Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 5 – 7 Διαμόρφωση Γωνίας – FM/PM

Ιωάννης Βαρδάκας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας 5
2. Περιεχόμενα ενότητας 5
3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 5-7: Διαμόρφωση γωνίας FM/PM........................7
4. Λύσεις των ασκήσεων 15

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 5 έως και 7της θεωρίας του μαθήματος Συστήματα Επικοινωνιών. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

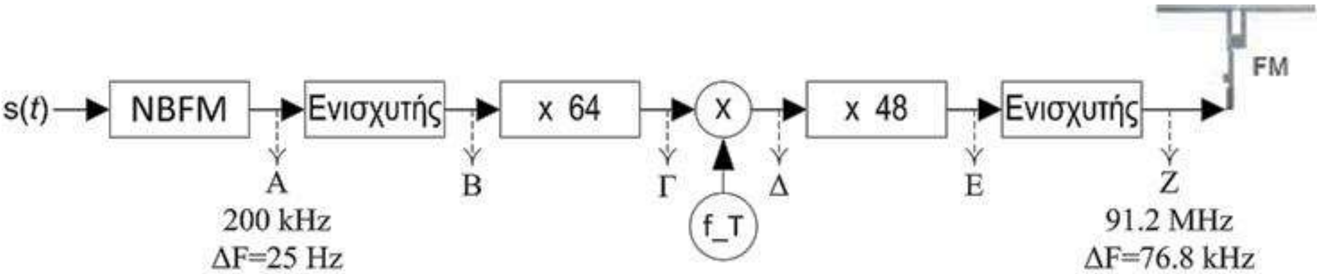
2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση της διαμόρφωσης πλάτους. Οι ασκήσεις αυτές αναφέρονται στην διαμόρφωση γωνίας (Angle Modulation), όσο και στις ειδικές περιπτώσεις της διαμόρφωσης συχνότητας (Frequency Modulation – FM),και την διαμόρφωσης φάσης (Phase Modulation – PM). Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι προτεινόμενες ασκήσεις αναφέρονται όχι μόνο στην ανάλυση σημάτων στο πεδίο του χρόνου, αλλά και στο πεδίο της συχνότητας, ώστε να δίνεται η δυνατότητα της πλήρους κατανόησης της διαδικασίας διαμόρφωσης γωνίας. Τέλος, τμήμα των ασκήσεων λαμβάνουν υπόψη την παρουσία θορύβου στα συστήματα διαμόρφωσης γωνίας, ώστε να γίνεται κατανοητή η επίδραση του θορύβου στα συστήματα αυτά.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 5-7: Διαμόρφωση γωνίας FM/PM

Άσκηση 1:

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το μπλοκ διάγραμμα ενός διαμορφωτή/πομπού FM ευρείας ζώνης:



1. Υπολογίστε την συχνότητα του φορέα και την μέγιστη απόκλιση συχνότητας Δf στα σημεία Β, Γ, Δ και Ε. Επίσης, βρείτε την συχνότητα f_T του τοπικού ταλαντωτή.
2. Αν το πληροφοριακό σήμα είναι ένα συνημίτονο, να βρείτε την συχνότητα που πρέπει να έχει το πληροφοριακό σήμα ώστε στο φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου φορέα FM στο σημείο Γ, να μην υπάρχει η συνιστώσα του φορέα. Σημειωτέον ότι στο σημείο Γ θέλουμε να έχουμε FM ευρείας ζώνης. Βρείτε κατάλληλο δείκτη διαμόρφωσης. Ο δείκτης διαμόρφωσης πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2 (όχι πολύ μεγάλος, αφού πρόκειται για μετατροπή από NBFM).
3. Για τον δείκτη διαμόρφωσης που υπολογίσατε στο σημείο Γ, να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους (απολύτου τιμής) του σήματος FM.
4. Ποιο είναι το εύρος ζώνης του σήματος στα σημεία Α και Ζ; Πόσες συνιστώσες συχνότητες έχουμε στα σημεία Α και Ζ σύμφωνα με τον κανόνα του Carson?
5. Αν A_c = 10 V είναι το πλάτος του φορέα για το σήμα NBFM, πόση είναι η ισχύς του σήματος FM που μεταδίδεται από τον πομπό (σημείο Ζ);

Λύση

Άσκηση 2:

Το πληροφοριακό σήμα cos(20πt) διαμορφώνει κατά FM τον φορέα $c(t)$=10cos2$\pi f_c t$. Ο συντελεστής διαμόρφωσης KFM ισούται με 50.

1. Πόσες αρμονικές πρέπει να επιλεγούν στο διαμορφωμένο σήμα FM, ώστε σ' αυτές να περιέχεται το 99% της ισχύος του διαμορφωμένου σήματος.
2. Ποιο είναι το εύρος ζώνης συχνοτήτων αυτού του σήματος FM;

Λύση

Άσκηση 3:

Το σήμα $m(t)$=10sinc(400t) διαμορφώνει κατά συχνότητα το φέρον σήμα $c(t)$=100cos(2π$f_c t$). Ο δείκτης διαμόρφωσης είναι 6.

1. Να βρείτε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος $u(t)$.
2. Ποια είναι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος;
3. Ποιο το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος;

Λύση

Άσκηση 4:

Ένα διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα έχει τη μορφή: $u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + 4\sin 2000\pi t\right]$, με f_c=10 MHz. Να υπολογιστούν:

1. Η μέση ισχύς του σήματος
2. Την μέγιστη απόκλιση φάσης
3. Την μέγιστη απόκλιση συχνότητας
4. Το παραπάνω σήμα είναι σήμα FM ή PM; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Άσκηση 5:

Βρείτε την μικρότερη τιμή του δείκτη διαμόρφωσης ενός συστήματος FM, το οποίο εγγυάται ότι όλη η ισχύς του διαμορφωμένου σήματος βρίσκεται στις πλευρικές ζώνες και δεν μεταδίδεται ισχύς στη φέρουσα συχνότητα.

Λύση

Άσκηση 6:

Το φέρον σήμα $c(t)=A\cos 2\pi 10^6 t$ διαμορφώνεται κατά γωνία (PM ή FM), από το σήμα $m(t)$=2cos2000πt, με K_p=1.5 και K_f=3000.

1. Υπολογίστε τις τιμές των β_f και β_p.
2. Υπολογίστε το εύρος ζώνης για κάθε περίπτωση (PM ή FM).
3. Σχεδιάστε το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος σε κάθε περίπτωση (μόνο τις συνιστώσες που βρίσκονται μέσα στο εύρος ζώνης, το οποίο έχει υπολογιστεί στο ερώτημα 2).
4. Εάν το πλάτος του σήματος m(t) μειωθεί στο μισό, τότε πως αλλάζουν οι απαντήσεις στα ερωτήματα 1-2;

Λύση

Άσκηση 7:

Ένα διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα έχει τη μορφή: $u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + 4\sin 1000\pi t\right]$, με f_c=10 MHz.

1. Αν το σήμα είναι διαμορφωμένο στη συχνότητα, βρείτε το δείκτη διαμόρφωσης και το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος.
2. Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα εάν η συχνότητα του σήματος βασικής ζώνης διπλασιαστεί.
3. Αν το σήμα είναι διαμορφωμένο στη φάση, βρείτε το δείκτη διαμόρφωσης και το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος.
4. Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα εάν η συχνότητα του σήματος βασικής ζώνης διπλασιαστεί.

Λύση

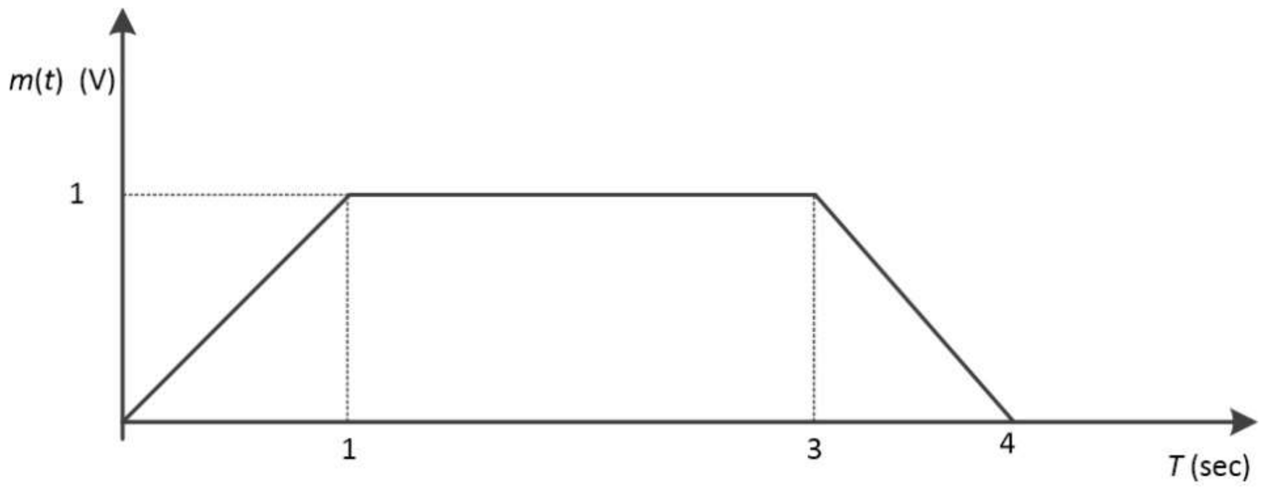
Άσκηση 8:

Ένα σήμα βασικής ζώνης $m(t)$ έχει εύρος ζώνης 10 KHz και μέγιστο πλάτος $|m(t)|$=1 V. Εκτιμήστε το εύρος ζώνης του σήματος $u(t)$ το οποίο προκύπτει όταν το $m(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα ένα φέρον σήμα με μέγιστη απόκλιση συχνότητας α) f_d=10 Hz/V, β) f_d=100 Hz/V, f_d=1000 Hz/V.

Λύση

Άσκηση 9:

Θεωρείται το σήμα $m(t)$:



1. Αν το σήμα $m(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα ένα φέρον με συχνότητα 10^6 Hz και K_f=5 Hz/V, ποια είναι η μέγιστη στιγμιαία συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος;

2. Αν το σήμα $m(t)$ διαμορφώνει κατά φάση ένα φέρον με συχνότητα 10^6 Hz και K_p=3 rad/V, ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη στιγμιαία συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος

Λύση

Άσκηση 10:

Ένας υπερετερόδυνος δέκτης FM λειτουργεί στην μπάντα συχνοτήτων 88-108 MHz. Οι συχνότητες IF και τοπικού ταλαντωτή είναι τέτοιες ώστε $f_{IF}<F_{LO}$, ενώ η συχνότητα f_c' βρίσκεται εκτός της ζώνης 88-108 MHz. Να καθοριστεί η μικρότερη τιμή της κατοπτρικής συχνότητας f_{IF}, καθώς και το εύρος της τιμής της συχνότητας f_{LO}.

Λύση

Άσκηση 11:

Ένα σήμα βασικής ζώνης μεταδίδεται με τη χρήση διαμόρφωσης φάσης. Το φέρον σήμα είναι το $A_m\cos(2\pi f_m t)$, ενώ η ευαισθησία φάσης του διαμορφωτή είναι k_p rad/V.

a) Δείξτε ότι εάν η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι πολύ μεγάλη (σε σχέση με 1 rad) τότε το εύρος ζώνης του σήματος PM μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα f_m.
b) Συγκρίνετε το παραπάνω χαρακτηριστικό στοιχείο της διαμόρφωσης PM με το αντίστοιχο της διαμόρφωσης FM.

Λύση

Άσκηση 12:

Ένα σήμα FM με απόκλιση συχνότητας 10 KHz και συχνότητα διαμόρφωσης 5 KHz οδηγείται σε δύο πολλαπλασιαστές συχνότητας, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Ο πρώτος πολλαπλασιάζει τη συχνότητα κατά 2, ενώ ο δεύτερος κατά 3. Καθορίστε την απόκλιση συχνότητας και το δείκτη διαμόρφωσης στην έξοδο του δεύτερου πολλαπλασιαστή. Ποιο είναι το εύρος των γειτονικών συχνοτήτων σε αυτό το σήμα;

Λύση

Άσκηση 13:

Δίνεται ότι το σήμα βασικής ζώνης είναι $m(t)=\sin(2000\pi t)$, ενώ k_f=200000π και k_p=10. Να βρεθούν:

α) το εύρος ζώνης των σημάτων διαμόρφωσης κατά συχνότητα και κατά φάση.

β) ομοίως, εάν το πλάτος του σήματος βασικής ζώνης διπλασιαστεί.

γ) ομοίως, εάν η συχνότητα του σήματος βασικής ζώνης διπλασιαστεί.

Λύση

Άσκηση 14:

Δίνεται ότι το σήμα βασικής ζώνης είναι $m(t)=e^{-t^2}$, ενώ f_c=10000 Hz, k_f=6000π και k_p=8000π.

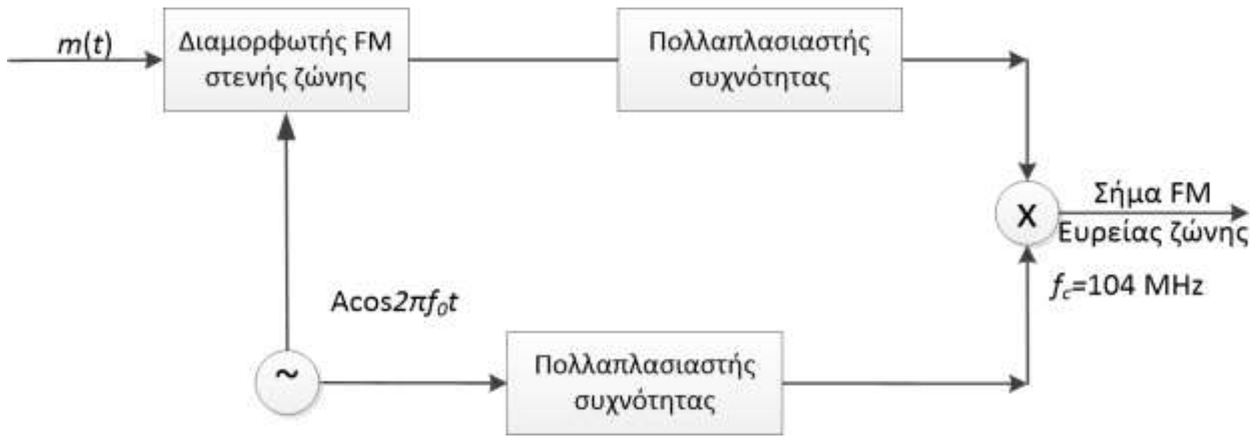
α) Να βρεθεί το Δf και η απόκλιση συχνότητας για FM και PM.

β) Να εκτιμηθεί το εύρος ζώνης για FM και PM (Συμβουλή: βρείτε το $M(\omega)$).

Λύση

Άσκηση 15:

Ένα σήμα FM ευρείας ζώνης μπορεί να δημιουργηθεί αρχικά δημιουργώντας ένα σήμα FM στενής ζώνης και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλασιαστή συχνότητας να διευρύνει το εύρος ζώνης του σήματος (διαμορφωτής FM Armstrong), όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το σήμα στενής ζώνης έχει μέγιστη απόκλιση γωνίας 0,10 radians.



Εάν το σήμα βασικής ζώνης έχει εύρος ζώνης 15 KHz και f_0=100 KHz, καθορίστε την τιμή του πολλαπλασιαστή συχνότητας, ώστε να δημιουργηθεί σήμα με συχνότητα f_c=104 MHz και απόκλιση συχνότητας 75 KHz.

Λύση

Άσκηση 16:

Έστω δύο σήματα βασικής ζώνης $m_1(t)$ και $m_2(t)$ που δίνουν δύο διαμορφωμένα σήματα $u_1(t)$ και $u_2(t)$. Να αποδειχθεί ότι η διαμόρφωση του αθροίσματος των δύο σημάτων $m_1(t) + m_2(t)$ κατά DSB δίνει διαμορφωμένο σήμα, το οποίο είναι το άθροισμα των διαμορφωμένων σημάτων $u_1(t) + u_2(t)$, αν η DSB εφαρμοζόταν ξεχωριστά στα 2 σήματα βασικής ζώνης. Να δείξετε ότι δεν ισχύει το ίδιο για την περίπτωση διαμόρφωσης κατά συχνότητα.

Λύση

Άσκηση 17:

Σε ένα αναλογικό σύστημα επικοινωνιών, κέρδος αποδιαμόρφωσης ορίζεται ως ο λόγος του SNR στην έξοδο του αποδιαμορφωτή, προς το SNR στην έξοδο του φίλτρου απομάκρυνσης θορύβου στο έμπροσθεν τμήμα του δέκτη. Βρείτε την έκφραση του κέρδους αποδιαμόρφωσης για τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. AM-DSB
2. AM-SSB
3. AM με δείκτη διαμόρφωσης α. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του κέρδους αποδιαμόρφωσης;
4. FM με δείκτη διαμόρφωσης $\beta_{f.}$
5. PM με δείκτη διαμόρφωσης β_P.

Λύση

Άσκηση 18:

Ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι έχει εύρος ζώνης 100 KHz και χρησιμοποιείται για την μετάδοση ενός σήματος βασικής ζώνης $m(t)$, με $|m(t)|<1$ και εύρος ζώνης 4 KHz. Το περιεχόμενο ισχύος σε αυτή την περίπτωση είναι 0.1W.

1. Βρείτε το λόγο του SNR ενός συστήματος FM που χρησιμοποιεί όλο το εύρος ζώνης, προς το SNR ενός συστήματος AM με δείκτη διαμόρφωσης α=0.85.
2. Εάν θεωρηθούν δύο συστήματα, ένα FM και ένα PM με τον ίδιο SNR εξόδου, τότε δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{BW_{PM}}{BW_{FM}} = \frac{\sqrt{3}\beta_f + 1}{\beta_f + 1}$$

Λύση

Άσκηση 19:

Το κανονικοποιημένο σήμα μηνύματος $m_n(t)$ έχει εύρος ζώνης 5000 Hz και ισχύ 0.1 W, ενώ το κανάλι μετάδοσης έχει εύρος ζώνης 100 KHz και εξασθένηση 80 dB. Θεωρείται η ύπαρξη λευκού θορύβου με πυκνότητα φασματικής ισχύος 0.5×10^{-12} W/Hz, ενώ η ισχύς μετάδοσης είναι 10 KW.

1. Εάν θεωρηθεί σύστημα AM με α=0.8, ποιος ο λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο του;
2. Εάν θεωρηθεί σύστημα FM, ποια είναι η μέγιστη τιμή του λόγου σήματος προς θόρυβο στην έξοδό του;

Λύση

Άσκηση 20:

Θεωρείστε ένα σύστημα διαμόρφωσης PM, στο οποίο το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_p m(t)\right]$$

όπου $m(t)$ είναι το σήμα βασικής ζώνης. Ο προσθετικός θόρυβος $n(t)$ στην είσοδο του αποδιαμορφωτή έχει τη μορφή:

$$n(t) = n_1(t)\cos\left[2\pi f_c t\right] - n_Q(t)\sin\left[2\pi f_c t\right]$$

Θεωρώντας ότι ο λόγος του φέροντος προς θόρυβο είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τη μονάδα, να καθορίσετε:

α) το λόγο σήματος προς θόρυβο στην έξοδο

β) το συντελεστή κέρδους του συστήματος.

Λύση

Άσκηση 21:

Θεωρείτε ένα κανονικοποιημένο σήμα βασικής ζώνης με εύρος ζώνης 8 KHz και ισχύ P_m=0.5, το οποίο θα μεταδοθεί σε κανάλι με εύρος ζώνης 60 KHz και εξασθένιση 40 dB. Ο θόρυβος του καναλιού είναι λευκός με πυκνότητα φασματικής ισχύος $N_0/2=10^{-12}$ W/Hz. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί διαμορφωτής συχνότητας. Αν απαιτείται τελικό SNR=40 dB στο δέκτη, ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ισχύς μετάδοσης και ποιος ο δείκτης διαμόρφωσης;

Λύση

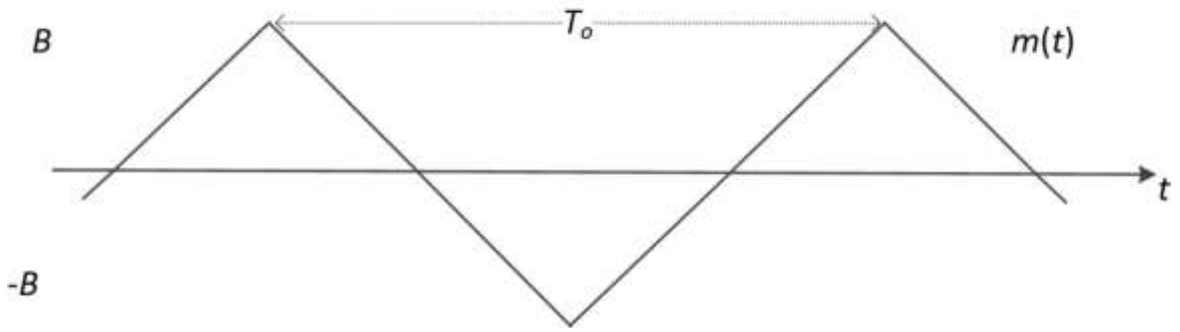
Άσκηση 22:

Για την περίπτωση του διαμορφωτή της Άσκησης 21, ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ισχύς μετάδοσης και ποιος ο δείκτης διαμόρφωσης, αν απαιτείται τελικό SNR=60 dB στο δέκτη;

Λύση

Άσκηση 23:

Για το σήμα βασικής ζώνης που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα να δείξετε ότι η διαμόρφωση PM υπερέχει σε σχέση με την διαμόρφωση FM κατά $3\pi^2/4$, όσον αφορά το SNR (Συμβουλή: θεωρείστε ότι το εύρος ζώνης του σήματος βασικής ζώνης είναι η συχνότητα της τρίτης αρμονικής του).



Λύση

Άσκηση 24:

Για το σήμα βασικής ζώνης $m(t) = a_1 \cos[\omega_1 t] + a_2 \cos[\omega_2 t]$ να δείξετε ότι η διαμόρφωση PM υπερέχει σε σχέση με την διαμόρφωση FM όσον αφορά το SNR όταν $(1+xy)^2 > (1+x)^2 / 3$ με $x = a_1 / a_2$, $y = \omega_1 / \omega_2$ (Συμβουλή: χρησιμοποιήστε τη σχέση $(S/N)_{PM} = (2\pi B)^2 m_p^2$ και $(S/N)_{FM} = 3m'^2_p$)

Λύση

4. Λύσεις των ασκήσεων

Άσκηση 1

1. $f_B = f_A$ = 200 kHz
   $\Delta f_B = \Delta f_A$ = 25 Hz

   $f_\Gamma = 64*f_B$ = 64*200 kHz = 12.8 MHz
   $\Delta f_\Gamma = 64*\Delta f_B$ = 64*25 kHz = 1.6 kHz

   $f_E = f_Z$= 91.2 MHz
   $\Delta f_E = \Delta f_Z$ = 76.8 kHz

   $f_\Delta = f_E$: 48 = 91.2 : 48 = 1.9 MHz
   $\Delta_{f}\_\Delta = \Delta f_E$: 48 = 76.8 : 48 = 1.6 kHz

   Ο μείκτης θα μεταθέσει την f_Γ = 12.8 MHz στην f_Δ = 1.9 MHz. Άρα θα έχει συχνότητα:
   f_T = 10.9 MHz ή f_T = 14.9 MHz

2. Από την γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessels, βρίσκουμε ότι ένας εφικτός δείκτης διαμόρφωσης (που ικανοποιεί το κριτήριο της μη μετάδοσης του φορέα) είναι β = 2.41. Επομένως, $\beta = \Delta f_\Gamma / f \Rightarrow f = \Delta f_\Gamma / \beta \Rightarrow f$ = 1.600 kHz / 2.41 = 663.9 Hz

3. Για β=2.41 το εύρος ζώνης του σήματος FM σύμφωνα με τον κανόνα του Carson είναι: $B = 2*W*(\beta+1)$, όπου $W=f$=663,9 Hz.
   Ο αριθμός των αρμονικών που παίζουν ρόλο στο εύρος ζώνης υπολογίζονται για $n=\beta+1$=3,41 ~ 4, δηλ, είναι 4 πάνω από την συχνότητα του φορέα f_c και άλλες 4 κάτω από την συχνότητα του φορέα f_c.
   Οι τιμές των συναρτήσεων Bessel, όπως προκύπτει από το σχετικό διάγραμμα, είναι:
   J_0(2,41) = 0 για την συχνότητα f_c.
   J_1(2,41) = 0,52 για f_c + 663,9 Hz
   J_2(2,41) = 0,44 για f_c + 2*663,9 Hz
   J_3(2,41) = 0,22 για f_c + 3*663,9 Hz
   J_4(2,41) = 0.08 για f_c + 4*663,9 Hz
   Επομένως $B = 8f$ = 8*663,9 Hz =5311,2 Hz.
   Ή
   $B=2\pi 8f$= 2π*5311,2 rads = 33354,336 rads.

4. Το εύρος ζώνης στο σημείο Α είναι:
   $B_A = 2*f$ (όπου f η μέγιστη συχνότητα του πληροφοριακού σήματος) δεδομένου ότι στο σημείο Α έχουμε FM στενής ζώνης (NBFM). Αν το πληροφοριακό σήμα ήταν ένα απλό συνημίτονο, τότε θα είχαμε 3 συνιστώσες: f_c, $f_c + f$ και $f_c - f$.
   Στο σημείο Ζ, όπου έχουμε FM ευρείας ζώνης, σύμφωνα με τον Carson έχουμε:

B_Z = 2*f(β+1).
Και ο αριθμός συνιστωσών συχνοτήτων είναι B_Z/f + 1

5. Ισχύς = 50 Watt (θεωρώντας αντίσταση 1 Ohm).

Άσκηση 2:

1. 6 αρμονικές γύρω από τον φορέα,
διότι 50*[($J\_0(\beta)$)**2 + 2*Σ($J\_n(\beta)$)**2]] >= 50*0,99
και για να ισχύει η ανισότητα αυτή το άθροισμα Σ πρέπει να περιλαμβάνει 6 όρους. Δηλ. n = 1,2, ...,6.
Το σύνολο των αρμονικών είναι 13: 6 αρμονικές δεξιά της συχνότητας του φορέα, 6 αρμονικές αριστερά της συχνότητας του φορέα, και η συχνότητα του φορέα.
Απόδειξη: Αφού το πλάτος του φορέα είναι 10, Ισχύς= 10**2 /2 = 50.
Ο δείκτης διαμόρφωσης β= (K_{FM}*max|$s(t)$|)/10= 50*1/10 = 5
$f_{FM}(t)$=10*Σ $J_n(\beta)$ cos(ω_c+$n\omega$)t
όπου το άθροισμα είναι απείρων όρων, και ζητείται να το περιορίσουμε σε τόσους όρους ώστε να "μαζέψουμε" τουλάχιστον το 99% της ισχύος του, δηλ. 50*0,99=49,5 μον. ισχύος.
Από την έκφραση αυτή του $f_{FM}(t)$, με τους συντελεστές Bessels, υπολογίζουμε την ισχύ ως:
50[($J_0(\beta)$)**2 + 2*Σ($J_n(\beta)$)**2]] όπου το άθροισμα είναι απείρων όρων. Αυτό το άθροισμα να περιοριστεί ώστε η ισχύς του σήματος να είναι: 50*[($J_0(\beta)$)**2 + 2*Σ($J_n(\beta)$)**2]] >= 49,5
Από τους πίνακες Bessels για β=5 υπολογίζουμε:
50*[(0,1776)**2 + 2*(0,3276)**2 + 2*(0,04657)**2 + 2*(0,3648)**2 + 2*(0,3912)**2 + 2*(0,2611)**2 + 2*(0,1310)**2]= 50*[0,03154176 + 2*0.10732176 + 2*0,0021687649 + 2*0,13307904 + 2*0.15303744 + 2*0,06817321 + 2*0,017161]=49,6712 > 49,5
Δηλ. πήραμε εκτός από τον όρων $J_0(5)$ που αντιστοιχεί στην συχνότητα του φορέα, και 6 ακόμη αρμονικές, γύρω από τον φορέα.

2. 120 Hz (Εκτείνεται από f_c - 6*10 Hz μέχρι f_c + 6*10 Hz)

Άσκηση 3:

1. Ο δείκτης διαμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\beta_f = \frac{k_f \max[|m(t)|]}{W} \Leftrightarrow 6 = \frac{k_f 10}{W},$$

όπου W είναι το εύρος ζώνης του σήματος $m(t)$ και μπορεί να υπολογιστεί από τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $m(t)$:

$\mathbb{F}\left[\mathrm{sin}c(400t)\right] = \frac{1}{400}\prod\left(\frac{f}{400}\right)$, επομένως το εύρος ζώνης είναι 200. Άρα, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι k_f=120.

2. Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι: $\Delta f_{\max} = \beta_f W = 1200$
3. Προκύπτει ότι: $B_c = 2(\beta_f + 1)W = 2800$ Hz.

<u>Άσκηση 4</u>:

1. Καθώς πρόκειται για διαμόρφωση γωνίας, το σήμα ουσιαστικά είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με σταθερό πλάτος A_c, οπότε η μέση ισχύς είναι:
$P = \frac{A_c^2}{2} = \frac{100^2}{2} = 5000$
2. Η μέγιστη απόκλιση φάσης μπορεί να βρεθεί από την έκφραση:
$\Delta\varphi_{\max} = \max|4\sin(2000\pi t)| = 4$
3. Η στιγμιαία συχνότητα μπορεί να βρεθεί από την έκφραση:
$f_i = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f_c + \frac{4}{2\pi}\cos(2000\pi t)2000\pi = f_c + 4000\cos(2000\pi t)$
Οπότε, η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι:
$\Delta f_{\max} = \max|f_i - f_c| = 4000$
4. Το σήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι είτε FM είτε PM. Είναι ένα FM σήμα με σταθερά k_f=4000 και σήμα πληροφορίας $m(t)$=cos(2000πt), ή ένα PM σήμα με σταθερά k_p=4 και σήμα πληροφορίας $m(t)$=sin(2000πt).

<u>Άσκηση 5</u>:

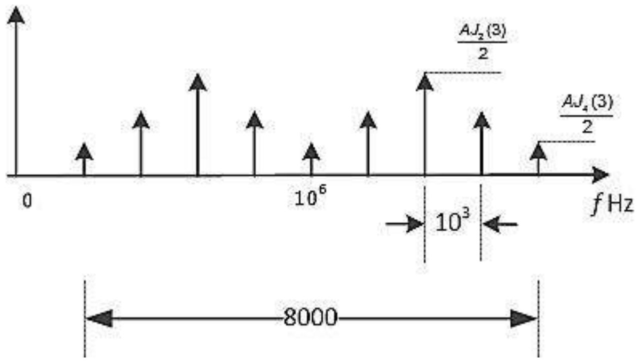
Η ισχύς στην k-οστή συνιστώσα $f = f_c + kf_m$ δίνεται από τη σχέση: $P_k = \frac{A_c^2}{2}J_n^2(\beta)$. Άρα, αν η ισχύς στο φορέα είναι μηδέν, τότε θα πρέπει να ισχύει: $J_0^2(\beta) = 0$. Από τους πίνακες των συναρτήσεων Bessel προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του δείκτη διαμόρφωσης είναι 2.404.

<u>Άσκηση 6</u>:

1. Ισχύει: $\beta_p = k_p \max[|m(t)|] = 3$, και $\beta_f = \frac{k_f \max[|m(t)|]}{f_m} = \frac{3000 \times 2}{1000} = 6$
2. Ισχύει: $B_{\mathrm{PM}} = 2(\beta_p + 1)f_m = 8000$ και $B_{FM} = 2(\beta_f + 1)f_m = 14000$
3. Το σήμα PM έχει την έκφραση:

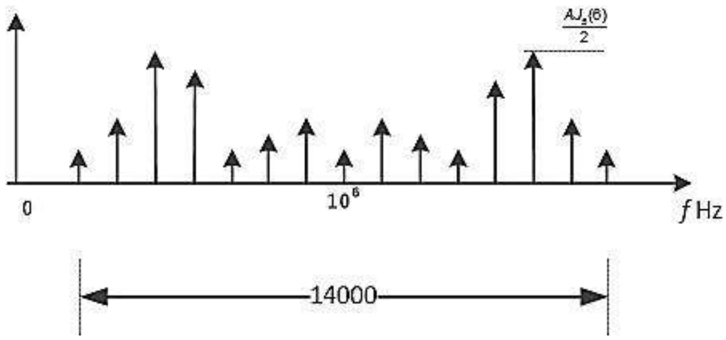
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} AJ_n\left(\beta_p\right)\cos\left(2\pi(10^6 + n10^3)t\right)$$

Καθώς θέλουμε να σχεδιάσουμε το φάσμα μέσα στο εύρος ζώνης των 8000, και ενώ ισχύει $J_0(3) = -.2601$, $J_1(3) = 0.3391$, $J_2(3) = 0.4861$, $J_3(3) = 0.3091$ and $J_4(3) = 0.1320$, το φάσμα θα είναι:



Για την περίπτωση του σήματος FM, το οποίο έχει την έκφραση:

$u(t) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2000\pi t)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} AJ_n\left(6\right)\cos\left(2\pi(10^6 + n10^3)t + \varphi_n\right)$, το φάσμα είναι:



4. Αν το πλάτος γίνει ίσο με ένα, τότε οι νέες τιμές θα είναι:

$$\beta_p = k_p \max[|\,m(t)\,|] = 1.5 \text{ , και } \beta_f = \frac{k_f \max[|\,m(t)\,|]}{f_m} = \frac{3000}{1000} = 3$$

$$B_{\mathrm{PM}} = 2(\beta_p + 1)f_m = 5000 \text{ και } B_{FM} = 2(\beta_f + 1)f_m = 8000$$

<u>Άσκηση 7</u>:

1. Το διαμορφωμένο σήμα FM έχει έκφραση:

   $$u(t) = 100\cos\left[2\pi f_c t + \frac{K_f \alpha}{f_m}\sin 2\pi f_m t\right]$$

   Με f_m =1000 η συχνότητα του σήματος βασικής ζώνης. Αν συγκρίνουμε την παραπάνω έκφραση με την έκφραση της εκφώνησης της άσκησης, τότε προκύπτει ότι ο δείκτης διαμόρφωσης β_f είναι 4.

   Άρα, το εύρος ζώνης είναι $B_{FM} = 2(\beta_f + 1)f_m = 10000$ Hz.

2. Αν διπλασιαστεί η f_m, τότε ο δείκτης διαμόρφωσης θα παραμείνει ο ίδιος και ίσος με 4, ενώ το εύρος ζώνης θα διπλασιαστεί και θα γίνει 20000 Hz.
3. Αν το σήμα είναι διαμορφωμένο κατά PM τότε θα έχει μέγιστη μετατόπιση φάσης:

$\beta_p = \Delta\varphi_{\max} = \max|4\sin(2000\pi t)| = 4$

Και το εύρος ζώνης θα είναι $B_{\mathrm{PM}} = 2(\beta_p + 1)f_m = 10000$

4. Αν διπλασιαστεί η συχνότητα f_m, τότε ο δείκτης διαμόρφωσης θα παραμείνει ο ίδιος, ενώ το εύρος ζώνης θα διπλασιαστεί.

Άσκηση 8:

Με τη χρήση του κανόνα του Carson, προκύπτει ότι:

$$B_{FM} = 2(\beta_f + 1)W = 2(\frac{k_f \max||m(t)||}{W} + 1)W$$

Άρα, για τις τρεις τιμές της παραμέτρου k_f, το εύρος ζώνης είναι αντίστοιχα 20020. 20200 και 22000 Hz.

Άσκηση 9:

1. Η στιγμιαία συχνότητα είναι: $f_\iota(t) = f_c + k_f m(t)$. Άρα η μέγιστη τιμή είναι: $\max|f_\iota(t)| = \max|f_c + k_f m(t)| = 1.5$ MHz
2. Η στιγμιαία συχνότητα είναι: $f_\iota(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\varphi(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t)$. Άρα η μέγιστη τιμή θα λαμβάνεται όταν $\frac{d}{dt}m(t) = 1$, για $t \in [0,1]$. Άρα, $\max|f_\iota(t)| = 10^6 + \frac{3}{2\pi}$ Hz.

Άσκηση 10:

Καθώς 88 MHz <f_c < 108 MHz, και εφόσον f_{IF}<f_{LO}, τότε:

$$|f_c - f_c'| = 2f_{IF}$$

Επομένως, για να είναι η κατοπτρική συχνότητα εκτός των ορίων των 88 και 108 MHz, πρέπει η ελάχιστη συχνότητα f_{IF} να ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f_{IF} = 108 - 88 \Rightarrow f_{IF} = 10 \text{ MHz}$$

Και για αυτή τη συχνότητα, προκύπτει ότι το εύρος της συχνότητας f_{LO} είναι

|88+10,108+10|=|98,118| MHz

Άσκηση 11:

a) Η γωνία του σήματος PM είναι:

$$\theta_i\left(t\right) = 2\pi f_c t + k_p m(t) = 2\pi f_c t + k_p A_m \cos(2\pi f_m t) =$$
$$= 2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)$$

Όπου $\beta_p = k_p A_m$. Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος PM είναι:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt} = f_c - \beta_p f_m \sin(2\pi f_m t)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας σε ένα σήμα PM μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα f_m.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Carson, βρίσκουμε ότι το εύρος ζώνης του σήματος PM είναι προσεγγιστικά ίσο με (λαμβάνοντας υπόψη ότι β>>1):

$$B_T = 2\left(f_m + \beta_p f_m\right) = 2f_m\left(1+\beta_p\right) \approx 2f_m\beta_p$$

β) Σε ένα σήμα FM, το εύρος ζώνης του σήματος είναι περίπου ίσο με 2Δf, εάν β>>1. Επομένως στην FM, το εύρος ζώνης είναι ανεξάρτητο της συχνότητας του φέροντος, σε αντίθεση με την PM, όπως προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα.

Άσκηση 12:

Η συχνότητα στην έξοδο του δεύτερου πολλαπλασιαστή έχει αυξηθεί κατά n=2x3=6. Θεωρώντας την στιγμιαία συχνότητα του σήματος FM στην είσοδο του πρώτου πολλαπλασιαστή είναι:

$$f_{i1}(t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$$

Ενώ στην έξοδο του δεύτερου πολλαπλασιαστή:

$$f_{i2}(t) = nf_c + n\Delta f \cos(2\pi f_m t)$$

Επομένως, η απόκλιση συχνότητας του νέου σήματος FM είναι:

$$n\Delta f = 6x10 = 60$$

Και ο δείκτης διαμόρφωσης:

$$\frac{n\Delta f}{f_m} = \frac{60}{5} = 12$$

Το εύρος μεταξύ δύο γειτονικών συχνοτήτων σε αυτό το σήμα δεν έχει μεταβληθεί, και επομένως παραμένει ίσο με 5 KHz.

Άσκηση 13:

α) για την περίπτωση της FM:

$\Delta f = \frac{k_p m_p}{2\pi} = 100$ KHz , ενώ το εύρος ζώνης είναι: $B = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1$ KHz , οπότε
$B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 202$ KHz

Για την PM:

$$\Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi} = \frac{10x2000\pi}{2\pi} = 10 \text{ KHz} \text{ και } B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 22 \text{ KHz}$$

β) προκύπτει ότι $m(t)$= 2sin2000πt, και B=1 KHz, ενώ m_p=2 και m'_p=4000π. Άρα, για την FM:

$\Delta f = \frac{k_p m_p}{2\pi} = 200$ KHz , $B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 402$ KHz , και για την PM:

$$\Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi} = \frac{10x4000\pi}{2\pi} = 20 \text{ KHz} \text{ και } B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 42 \text{ KHz}$$

γ) προκύπτει ότι $m(t)$= sin4000πt, και B=2 KHz, ενώ m_p=1 και m'_p=4000π. Άρα, για την FM:

$\Delta f = \frac{k_p m_p}{2\pi} = 100$ KHz , $B_{FM} = 2(\Delta f + B) = 204$ KHz , και για την PM:

$$\Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi} = \frac{10x4000\pi}{2\pi} = 20 \text{ KHz} \text{ και } B_{PM} = 2(\Delta f + B) = 44 \text{ KHz}$$

Άσκηση 14:

Ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $m(t) = e^{-t^2}$ είναι $M(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$, του οποίου το εύρος ζώνης στα 3 dB είναι 1,178 rad/sec=0.187 Hz, επομένως το εύρος ζώνης είναι αμελητέο σε σχέση με το Δf. Επίσης, $\dot{m}(t) = -2te^{-t^2/2}$ με $M'(\omega) = j\omega M(\omega) = j\sqrt{\pi}\omega e^{-\omega^2/4}$ όπου το εύρος ζώνης είναι επίσης αμελητέο σε σχέση με το Δf.

Για την FM:

$\Delta f = \frac{k_p m_p}{2\pi} = \frac{6000\pi}{2\pi} = 3$ KHz , $B_{FM} \approx 2\Delta f = 6$ KHz

Για την PM, πρέπει αρχικά να βρεθεί το m'_p:

$\ddot{m}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $m'_p = \dot{m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.858$, άρα:

$$\Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi} = 3,432 \text{ KHz} \text{ και } B_{PM} \approx 2\Delta f = 6,864 \text{ KHz}$$

Άσκηση 15:

Εάν η έξοδος του διαμορφωτή στενής ζώνης είναι $u(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ τότε μετά τον άνω πολλαπλασιαστή προκύπτει το σήμα:

$$u_1(t) = A\cos(2\pi n_1 f_0 t + n_1\varphi(t))$$

Ενώ η έξοδος του κάτω πολλαπλασιαστή είναι $u_2(t) = A\cos(2\pi n_2 f_0 t)$. Η μίξη των δύο αυτών σημάτων δίνει το σήμα:

$$\begin{aligned} y(t) &= A^2\cos(2\pi n_1 f_0 t + n_1\varphi(t))\cos(2\pi n_2 f_0 t) = \\ &= \frac{A^2}{2}\left(\cos(2\pi(n_1+n_2)f_0 t + n_1\varphi(t)) + \cos(2\pi(n_1-n_2)f_0 t + n_1\varphi(t))\right) \end{aligned}$$

Το εύρος ζώνης του σήματος είναι 15 KHz, οπότε η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι Δf=1.5 KHz. Για να επιτευχθεί απόκλιση συχνότητας f=75 KHz, η τιμή του άνω πολλαπλασιαστή θα πρέπει να είναι:

$$n_1 = \frac{f}{\Delta f} = 50$$

Απομακρύνοντας τον δεύτερο όρο του παραπάνω σήματος (με τη βοήθεια ενός up-converter), το διαμορφωμένο σήμα είναι $y(t) = \frac{A^2}{2}\left(\cos(2\pi(n_1+n_2)f_0 t + n_1\varphi(t))\right)$. Επίσης, καθώς η συχνότητα εξόδου του συστήματος πρέπει να είναι 104 MHz, θα πρέπει να ισχύει:

$$\left(n_1 + n_2\right)100 = 104000 \Leftrightarrow n_2 = 990$$

Άσκηση 16:

α) για την περίπτωση της διαμόρφωσης κατά DSB, το διαμορφωμένο σήμα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) = A_c\left(m_1(t) + m_2(t)\right)\cos(2\pi f_c t) = \\ &= A_c\left(m_1(t)\right)\cos(2\pi f_c t) + A_c\left(m_2(t)\right)\cos(2\pi f_c t) = u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

β) για την περίπτωση της διαμόρφωσης κατά συχνότητα:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c\cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{\infty}\left(m_1(t) + m_2(t)\right)dt) \\ &\neq A_c\cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{\infty}\left(m_1(t)\right)dt) + A_c\cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{\infty}\left(m_2(t)\right)dt) \end{aligned}$$

Άσκηση 17:

1. Στην περίπτωση της AM-DSB, η έξοδος του φίλτρου απομάκρυνσης θορύβου είναι:

   $$r(t) = u(t) + n(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

   Η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος είναι $P_s = \frac{A_c^2}{2} P_m$, ενώ η ισχύς του θορύβου είναι P_n. Άρα το SNR στην έξοδο του φίλτρου είναι:

   $$\left(\frac{S}{N}\right)_{filter} = \frac{A_c^2 P_m}{2P_n}$$

   Θεωρώντας ένα σύγχρονο αποδιαμορφωτή, του οποίου η έξοδος είναι:

   $$y(t) = \frac{1}{2}[A_c m(t) + n_c(t)]$$

   Η ισχύς του σήματος εξόδου είναι $P_o = \frac{A_c^2}{4} P_m$, ενώ η ισχύς του θορύβου στην έξοδο είναι:

   $P_{n,o} = \frac{P_n}{4}$, οπότε $\left(\frac{S}{N}\right)_{dem} = \frac{A_c^2 P_m}{P_n}$

   Επομένως, το κέρδος αποδιαμόρφωσης είναι $\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{filter}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{dem}} = 2$

2. Στην περίπτωση της AM-SSB, η έξοδος του φίλτρου απομάκρυνσης θορύβου είναι:

   $$r(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) + n(t)$$

   Η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος είναι $P_s = A_c^2 P_m$, ενώ η ισχύς του θορύβου είναι P_n. Θεωρώντας ένα σύγχρονο αποδιαμορφωτή, του οποίου η έξοδος είναι:

   $$y(t) = \frac{1}{2}[A_c m(t) + n_c(t)]$$

   Προκύπτει ότι $P_o = \frac{A_c^2}{4} P_m$ και $P_{n,o} = \frac{1}{4} P_n$

   Επομένως, το κέρδος αποδιαμόρφωσης είναι $\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{filter}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{dem}} = 1$

3. Στην περίπτωση του κλασσικού AM η έξοδος του φίλτρου είναι:

   $$r(t) = \left[A_c\left(1 + \alpha m(t)\right) + n_c(t)\right]\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

   Η συνολική ισχύς του σήματος εισόδου είναι:

   $$P_s = \frac{A_c^2}{2}\left(1 + \alpha^2 P_{M_n}\right)$$

Επομένως, το κέρδος αποδιαμόρφωσης είναι $\dfrac{\left(\frac{S}{N}\right)_{filter}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{dem}} = \dfrac{2\alpha^2 P_{M_n}}{1+\alpha^2 P_{M_n}}$

Το οποίο γίνεται μέγιστο για a=1.

4. Για το σύστημα FM, η έξοδος του φίλτρου είναι:

   $r(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) + n(t)$

   Η ισχύς του σήματος εισόδου είναι $P_s = \dfrac{A_c^2}{2}$, ενώ η ισχύς του θορύβου στο φίλτρο είναι:

   $P_{n,filter} = \dfrac{N_0}{4} 2B_c = N_0 2\left(\beta_f + 1\right)W$,

   Όπου Bc είναι το εύρος ζώνης του σήματος εισόδου στο φίλτρο και W το εύρος ζώνης του σήματος βασικής ζώνης. Επομένως ο SNR στο φίλτρο είναι:

   $$\left(\frac{S}{N}\right)_{filter} = \frac{A_c^2}{4N_0\left(\beta_f + 1\right)W}$$

   Και ο SNR στον αποδιαμορφωτή είναι

   $$\left(\frac{S}{N}\right)_{dem} = \frac{3k_f^2 A_c^2 P_M}{2N_0 W}$$

   Οπότε το κέρδος του αποδιαμορφωτή είναι:

   $$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{filter}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{dem}} = \ldots = 6\beta_f^2\left(\beta_f + 1\right)P_{M_n}$$

5. Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, στην PM έχουμε:

   $$\left(\frac{S}{N}\right)_{filter} = \frac{A_c^2}{4N_0\left(\beta_f + 1\right)W}$$ και

   $$\left(\frac{S}{N}\right)_{dem} = \frac{k_f^2 A_c^2 P_M}{2N_0 W}$$

   Οπότε το κέρδος του αποδιαμορφωτή είναι:

   $$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{filter}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{dem}} = \ldots = 2\beta_f^2\left(\beta_f + 1\right)P_{M_n}$$

<u>Άσκηση 18</u>:

1. Για το σύστημα FM που χρησιμοποιεί όλο το εύρος ζώνης, ισχύει:

$B = 2(\beta_f + 1)W \Leftrightarrow \beta_f = 11.5$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FM} = 3\frac{A_c^2}{2}\left(\frac{\beta_f}{\max\|m(t)\|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W} = 3\frac{A_c^2}{2}\beta_f{}^2 \frac{P_M}{N_0 W}$$

Ενώ για το σύστημα AM:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{AM} = \frac{A_c^2}{2}\alpha^2 \frac{P_{M_n}}{N_0 W}$$

Άρα $\dfrac{\left(\frac{S}{N}\right)_{FM}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{AM}} = \dfrac{3\beta_f^2}{\alpha^2} = 549{,}139 \sim 27{,}4dB$

2. Εφόσον τα δύο συστήματα έχουν το ίδιο SNR, προκύπτει ότι $\left(\frac{S}{N}\right)_{AM} = \left(\frac{S}{N}\right)_{FM}$. Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση τις εκφράσεις για το SNR των δύο συστημάτων από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει η σχέση της εκφώνησης.

Άσκηση 19:

1. Η ισχύς του σήματος λήψης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:
   $10\log\frac{P_T}{P_R} = 80 \Leftrightarrow P_R = 10^{-4}$ Watts ,άρα
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2 P_{M_n}}\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{\alpha^2 P_{M_n}}{1+\alpha^2 P_{M_n}}\frac{P_R}{N_0 W}$$
   Όπου P_{Mn}=0.1 και α=0.8, οπότε
   $\left(\frac{S}{N}\right)_o = 1204 \sim 30{,}8dB$
2. $B = 2(\beta_f + 1)W \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \beta_f = 9$,
   Άρα $\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta_f^2 0.1\left(\frac{S}{N}\right)_b = 486000 \approx 58.86dB$

Άσκηση 20:

α) Με τη βοήθεια της θεωρίας μπορούμε να εκφράσουμε το σήμα εισόδου στον αποδιαμορφωτή ως:

$v(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \theta(t)\right]$

όπου $\theta(t) = k_p m(t) + \dfrac{n_Q(t)}{A_c}$

επομένως, η έξοδος του ανιχνευτή φάσης θα είναι:

$$y(t) = k_p m(t) + \frac{n_Q(t)}{A_c}$$

Η συνιστώσα του παραπάνω σήματος που περιέχει το σήμα βασικής ζώνης είναι $k_p m(t)$. Επομένως, η μέση ισχύς του σήματος εξόδου θα είναι $k_p^2 P$, όπου P είναι η ισχύς του σήματος βασικής ζώνης. Καθώς το σήμα εισόδου περνά από ζωνοπερατό φίλτρο με εύρος ζώνης W (ίσο με το εύρος ζώνης του σήματος βασικής ζώνης), η μέση ισχύς του θορύβου θα είναι $2WN_0 / A_c^2$. Επομένως, ο λόγος σήματος προς θόρυβο θα είναι:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{k_p^2 P A_c^2}{2WN_0}$$

β) Σε ένα σύστημα PM, ο λόγος σήματος προς θόρυβο του καναλιού είναι:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{A_c^2}{2WN_0}$$

Επομένως, ο συντελεστής κέρδους είναι $k_p^2 P$.

Άσκηση 21:

Αρχικά ελέγχουμε εάν το εύρος ζώνης ή η τιμή του SNR δημιουργεί περιορισμούς στην τιμή του δείκτη διαμόρφωσης. Από τον κανόνα του Carson προκύπτει ότι:

$$B_c = 2(\beta + 1)W \Leftrightarrow \beta = 2.75$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 60\beta^2\left(\beta + 1\right)P_m$$

Προκύπτει από τα δεδομένα της άσκησης ότι β=6.61.

Καθώς υπάρχει περιορισμός στο εύρος ζώνης, επιλέγουμε β=2.75. Επομένως,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 3\beta^2\left(\beta + 1\right)\left(\frac{S}{N}\right)_b \Leftrightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_b = 881.542$$, άρα

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 W} \Leftrightarrow P_R = 1.41 \times 10^{-5}$$

Επειδή η εξασθένιση του καναλιού είναι 40 dB, τότε

$$P_T = 10^4 P_R = 0.141 \text{ Watts}$$

Άσκηση 22:

Εάν η ελάχιστη τιμή του SNR αυξηθεί σε 60 dB, τότε η τιμή του δείκτη διαμόρφωσης παραμένει η ίδια, ενώ από τη σχέση:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 60\beta^2\left(\beta+1\right)P_m$$

Προκύπτει από τα δεδομένα της άσκησης ότι β=31.85.

Καθώς υπάρχει περιορισμός στο εύρος ζώνης, επιλέγουμε β=2.75. Επομένως,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 3\beta^2\left(\beta+1\right)\left(\frac{S}{N}\right)_b \Leftrightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_b = 88154 \text{ , άρα}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 W} \Leftrightarrow P_R = 14.1\times10^{-4}$$

Επειδή η εξασθένιση του καναλιού είναι 40 dB, τότε

$$P_T = 10^4 P_R = 14.1 \text{ Watts}$$

Άσκηση 23:

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι $m_p=B$, $m'_p=4B/T_0$ και το εύρος ζώνης είναι $3/T_0$. Επομένως:

$$\frac{\left(S/N\right)_{PM}}{\left(S/N\right)_{FM}} = \frac{\left(2\pi\times3/T_0\right)^2 B^2}{3\left(4B/T_0\right)^2} = \frac{3\pi^2}{4}$$

Άσκηση 24:

Χρησιμοποιώντας τη συμβουλή της άσκησης, βρίσκουμε το λόγο των 2 SNR:

$$\frac{\left(S/N\right)_{PM}}{\left(S/N\right)_{FM}} = \frac{\left(2\pi B\right)^2 m_p^2}{3m'^2_p}$$

Από την έκφραση του σήματος βασικής ζώνης προκύπτει ότι $m_p = \alpha_1 + \alpha_2$, ενώ επειδή $\dot{m}(t) = -\left(a_1\omega_1 \sin\left[\omega_1 t\right] + a_2\omega_2 \sin\left[\omega_2 t\right]\right)$, τότε $m_p^{'} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{(S/N)_{PM}}{(S/N)_{FM}} = \frac{(2\pi B)^2 m_p^2}{3m'^2_p} = \frac{\omega_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{3(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)^2} = \frac{\omega_2^2\alpha_2^2\left(1 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{3\omega_2^2\alpha_2^2\left(1 + \dfrac{\alpha_1\omega_1}{\alpha_2\omega_2}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{3(1+xy)^2}$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Βαρδάκας. «Συστήματα Επικοινωνιών, Ασκήσεις για τις ενότητες 5 – 7: Διαμόρφωση Γωνίας FM/PM». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE789/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] B. P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems,* 3rd edition, Oxford University press, 1998.

[2] S. Haykin, *Communication Systems,* 4th edition, John Wiley & Sons, 2001.

[3] J. G. Proakis and M. Salehi, *Communication Systems Enginnering,* 2nd edition, Prentice Hall, 2002.

[4] Γ. Καραγιαννίδης, *Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα,* 2η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.

[5] Γ. Κοκκινάκης, *Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα,* 1η έκδοση, Εκδόσεις Αθανασόπουλος, 1998.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.