



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Συστήματα Επικοινωνιών

Διαμορφώσεις γωνίας

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση της διαμόρφωσης συχνότητας και διαμόρφωσης φάσης
- Καθορισμός του φάσματος και της ισχύος στη διαμόρφωση γωνίας
- Περιγραφή της διαμόρφωσης γωνίας από ημιτονοειδές σήμα
- Παρουσίαση διατάξεων διαμόρφωσης συχνότητας



# Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ
- ❑ ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



# Περιεχόμενα ενότητας

## ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ

ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



# Διαμόρφωση γωνίας (Angle Modulation)

- ✓ Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation-FM)
- ✓ Διαμόρφωση Φάσης (Phase Modulation-PM)
- ✓ Μη γραμμικές λειτουργίες, δύσκολες στην ανάλυση
- ✓ Διαστολή του εύρους ζώνης
- ✓ Αντοχή στο θόρυβο



EDWIN H. ARMSTRONG  
1890 - 1954



Honeymooning in Palm Beach in 1923. Armstrong's wedding present to his wife was the first portable radio.



FM  $u(t) = A \cos \vartheta(t)$   
 κυκλική γωνία

$u(t) = \text{Re}[Ae^{j\vartheta(t)}] = A \cos \vartheta(t)$

$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_i(t)$   
 κυκλική συχνότητα

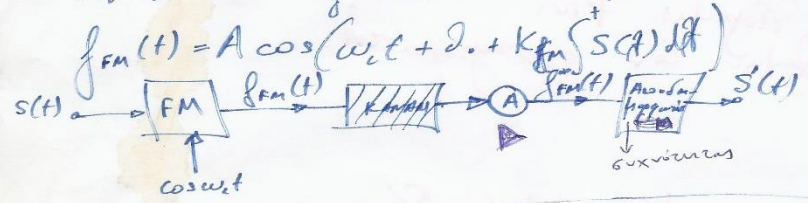
$\vartheta(t) = \omega_c t + \vartheta_0 \Rightarrow \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c$

$\vartheta(t) = \int \omega_i(t) dt$

1

$s(t) \equiv$  γραμμικός τρόπος στην κυκλική συχνότητα ως πορεία

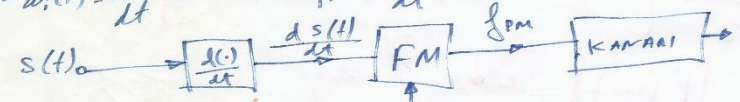
$\omega_i(t) = \omega_c + K_f \cdot s(t) \Rightarrow \vartheta(t) = \int \omega_i(t) dt = \omega_c t + K_f \int s(t) dt + \vartheta_0$



$s(t) \equiv$  γραμμικός τρόπος στην κυκλική γωνία ως πορεία

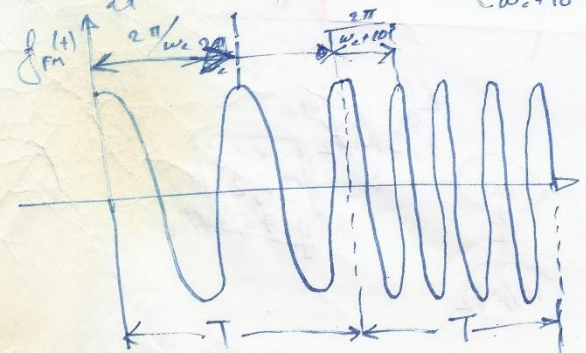
$\vartheta(t) = \omega_c t + \vartheta_0 + K_{PM} s(t)$   $f_{PM} = A \cos(\omega_c t + \vartheta_0 + K_{PM} \cdot s(t))$

$\omega_i(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c + K_{PM} \frac{ds(t)}{dt}$



$s(t) = \begin{cases} \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T \leq t \leq 2T \end{cases}$   $f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + \vartheta_0 + K_{FM} \int s(t) dt)$

$\omega_i(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c + K_{FM} s(t) = \begin{cases} \omega_c & 0 \leq t \leq T \\ \omega_c + 10^3 & T \leq t \leq 2T \end{cases}$



# FM - PM

# Μαθηματική παρουσίαση των FM και PM σημάτων (1/2)

$$x(t) = A_c \cos \theta(t)$$

Διαμορφωμένο σήμα

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$$

Γωνία σήματος

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία συχνότητα

## Phase Modulation – PM

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

Φάση ( $K_p$ : Ευαισθησία φάσης rad/V)

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} = K_p \max |m(t)|$$

Δείκτης διαμόρφωσης



# Μαθηματική παρουσίαση των FM και PM σημάτων (2/2)

## Frequency Modulation – FM

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t)$$

$K_f$ : Ευαισθησία φάσης (Hz/V)

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

Φάση

$$f_i(t) = f_c + K_f m(t)$$

Στιγμιαία συχνότητα

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{K_f \max |m(t)|}{W}$$

Δείκτης διαμόρφωσης

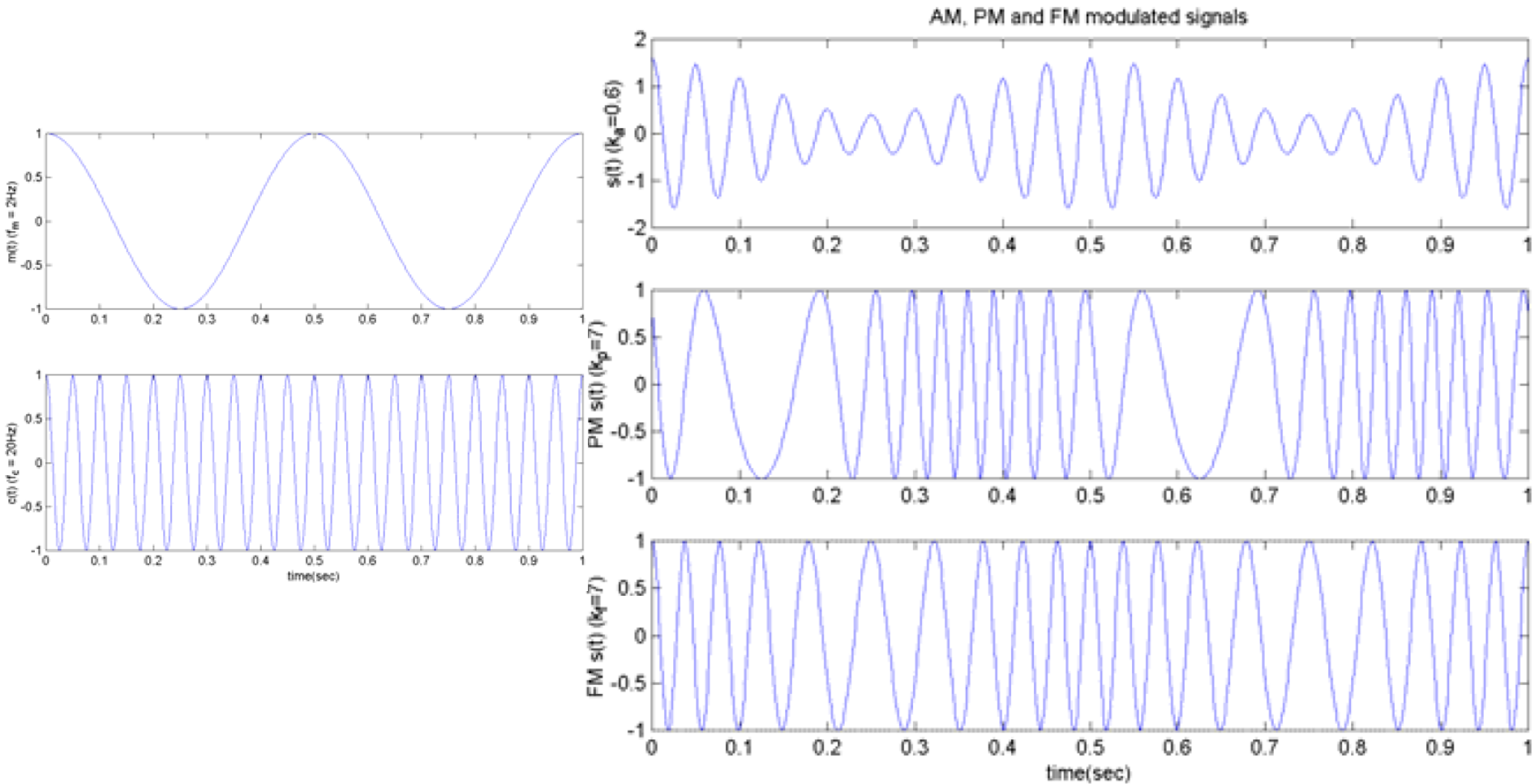
$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM.} \end{cases}$$

Η διαμόρφωση κατά φάση με το ολοκλήρωμα ενός μηνύματος είναι ισοδύναμη πράξη με την διαμόρφωση κατά συχνότητα με το αρχικό μήνυμα

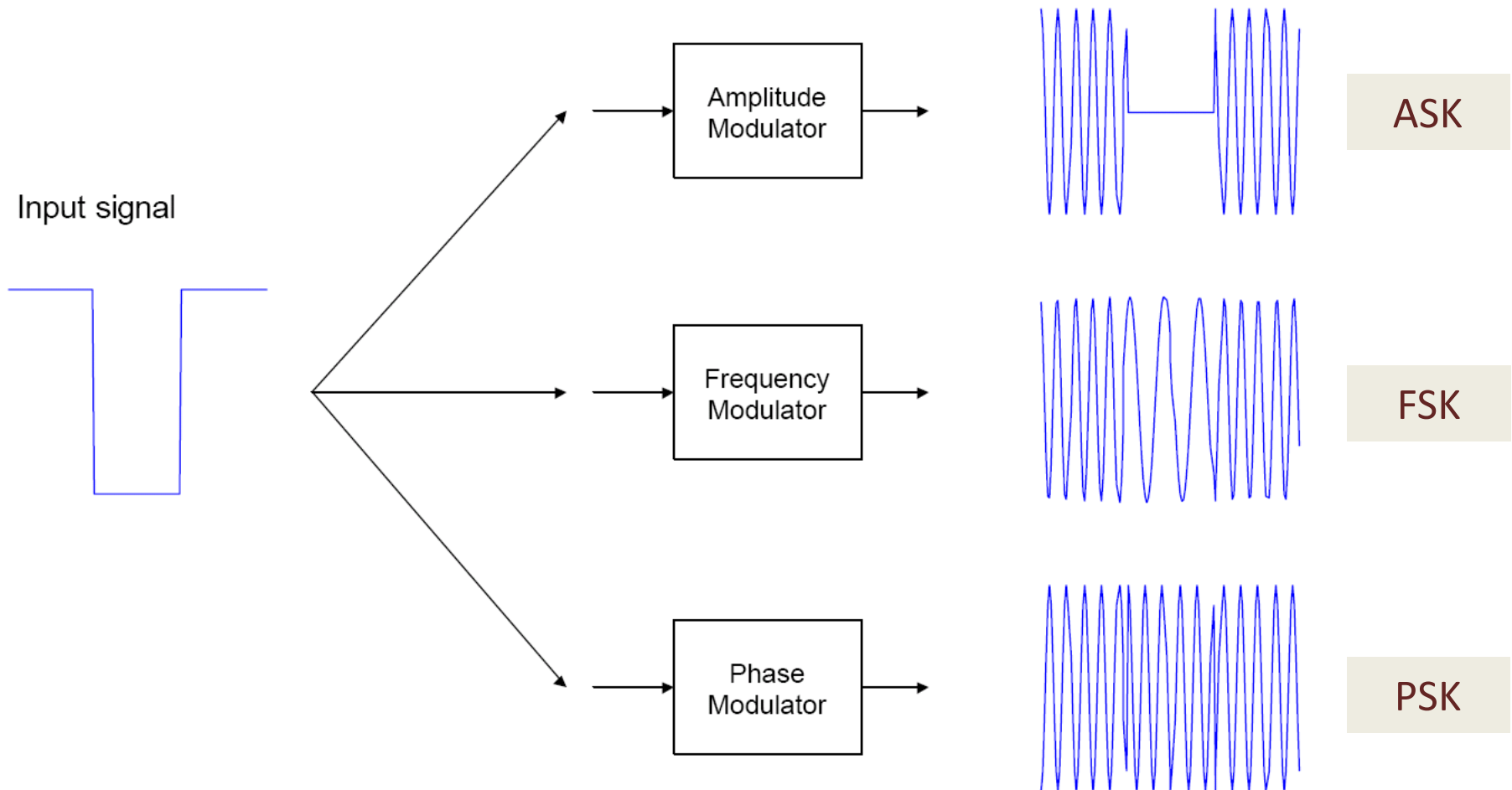




# Παράδειγμα AM, FM και PM σημάτων



# Παράδειγμα AM, FM και PM σημάτων σε είσοδο παλμοσειράς



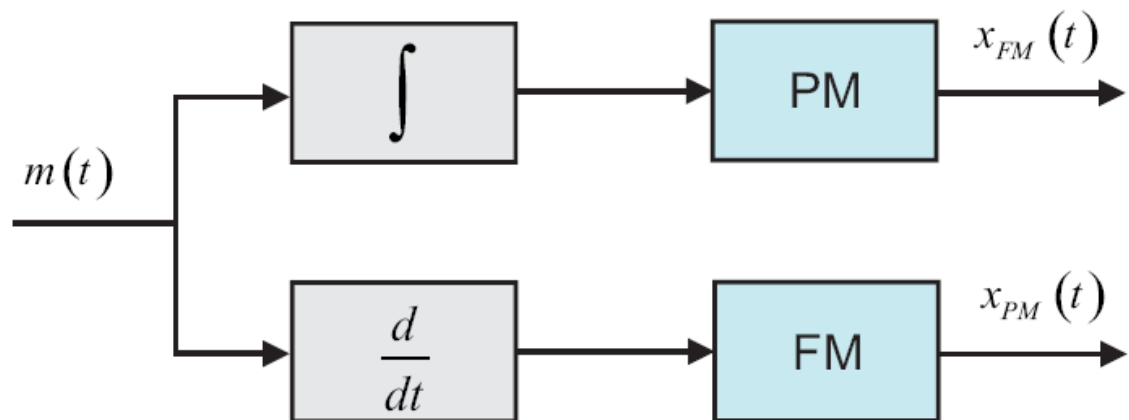
# Συμπεράσματα για την διαμόρφωση γωνίας (1/2)

$$x(t) = A_c \cos 2\pi f_c t \cos \phi(t) - A_c \sin 2\pi f_c t \sin \phi(t)$$

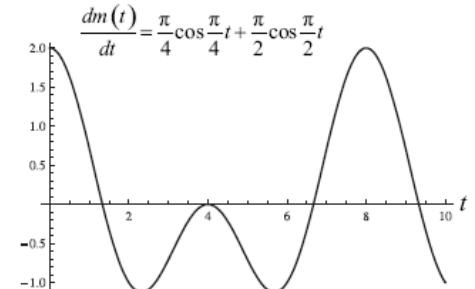
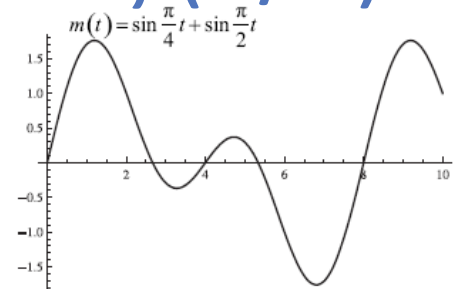
- ✓ Σε αντίθεση με τις διαμορφώσεις πλάτους, τα δύο ορθογώνια φέρονται διαμορφώνονται κατά πλάτος από τις μη-γραμμικές συναρτήσεις  $\cos \phi(t)$  και  $\sin \phi(t)$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η διαμόρφωση γωνίας να είναι μία έντονα μη-γραμμική διαδικασία, στην οποία δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.
- ✓ Οι διαμορφώσεις PM και FM παρουσιάζουν την ιδιότητα της δυϊκότητας (duality)

$$K_p = 2\pi K_f$$

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM.} \end{cases}$$

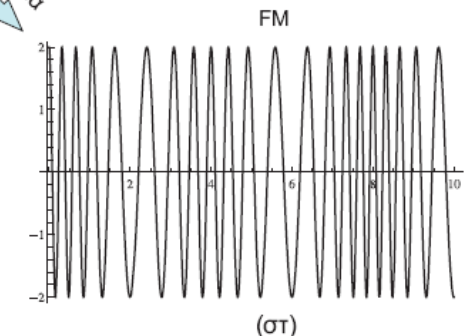
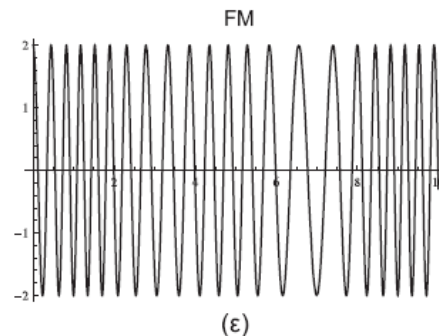
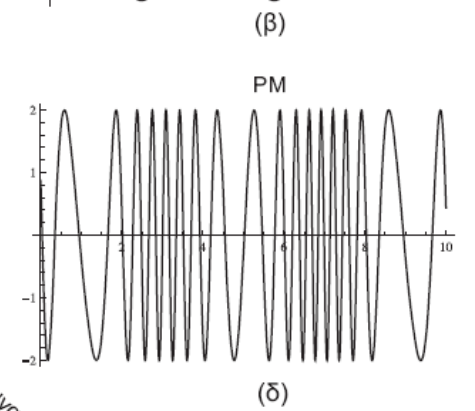
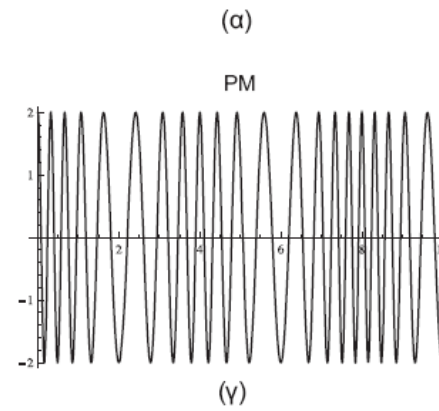


# Συμπεράσματα για την διαμόρφωση γωνίας (2/2)



$$K_p = 2\pi K_f$$

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM.} \end{cases}$$



Ισοδυναμία



# Παράδειγμα

Αν το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης είναι:

$$m(t) = a \cos 2\pi f_m t,$$

να βρεθούν οι αναλυτικές σχέσεις στο πεδίο του χρόνου για τα σήματα PM και FM.

$$\begin{aligned}x_{PM}(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + K_p m(t)] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + K_p a \cos 2\pi f_m t] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos 2\pi f_m t]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{FM}(t) &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] \\ &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \frac{K_f a}{f_m} \sin 2\pi f_m t \right] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin 2\pi f_m t],\end{aligned}$$



# Περιεχόμενα ενότητας

- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ
- ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ
- ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



# N B F M

FM γενής  $f_{FM}(t)$

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + K_{FM} \int s(t) dt) = A \cos \omega_c t \cos(K_{FM} \int s(t) dt) - A \sin \omega_c t \sin(K_{FM} \int s(t) dt)$$

$\cos(K_{FM} \int s(t) dt) \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(K_{FM} \int s(t) dt) = 1$   
 $\sin(K_{FM} \int s(t) dt) = K_{FM} \int s(t) dt$

$| \int s(t) dt | < 1$      $K_{FM} < 1$

$f_{FM}(t) = A \cos \omega_c t - A K_{FM} \int s(t) dt \sin \omega_c t$

$\cos(\omega_c t) \xrightarrow{M.F.} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$   
 $\sin(\omega_c t) \xrightarrow{M.F.} -j\pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$   
 $\int_0^t f(\lambda) d\lambda \xrightarrow{M.F.} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi \cdot F(0) \delta(\omega)$

$$F_{FM}(\omega) = \pi \cdot A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + A K_{FM} \frac{S(\omega - \omega_c)}{2(\omega - \omega_c)} - A K_{FM} \frac{S(\omega + \omega_c)}{2(\omega + \omega_c)}$$

(απόδειξη του  $F_{FM}(\omega)$ )  
 Γνωστέον ότι  $\frac{S(\omega - \omega_c)}{2(\omega - \omega_c)} = \frac{1}{2} \int_0^t s(\lambda) d\lambda$

FM σταθίας  $f_{FM}(t)$  έστω  $s(t) = a \cos \omega_s t \Rightarrow \int s(t) dt = \frac{a}{\omega_s} \sin \omega_s t$

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + K_{FM} \frac{a}{\omega_s} \sin \omega_s t)$$

$\omega_c(t) = \omega_c + K_{FM} \cdot a \cos \omega_s t$   
 $B \equiv m_{FM} \equiv \Delta f_{max} / f_s = \frac{\alpha K_{FM}}{\omega_s} = \frac{\Delta f_{max}}{f_s}$

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t) \cos(B \sin \omega_s t) - A \sin(\omega_c t) \sin(B \sin \omega_s t)$$

$$f_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(B) \cos(\omega_c + n\omega_s)t$$

$B = 2 \Rightarrow J_0, J_{\pm 1}, J_{\pm 2}, J_{\pm 3}$   
 $B = 2 \cdot n\omega_s = 2 \cdot 3\omega_s \quad n = B+1$

$f_{FM}(t) = A \sum_{n=-3}^3 J_n(2) \cos(\omega_c + n\omega_s)t$

(ήδη),  $\Delta f_{max} = 75 \text{ kHz}$

$B = 2 \cdot (b+1) \omega_s = 2(b\omega_s + \omega_s) = 2(\alpha K_{FM} + \omega_s) = 2(\Delta \omega + \omega_s)$

$\Delta \omega = 2\pi \cdot 75$   
 $\Delta f_{max} = 75 \text{ kHz}$   
 $\omega_s = 2\pi \cdot 15 \quad f_s = 15 \text{ kHz}$

$B = 180 \text{ kHz}$   
 οι σταθμοί απέχουν  $200 \text{ kHz} = 0,2 \text{ MHz}$

# N B P M

NBPM  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$f_{FM}(t) = A \cos \omega_c t - A K_{FM} \int s(t) dt \sin \omega_c t$$

$$A \cos \omega_c t \xrightarrow{M.F.} A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$g(t) = A K_{FM} \int s(t) dt \xrightarrow{M.F.} \frac{A K_{FM} S(\omega)}{j\omega} \quad \text{ä v } S(0) = 0$$

$$\sin \omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}$$

$$+ \frac{g(t) \cdot e^{j\omega_c t}}{2j} - \frac{g(t) \cdot e^{-j\omega_c t}}{2j} \xrightarrow{+} \frac{1}{2j} G(\omega - \omega_c) - \frac{1}{2j} G(\omega + \omega_c)$$

$$F_{FM}(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{A K_{FM}}{2j} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{j(\omega - \omega_c)} + \frac{A K_{FM}}{2j} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{j(\omega + \omega_c)}$$

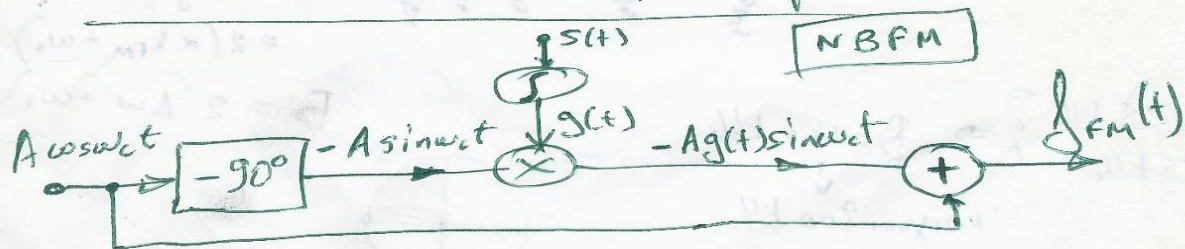
$$= \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A K_{FM}}{2} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{A K_{FM}}{2} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$f_{PM}(t) = A \cos \omega_c t - A K_{PM} S(t) \sin \omega_c t$$

$$F_{PM}(\omega) = A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{A K_{PM}}{2j} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} + \frac{A K_{PM}}{2j} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$= A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{j A K_{PM}}{2} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{j A K_{PM}}{2} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$\left| \frac{j A K_{PM}}{2} \right| = \left| 0 + j \frac{A K_{PM}}{2} \right| = \sqrt{0^2 + \frac{A^2 K_{PM}^2}{4}} = \frac{A K_{PM}}{2}$$





# Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (1/3)

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} = K_p \max |m(t)|$$

$$x(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \frac{\phi^2(t)}{2!} \cos 2\pi f_c t + \dots - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t + A_c \frac{\phi^3(t)}{3!} \sin 2\pi f_c t - \dots$$

$\beta \ll 1$

→

$$x(t) \simeq A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$X(f) \simeq \mathcal{F}[A_c \cos 2\pi f_c t] - \mathcal{F}[A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t]$$
$$\simeq \frac{A_c}{2} \delta(f - f_c) + \frac{A_c}{2} \delta(f + f_c) + \frac{jA_c}{2} \Phi(f - f_c) - \frac{jA_c}{2} \Phi(f + f_c)$$

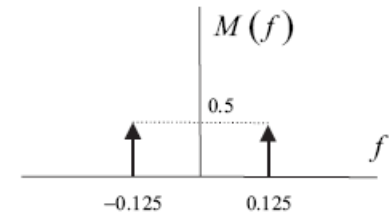
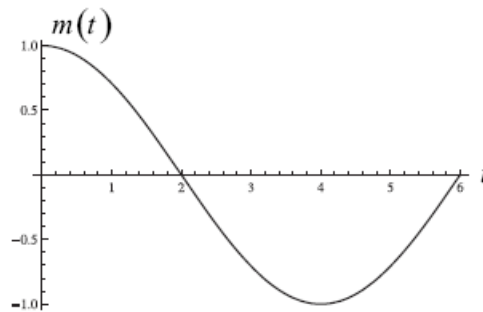


# Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (2/3)

- ✓ Το  $x(t)$  αποτελείται από 2 όρους: α) ένα φέρον,  $A_c \cos 2\pi f_c t$ , το οποίο δεν μεταβάλλεται με το σήμα πληροφορίας και β) τον όρο  $A_c \varphi(t) \sin 2\pi f_c t$ , ο οποίος είναι ένα DSB-AM-SC σήμα.
- ✓ Οι πλευρικές φασματικές ζώνες του DSB-AM-SC παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\pi/2$  με τη συνιστώσα του φέροντος. Συγκεκριμένα, το  $\Phi(f - f_c)$  προηγείται ενώ το  $\Phi(f + f_c)$  έπεται κατά  $\pi/2$  της φασματικής συνιστώσας του φέροντος.
- ✓ Οι πλευρικές ζώνες του DSB-AM-SC παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης ίση με  $\pi$ .
- ✓ Το εύρος ζώνης είναι σχεδόν ίδιο με αυτό του AM, δηλαδή  $2W$ .



# Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (3/3)



$$m(t) = a \cos 2\pi f_m t$$

$$a = 1, f_m = 1/8, f_c = 3,$$

$$\beta_f = 0.12, A_c = 2.$$

