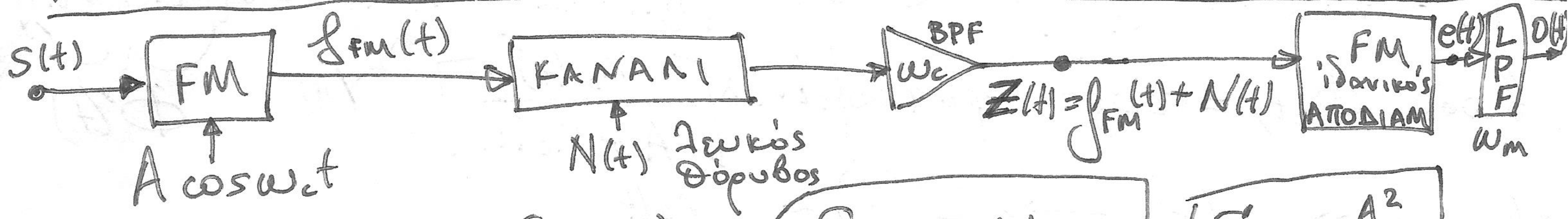
# ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΓΙΑ FM ΣΥΣΤΗΜΑ




$f_{FM}(t)=A\cos\left(\omega_c t+K_{FM}\int s(t)dt\right)$ $\boxed{\text{Έστω } N(t)=0}$ $\boxed{S_i=\frac{A^2}{2}}$

$$e(t)=\cancel{\alpha}^{1}\frac{d}{dt}\left[\omega_c t+K_{FM}\int s(t)dt\right]=\omega_c+K_{FM}s(t)$$

Το πληροφοριακό σήμα στην έξοδο του φίλτρου, $O(t)=K_{FM}s(t)$, έχει ισχύ $\boxed{S_o=K_{FM}^2 S}$ όπου $S$ η ισχύς του $s(t)$.

Έστω τώρα $N(t)\neq 0$ και $s(t)=0$ (προσοχή $f_{FM}(t)\neq 0$)

Ο θόρυβος στην είσοδο του ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ FM έχει γίνει θόρυβος στενής ζώνης λόγω του BPF (ιδανικό με συνάρτηση μεταφοράς 1). Δηλαδή η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην έξοδο του BPF $[\omega_c-\Delta\omega,\ \omega_c+\Delta\omega]$ θα είναι

$$S_N(\omega)=\frac{N_0}{2}\cancel{|H(\omega)|^2}\,1=\frac{N_0}{2}$$ από $\omega_c-\Delta\omega$ μέχρι $\omega_c+\Delta\omega$

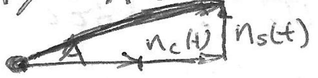
(δεν ξεχνάμε τις αντίστοιχες αρνητικές συχνότητες !!!)

Η ισχύς $$P_{N_i}=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\Delta\omega}^{\omega_c+\Delta\omega}\frac{N_0}{2}d\omega=\frac{N_0}{2\pi}\omega\Big|_{\omega_c-\Delta\omega}^{\omega_c+\Delta\omega}=\frac{2N_0\Delta\omega}{2\pi}=\boxed{2\Delta f\cdot N_0}$$

$$\boxed{ΛΣΘ_i=S_i/P_{N_i}=\frac{A^2}{4N_0\Delta f}}$$

Θα βρούμε τώρα την $P_{Nout}$, ισχύ του θορύβου στην έξοδο του LPF.

Αφού $s(t)=0$, $Z(t)=A\cos\omega_c t+N(t)=A\cos\omega_c t+n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t$




$Z(t)=Y(t)\cos(\omega_c t+\varphi(t))$

Το μοντέλο του θορύβου στενής ζώνης προήλθε από θόρυβο περιορισμένης ζώνης $X(t)$ ο οποίος πολλαπλασιάστηκε με ένα συνημίτονο $\cos(\omega_c t+\theta)$ όπου $\theta$ τ.μ. $[0,2\pi]$ (ομοιόμορφης κατανομής).

δηλ. $N(t)=X(t)\cos(\omega_c t+\theta)=$

$$=\underbrace{X(t)(\cos\theta)}_{n_c(t)}\cos\omega_c t-\underbrace{X(t)(\sin\theta)}_{n_s(t)}\sin\omega_c t$$

Το $Z(t)$ γράφεται ως $\underbrace{\sqrt{[A+n_c(t)]^2+n_s^2(t)}}_{Y(t)}\cos(\underbrace{\omega_c t+\varphi(t)}_{\Phi'(t)})$

όπου $\Phi(t)$ = τοξο εφαπτομένης $\left[\dfrac{n_s(t)}{A+n_c(t)}\right]$

Αν $A \gg n_c(t) \Longrightarrow \Phi(t) \approx \dfrac{n_s(t)}{A}$

Ο ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ FM (Διευκρινιστής) δρα πάνω στην γωνία $\Phi'(t)$ και μάλιστα την παραγωγίζει

$$\frac{1}{A}n_s(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow \frac{1}{A}\frac{dn_s(t)}{dt}$$

(ξεχνάμε το $\omega_c$)

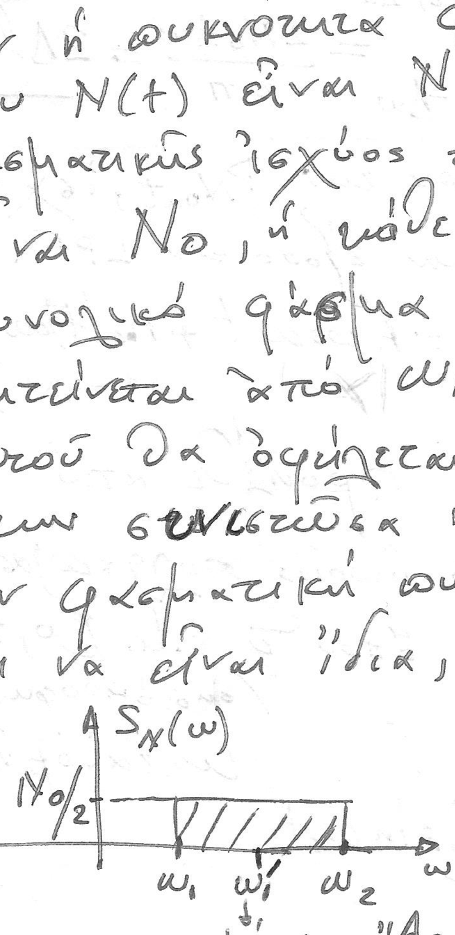
άρα $C(t) = \omega_c + \dfrac{1}{A}\dfrac{dn_s(t)}{dt}$

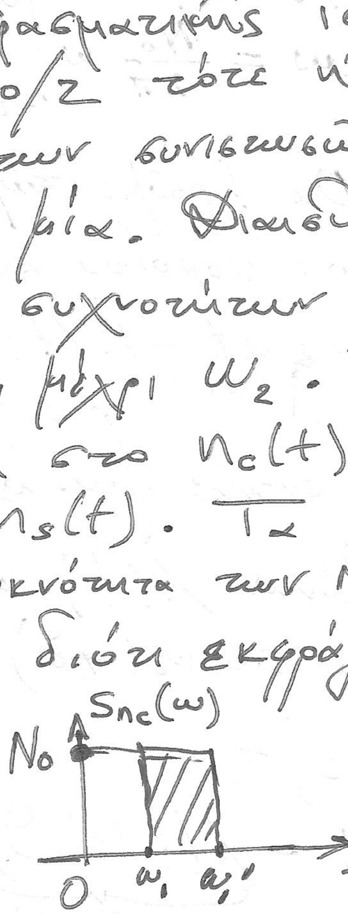
όπου ο <u>όρος του θορύβου</u> είναι το $\dfrac{1}{A}\dfrac{dn_s(t)}{dt}$. Πρέπει να βρούμε τη Σ.Σ. Αυτοσυσχέτισης έχει και μετά με M.F. την πυκνότητα φασματικής ισχύος την οποία θα ολοκληρώσουμε για να βρούμε την ισχύ του (στην έξοδο όμως)

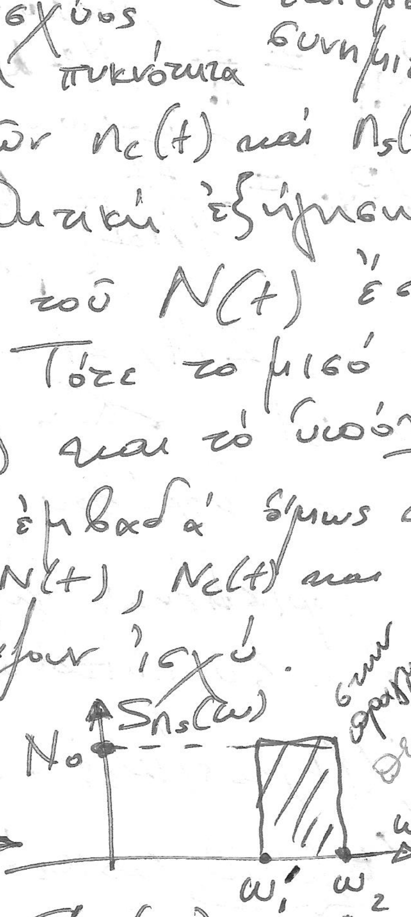
Η ολοκλήρωση θα γίνει λαμβάνοντας υπ' όψιν το LPF $[0, \omega_M]$.

Ο θόρυβος στενής ζώνης $N(t)$ και οι συνιστώσες του $n_c(t)$ και $n_s(t)$ έχουν ίδια ισχύ $\left(P = \underbrace{P\frac{1}{2}}_{\text{επίδραση συνημιτόνου}} + \underbrace{P\frac{1}{2}}_{\text{επίδραση ημιτόνου}}\right)$

Αν η πυκνότητα φασματικής ισχύος του $N(t)$ είναι $No/2$ τότε η πυκνότητα φασματικής ισχύος των συνιστωσών $n_c(t)$ και $n_s(t)$ είναι $No$, η κάθε μία. Διαισθητική εξήγηση: Το συνολικό φάσμα συχνοτήτων του $N(t)$ έστω ότι εκτείνεται από $\omega_1$ μέχρι $\omega_2$. Τότε το μισό του φάσματος αυτού θα οφείλεται στο $n_c(t)$ και το υπόλοιπο μισό στην συνιστώσα $n_s(t)$. Τα εμβαδά όμως κάτω από την φασματική πυκνότητα των $N(t)$, $N_c(t)$ και $n_s(t)$ πρέπει να είναι ίδια, διότι εκφράζουν ισχύ.




Άρα $S_{n_c}(\omega) = S_{n_s}(\omega) = N_0 = 2\cdot S_N(\omega)$

Επομένως ζητείται τώρα η πυκνότητα φασματικής ισχύος του $\frac{1}{A}n_s(t)$ δεδομένου ότι ξέρουμε ότι $S_{n_s}(\omega)=N_0$

Πρέπει να θυμηθούμε ότι: $\boxed{R_{n_s}(\tau) \xleftrightarrow{M.F.} S_{n_s}(\omega)=N_0}$

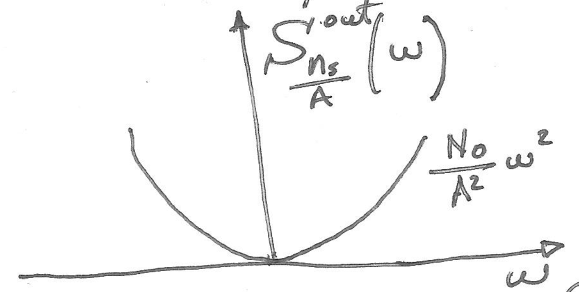
$$R_{\frac{n_s}{A}}(\tau) = E\left[\frac{1}{A}n_s(t_1)\cdot\frac{1}{A}n_s(t_2)\right] = \frac{1}{A^2}E\left[n_s(t_1)\cdot n(t_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{A^2}E\left[n_s(t_1)\,n_s(t_1+\tau)\right] \Rightarrow \frac{1}{A^2}S_{n_s}(\omega) = \frac{N_0}{A^2}$$

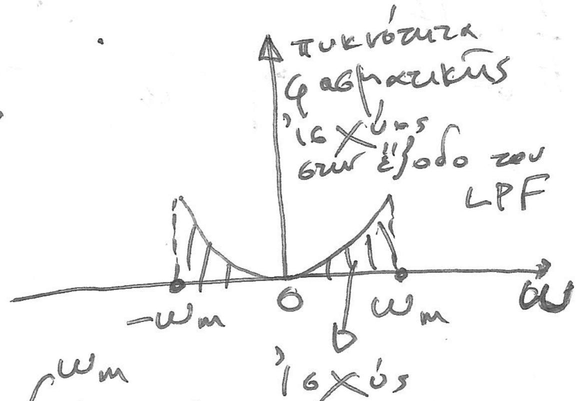
$\frac{1}{A^2}R_{n_s}(\tau)$

δηλ. $\boxed{R_{\frac{n_s}{A}}(\tau) \xleftrightarrow{M.F.} \frac{N_0}{A^2}}$ $\quad S_{\frac{n_s(t)}{A}}(\omega) = \frac{N_0}{A^2}$

Στην έξοδο του διαφοριστή η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι $\frac{N_0}{A^2}\cdot\omega^2$ (από την θεωρία γραμμικών συστημάτων $S_{out}(\omega)=S_{input}(\omega)|H(\omega)|^2$ με $H(\omega)=j\omega \rightarrow |H(\omega)|^2=\omega^2$).




→ στην είσοδο του LPF




Τελικά η ισχύς του θορύβου στην έξοδο του LPF είναι $P_{N_{out}} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\omega_m}\frac{N_0}{A^2}\omega^2\,d\omega =$

$= \frac{N_0\omega_m^3}{3A^2\pi}$ άρα $ΣΘ_0 = \frac{K_{FM}^2 S}{\frac{N_0\omega_m^3}{3A^2\pi}} = \frac{3K_{FM}^2 S\cdot A^2\cdot\pi}{N_0\cdot\omega_m^3}$ και

$$\boxed{K.A. = \frac{6\cdot K_{FM}^2\cdot S\cdot\Delta\omega}{\omega_m^3}}$$

Για $s(t)=\alpha\cos\omega_s t \rightarrow S=\frac{\alpha^2}{2}$ έστω $\omega_m=\omega_s$

$\omega_i(t)=\omega_c+\underbrace{\alpha\cdot K_{FM}}_{\Delta\omega}\cos\omega_s t$ $\quad K.A. = \frac{6\cdot K_{FM}^2\cdot\alpha^2\cdot\alpha\cdot K_{FM}}{2\;\omega_s^3} =$

$= 3\,\frac{K_{FM}^3\cdot\alpha^3}{\omega_s^3} = 3\left(\frac{\alpha\cdot K_{FM}}{\omega_s}\right)^3 = 3b^3$ για $\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = b = \frac{\Delta f}{f_s} =$

$= \frac{75\,kHz}{15\,kHz}$ οπότε $K.A. = 3\cdot 5^3 = 375$

# ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

$$f(t) \xleftrightarrow{M.F.} F(\omega) \longrightarrow |F(\omega)|^2 = S(\omega) \equiv$$ συχνότητα φάσματος ενέργειας ή ισχύος

Ενέργεια $= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega < \infty$

ανάλογα με $f(t)$ → άν είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος

# ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ / ΘΕΩΡΗΜΑ WIENER - KHINCHINE

Δυο τρόποι για να βρούμε την $S(\omega)$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xleftrightarrow{M.F.} & F(\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(\tau) = \Phi_{11}(t) & \xleftrightarrow{M.F.} & |F(\omega)|^2 = S(\omega) \end{array}$$

για στάσιμα στοχαστικά σήματα

# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

πεδίο χρόνου $f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow O(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

πεδίο συχνότητας $F(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow O(\omega)$

$O(\omega) = F(\omega)\cdot H(\omega)$

πεδίο συχνότητας $S(\omega) \longrightarrow \boxed{|H(\omega)|^2} \longrightarrow \underbrace{S_{out}(\omega) = S(\omega)\,|H(\omega)|^2}_{\text{Απόδειξη}}$

Από $F(\omega)\cdot H(\omega) = O(\omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow |O(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2$

$\Rightarrow S_{out}(\omega) = S(\omega)\cdot |H(\omega)|^2$