (Θεωρητικά $\tau \to \infty$). Άν λάβαμε μόνο θόρυβο τότε $R_X(\tau) = R_N(\tau) \xRightarrow{(\tau\to\infty)} R_N(\tau) \to 0$

Άν λάβαμε $X(t) = s(t) + N(t) \Rightarrow R_X(\tau) = E\left[(s(t)+N(t))(S(t+\tau)+N(t+\tau))\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(\tau) = E\left[s(t)s(t+\tau)\right] + E\left[s(t)N(t+\tau)\right] + E\left[N(t)S(t+\tau)\right] + E\left[N(t)N(t+\tau)\right]$

$\Rightarrow R_X(\tau) = R_S(\tau) + \underbrace{R_{SN}(\tau)}_{\to 0} + \underbrace{R_{NS}(\tau)}_{\to 0} + R_N(\tau) = R_S(\tau) + R_N(\tau)$

διότι $S(t)$ κ $N(t)$ Στατιστικώς Ασυσχέτ.

Για $\tau \to \infty$ $R_N(\tau) \to 0$ και $R_S(\tau)$ περιοδική

Άρα για $\tau \to \infty$ $R_X(\tau) = R_S(\tau)$ » .

Επομένως η λύση είναι να βρούμε την $R_X(\tau)$ και να την εξετάσουμε για μεγάλες τιμές τού τ. Άν την βρούμε περιοδική έχουμε $s(t)$ + θόρυβο, άν δεν είναι περιοδική έχουμε μόνο θόρυβο.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΙΣΧΥΟΣ – S(ω)

- Η πυκνότητα φασματικής ισχύος $S_X(\omega)$ (σε W/Hz) ενός Σ.Σ. X(t) είναι ο M. Fourier της Στατιστικής Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης $R_X(\tau)$ του X(t).

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Ἀπ' αὐτό βγάζουμε ὅτι,

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, d\omega$$

Ισχύς του Σ.Σ. X(t)

Αλλά για τ=0, και αν Μ.Ο. = 0 τότε σημαίνει ότι R(τ) = Cov = σ^2 = VAR του Σ.Σ. X(t)

ΔΗΛΑΔΗ R(0) = Cov = σ^2 = ΙΣΧΥ του Σ.Σ. X(t)

ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΩΝ WIENER-KHINCHINE

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$f(t) \xleftrightarrow{M.F.} F(\omega) \longrightarrow |F(\omega)|^2 = S(\omega) \equiv$$ πυκνότητα φάσματος ενέργειας ή ισχύος ανάλογα με $f(t)$ αν είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος

$$\text{Ενέργεια} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega < \infty$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ/ΘΕΩΡΗΜΑ WIENER – KHINCHINE

Δυο τρόποι για να βρούμε την $S(\omega)$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xleftrightarrow{M.F.} & F(\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(\tau) = \Phi_{11}(t) & \xleftrightarrow{M.F.} & |F(\omega)|^2 = S(\omega) \end{array}$$

για στάσιμα στοχαστικά σήματα

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

πεδίο χρόνου $f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow O(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

πεδίο συχνότητας $F(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow O(\omega)$

$$O(\omega) = F(\omega)\cdot H(\omega)$$

πεδίο συχνότητας $S(\omega) \longrightarrow \boxed{|H(\omega)|^2} \longrightarrow \underbrace{S_{out}(\omega) = S(\omega)\,|H(\omega)|^2}_{\text{Απόδειξη}}$

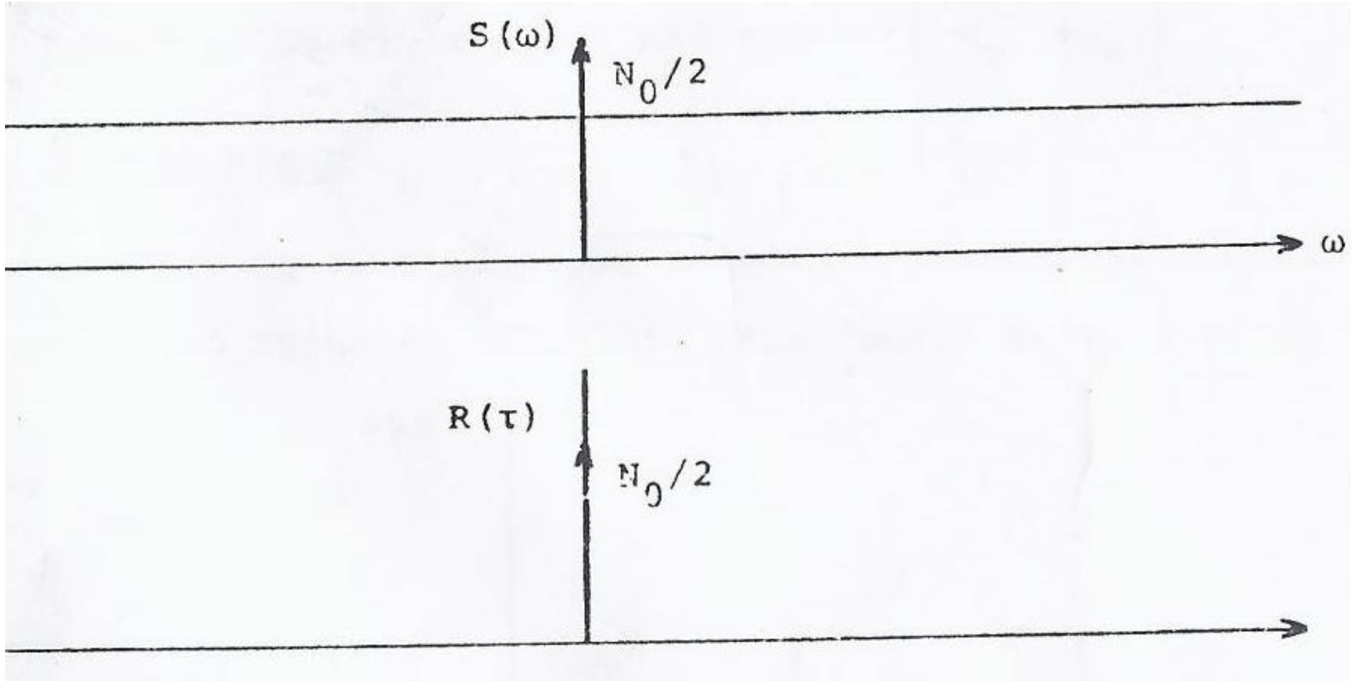
Από $F(\omega)\cdot H(\omega) = O(\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |O(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2$$

$$\Rightarrow S_{out}(\omega) = S(\omega)\cdot|H(\omega)|^2$$

Ο θόρυβος ως Σ.Σ. - ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ: Σ.Σ.Α. $R(\tau) = (N_0/2)\,\delta(\tau)$

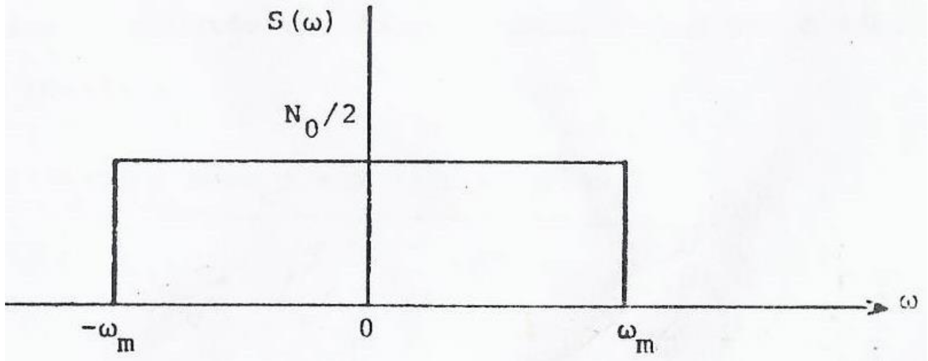


ΑΠΕΙΡΗ Η ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ
ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ

ΘΟΡΥΒΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΖΩΝΗΣ

$$S(\omega) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & -\omega_m \le \omega \le \omega_m \\ 0 & \text{ἀλλοῦ} \end{cases}$$

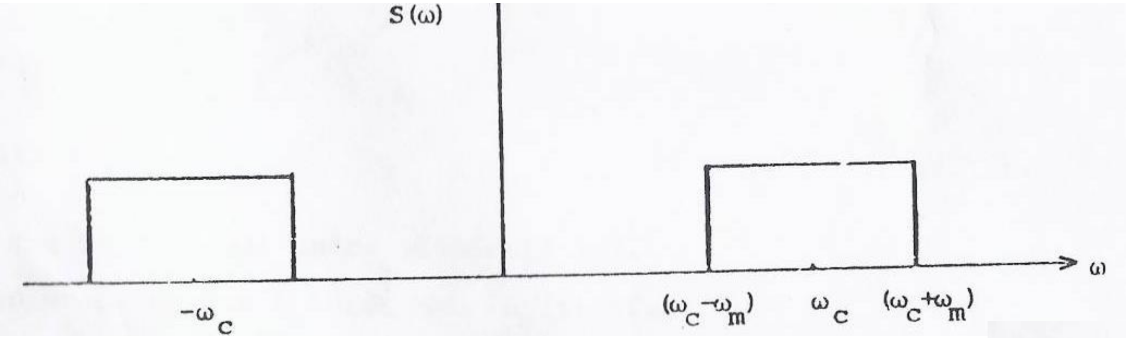
Θεωρήστε ότι είναι το εξαγώμενο ενός ιδανικού LPF στο οποίο είσοδος είναι ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ, δεδομένου ότι $S_{out}(\omega) = S(\omega)\ |H(\omega)|^2 = S(\omega)$ από $-\omega_m$ μέχρι ω_m



$$R(\tau) = \frac{N_0\,\omega_m}{2\pi}\,\frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau} \qquad 2W_1 \frac{\sin W_1 \tau}{W_1 \tau} \rightarrow \quad -2\pi W_1 \quad 2\pi W_1 \qquad (12.4.5)$$

ΙΣΧΥΣ $R(0) = N_0 f$

ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΤΕΝΗΣ ΖΩΝΗΣ



Αν X(t) θόρυβος περιορισμένης ζώνης: $N(t) = X(t)\cos(\omega_c t + \theta)$

$$N(t) = X(t)\cos\theta\cos\omega_c t - X(t)\sin\theta\sin\omega_c t$$

$$N(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

$n_c(t) = X(t)\cos\theta$ καί $n_s(t) = X(t)\sin\theta$

$$N(t) = X(t)\cdot\cos(\omega_c t+\theta) = \underbrace{X(t)\cos\theta}_{n_c(t)}\cos\omega_c t - \underbrace{X(t)\sin\theta}_{n_s(t)}\sin\omega_c t$$

θ: τ.μ. Ζ.

$$R_N(\tau) = E[N(t_1)\cdot N(t_2)] = E\left[\tfrac{1}{2}X(t_1)\cdot X(t_2)\left[\cos\omega_c(t_1-t_2)+\cos(\omega_c t_1+\omega_c t_2+2\theta)\right]\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{R_N(\tau) = \tfrac{1}{2}R_X(\tau)\cdot\cos\omega_c\tau}$$

$$R_N(0) = \frac{R_x(0)}{2}$$

$$R_c(\tau) = E\{n_c(t_1)\,n_c(t_2)\} = E\{X(t_1)X(t_2)\cos^2\theta\}$$

καί άφοῦ θ, X(t) εἶναι ἀσυσχέτιστα γιά ὅλες τίς τ.μ. τοῦ

$$R_c(\tau) = E\{X(t_1)X(t_2)\}\,E(\cos^2\theta)$$

$$= R_x(\tau)\,E\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{\cos 2\theta}{2}\}$$

$$= \frac{R_x(\tau)}{2}\left(1 + E\{\cos 2\theta\}\right)$$

καί τελικά,

$$R_c(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{2}$$

διότι $E\{\cos 2\theta\}$ εἶναι μηδέν (ἀπόδειξέ το).

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἰσχύς τοῦ $n_c(t)$ εἶναι,

$$R_c(0) = \frac{R_x(0)}{2}$$

Συνδιασπορά (Covariance) – Συσχέτιση (Correlation)

- Περιγράφουν το βαθμό στον οποίο μια τ.μ. ή ένα Στοχαστικό Σήμα αποκλίνει από την αναμενόμενη τιμή (από τον Μ.Ο.).
- Η **συνδιασπορά** (ή συνδιακύμανση) δείχνει πόσο δύο τ.μ. διαφέρουν (διαφέρουν) μεταξύ τους, ενώ η **συσχέτιση** δείχνει πώς η αλλαγή σε μία τ.μ. έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή σε άλλη τ.μ. Π.χ. δείχνει αν η αύξηση της τιμής μιας τ.μ. έχει θετικό ή αρνητικό αντίκτυπο στην τιμή της άλλης τ.μ.
- Η **διασπορά** δείχνει την τετραγωνική απόκλιση μιας τ.μ. από τη μέση τιμή της. Πιο απλά, δείχνει πόσο μακριά από την μέση τιμή απλώνονται οι τιμές μιας τ.μ.
- (It not only shows the kind of relation (in terms of direction) but also how strong the relationship is. Thus, we can say the correlation values have standardized notions, whereas the covariance values are not standardized and cannot be used to compare how strong or weak the relationship is because the magnitude has no direct significance. It can assume values from -1 to +1.)

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad \mathrm{Cov}(x,y) = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{N} \qquad Correlation = \frac{Cov\ (x,y)}{\sigma x * \sigma y}$$