Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 2: Εισαγωγή στις διαμορφώσεις αναλογικού σήματος

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση βασικών εννοιών για τα διανύσματα στο χώρο
- Περιγραφή της αντιστοίχισης σημάτων - διανυσμάτων
- Περιγραφή των σημάτων βασικής ζώνης
- Εισαγωγή στη διαδικασία της διαμόρφωσης σήματος κατά πλάτος

Περιεχόμενα ενότητας

- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Περιεχόμενα ενότητας

- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Διανύσματα στο χώρο-Βασικές έννοιες (1/2)

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \qquad (a_1, a_2, a_3)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n) \longrightarrow \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i \qquad (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

- ✓ Η διάσταση, *n*, του χώρου είναι ο αριθμός των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι αναγκαίος και ικανός για την αναπαράσταση οποιουδήποτε διανύσματος του χώρου.
- ✓ Τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αν κανένα από αυτά δε μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ορθογώνια $\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

Μέτρο $\Rightarrow \|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

Διανύσματα στο χώρο-Βασικές έννοιες (2/2)

Προβολή a σε b: $\left((\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/\|\mathbf{b}\|^2\right)\mathbf{b}$

- ✓ Ένα σύνολο διανυσμάτων ονομάζεται ορθοκανονικό αν είναι όλα ορθογώνια
- ✓ μεταξύ τους και έχουν όλα μοναδιαίο μέτρο.
- ✓ Ένα ορθοκανονικό σύνολο από διανύσματα (όπου n η διάσταση του χώρου των σημάτων) ονομάζεται ορθοκανονική βάση του χώρου των διανυσμάτων.
- ✓ Για μια ορθοκανονική βάση ισχύει και επομένως το διάνυσμα μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Τριγωνική ανισότητα

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|$$

Cauchy-Schwartz

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Διανύσματα στο χώρο-Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt (1/2)

- Πρόβλημα: Δίνονται n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα a_1, a_2, …, a_n. Ζητείται να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για την αναπαράσταση αυτών των διανυσμάτων.
- Η διαδικασία με την οποία μπορούμε να βρούμε μία τέτοια βάση είναι γνωστή ως διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt.

Διανύσματα στο χώρο-Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt (2/2)

Βήμα 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{i}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$

Βήμα 2:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1$$

$$\mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$$

Βήμα 3:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2$$

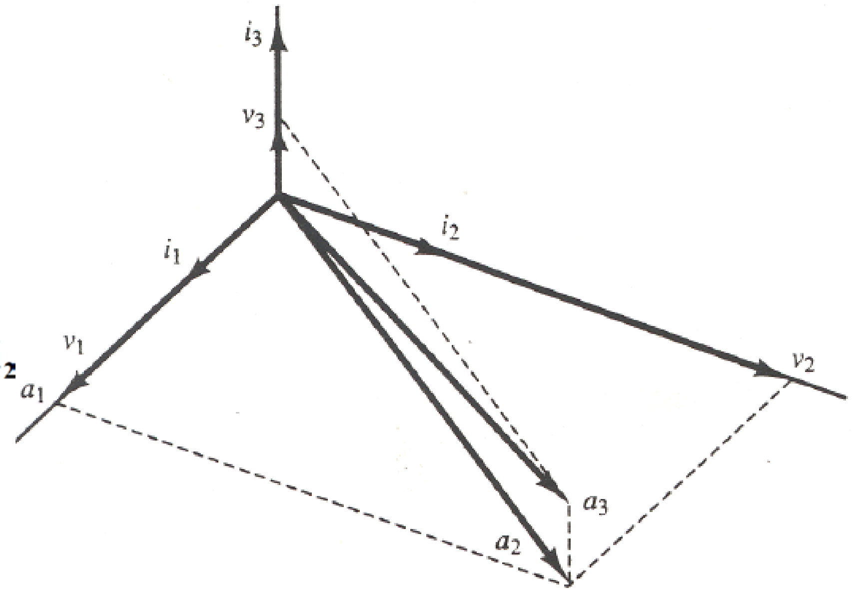
$$\mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}$$

Βήμα *m*: 1≤*m*≤*n*

$$\mathbf{v}_\mathrm{m} = \mathbf{a}_\mathrm{m} - \sum_{j=1}^{m-1} (\mathbf{a}_\mathrm{m} \cdot \mathbf{i}_\mathrm{j})\mathbf{i}_\mathrm{j}$$

$$\mathbf{i}_\mathrm{m} = \frac{\mathbf{v}_\mathrm{m}}{\|\mathbf{v}_\mathrm{m}\|}$$

Αν $\|\mathbf{v}_\mathrm{m}\|$=0 η διαδικασία σταματά



Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ❑ **ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**
- ❑ ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ❑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ❑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

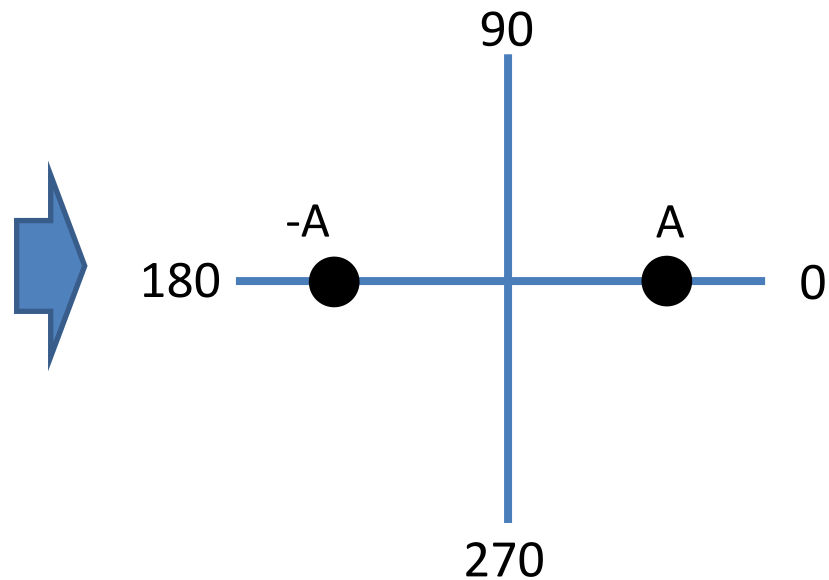
Σήματα και διανύσματα (1/2)

Η αντιστοίχιση σημάτων με διανύσματα, δηλαδή η θεωρία ενός διανυσματικού (γεωμετρικού) χώρου-σημάτων (signal-space) εμφανίστηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1960 από τους Wozencraft και Jacobs.

Η θεωρία αυτή είναι από τις σημαντικότερες εξελίξεις στη θεωρία των ψηφιακών επικοινωνιών, αφού οι ιδιότητες των διανυσμάτων μεταφέρονται στο χώρο των σημάτων, η συμπεριφορά των οποίων μπορεί να μελετηθεί και να αξιολογηθεί με έναν περισσότερο εποπτικό και επομένως κατανοητό τρόπο.

Σήματα και διανύσματα (2/2)

- ✓ Για παράδειγμα, σήματα με <u>διαφορετικά πλάτη</u> αναπαρίστανται σαν σημεία πάνω σε μια ευθεία.



- ✓ Γενικά τα σήματα αναπαρίστανται με μιγαδικούς αριθμούς ή ισοδύναμα με διανύσματα, ώστε με την βοήθεια της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της θεωρίας πιθανοτήτων να γίνει δυνατή η μελέτη του τηλεπικοινωνιακού συστήματος.

Σήματα και διανύσματα: κοινές ιδιότητες

- ✓ Από πολλές απόψεις τα σήματα μοιάζουν και μπορούν να αντιστοιχιστούν με διανύσματα.
- ✓ Τα σήματα, όπως και τα διανύσματα, μπορούν να προστεθούν και να αφαιρεθούν οπότε προκύπτουν νέα σήματα.
- ✓ Ένα σήμα μπορεί να πολλαπλασιαστεί με ένα αριθμό με αποτέλεσμα ένα νέο σήμα.
- ✓ Οι γραμμικοί συνδυασμοί σημάτων είναι επίσης νέα σήματα.
- ✓ Όπως και τα διανύσματα, τα σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια ενός αριθμού συγκεκριμένων “**θεμελιωδών**” σημάτων τα οποία αποτελούν μια “**βάση**” για τη δημιουργία ενός “**χώρου σημάτων**”.
- ✓ Μπορούμε επίσης να ορίσουμε, όπως και στα διανύσματα, το εσωτερικό γινόμενο και το μέτρο ενός σήματος.

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (1/9)

- Ως *Μέτρο* (*Norm*) του σήματος $s(t)$ ορίζεται η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας αυτού:

$$\|s(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_s} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}.$$

- Το *Εσωτερικό Γινόμενο (Inner Product*) δύο γενικά μιγαδικών σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$ ορίζεται ως:

$$\langle s_1, s_2 \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \langle s_1, s_2 \rangle &= \langle s_1, s_2 \rangle^*, \\ \langle s_1 + s_2, s_3 \rangle &= \langle s_1, s_3 \rangle + \langle s_2, s_3 \rangle \\ \langle a s_1, s_2 \rangle &= a \langle s_1, s_2 \rangle \end{aligned}$$

όπου $s^*_2(t)$ είναι το μιγαδικό συζυγές του $s_2(t)$.

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (2/9)

- ✓ Δύο σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$ ονομάζονται *ορθογώνια* ($s_1 \perp s_2$) αν ικανοποιούν τη σχέση:

$$s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow \langle s_1, s_2 \rangle = 0.$$

- ✓ Η προβολή του σήματος $s_1(t)$ στο σήμα $s_2(t)$ είναι:

$$s_{1\perp s_2} = \left(\frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\|s_2(t)\|^2} \right) s_2(t).$$

Η συσχέτιση δύο σημάτων $s_1(t)$ και $s_2(t)$ εκφράζει το μέτρο της ομοιότητας αυτών και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_{s_1,s_2} = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\|s_1(t)\| \, \|s_2(t)\|} = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\sqrt{\mathcal{E}_{s_1} \mathcal{E}_{s_2}}}.$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (3/9)

- Η *Ευκλείδεια Απόσταση* μεταξύ δύο σημάτων ορίζεται ως:

$$d_{s_1,s_2} = \|s_1(t) - s_2(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_{s_1} + \mathcal{E}_{s_2} - 2\sqrt{\mathcal{E}_{s_1}\mathcal{E}_{s_2}}\mathrm{Re}[\rho_{s_1,s_2}]}.$$

- Αν ισχύει $\mathcal{E}_{s_1} = \mathcal{E}_{s_2} = \mathcal{E}$ τότε:

$$d_{s_1,s_2} = \sqrt{2\mathcal{E}(1 - \mathrm{Re}[\rho_{s_1,s_2}])}.$$

- Ανισότητα *Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle s_1, s_2 \rangle| \leq \|s_1(t)\|\,\|s_2(t)\|.$$

- *Κανόνας Παραλληλογράμμου*:

$$\|s_1(t) + s_2(t)\|^2 + \|s_1(t) - s_2(t)\|^2 = 2(\|s_1(t)\|^2 + \|s_2(t)\|^2).$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (4/9)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα:

  Αν δύο σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$ είναι ορθογώνια τότε:

$$\|s_1(t) + s_2(t)\|^2 = \|s_1(t)\|^2 + \|s_2(t)\|^2.$$

- Ένα σύνολο σημάτων $s_1(t)$, $s_2(t)$,…, $s_M(t)$ το οποίο ανήκει σε ένα χώρο-σημάτων είναι *γραμμικά εξαρτημένο* εάν ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i s_i(t) = 0$$

  για κάποια $a_i \neq 0$, με $a_i \in \mathbb{R}$.

- Ισοδύναμα, το σύνολο των σημάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο, εάν ένα από τα σήματα μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων:

$$s_i(t) = \sum_{i \neq j} a_j s_j(t).$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (5/9)

- Το προηγούμενο σύνολο σημάτων είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο
- *Διάσταση* ενός χώρου-σημάτων είναι το μέγιστο πλήθος των σημάτων που ανήκουν στο χώρο και είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Ένα σύνολο σημάτων $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_N(t)$ είναι *ορθοκανονικό (orthonormal),* αν για κάθε ζεύγος φ_i φ_j ισχύει:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν τα σήματα $s_1(t)$, $s_2(t)$,…, $s_M(t)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε το σύνολο των σημάτων:

$$\phi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\|s_i(t)\|}$$

είναι ορθοκανονικό.

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (6/9)

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \langle s_i, \phi_j \rangle \, \phi_j(t)$$

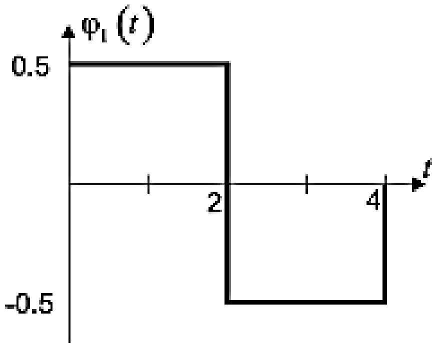
- ✓ Το ορθοκανονικό σύνολο σημάτων ονομάζεται *ορθοκανονική βάση* και τα σήματα που το απαρτίζουν *ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης* ή απλά *συναρτήσεις βάσης.*
- ✓ Οι σταθερές (s_i, φ_j) είναι οι συντεταγμένες του σήματος-διανύσματος s_i.

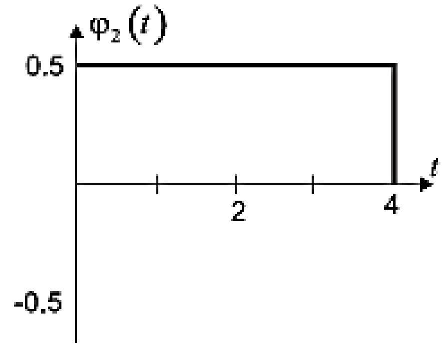
$$\mathbf{s_i} = \{\langle s_i, \phi_1 \rangle, \langle s_i, \phi_2 \rangle \ldots, \langle s_i, \phi_N \rangle\}$$

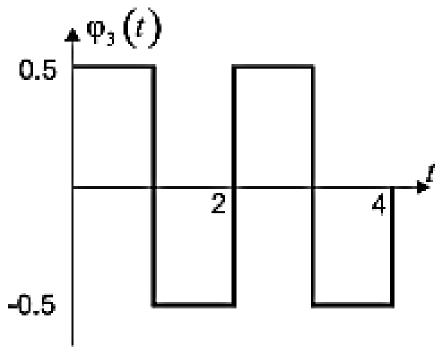
$$\begin{aligned} \mathbf{s_1} &= \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \\ \mathbf{s_2} &= \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N\} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \langle s_1, s_2 \rangle &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_N\beta_N, \\ \|s_1(t)\| &= \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_N|^2}, \\ d_{s_1,s_2} &= \sqrt{|a_1 - \beta_1|^2 + |a_2 - \beta_2|^2 + \ldots + |a_N - \beta_N|^2}. \end{aligned}$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (7/9)

Να δείξετε ότι οι παρακάτω κυματομορφές αποτελούν ορθοκανονική βάση:



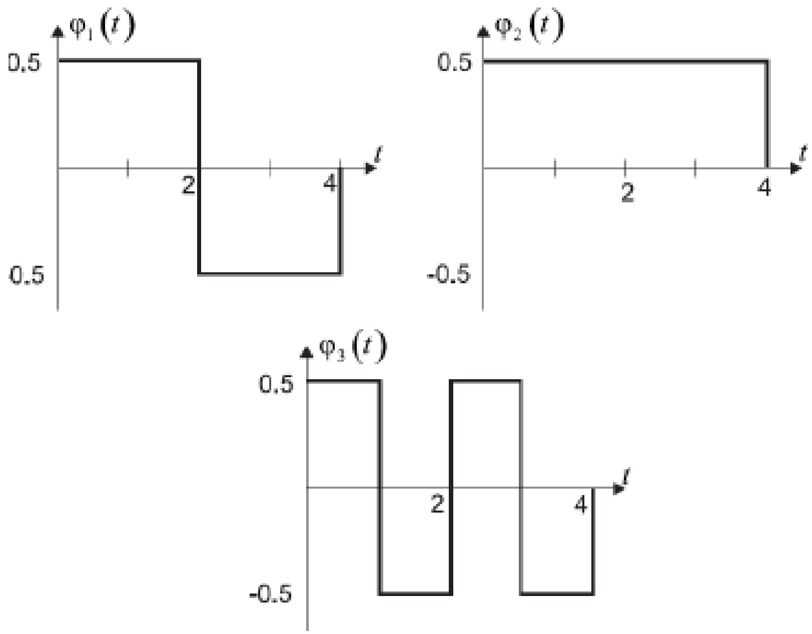




$$\|\phi_n(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_n} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t)|^2 dt} = 1,\ n \in \{1,2,3\}$$

$$\langle \phi_n, \phi_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_l(t)dt = 0,\ n \neq l,\ (n,l) \in \{1,2,3\}$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (8/9)

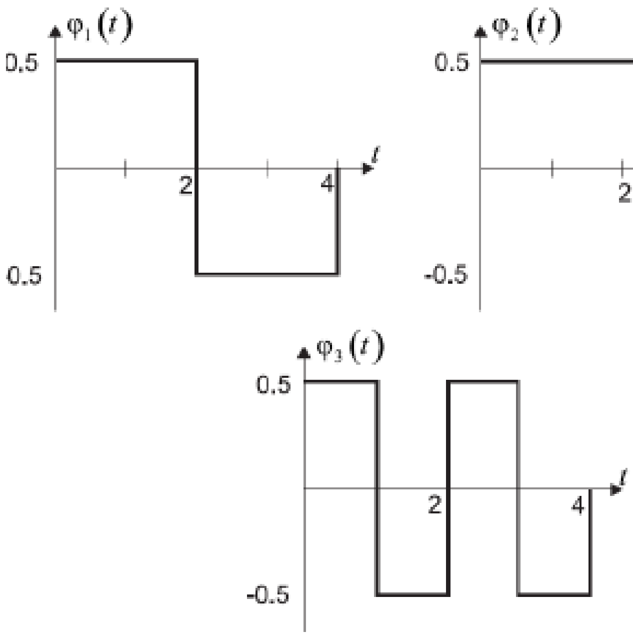


$$\|\phi_1(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_1} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_1(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$

$$\|\phi_2(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_2} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_2(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$

$$\|\phi_3(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}_3} = \sqrt{\int_0^4 |\phi_3(t)|^2 dt} = 4 \times 0.5^2 = 1$$

Σήματα και διανύσματα: Ορισμοί (9/9)



$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_0^4 \phi_1(t)\phi_2(t)dt = \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_2^4 (-\frac{1}{2})\frac{1}{2}dt = 0$$

$$\langle \phi_1, \phi_3 \rangle = \int_0^4 \phi_1(t)\phi_3(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})dt$$

$$+ \int_2^3 (-\frac{1}{2})\frac{1}{2}dt + \int_3^4 (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})dt = 0$$

$$\langle \phi_2, \phi_3 \rangle = \int_0^4 \phi_2(t)\phi_3(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})dt$$

$$+ \int_2^3 \frac{1}{2}\frac{1}{2}dt + \int_3^4 \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})dt = 0.$$

Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ❑ **ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ**
- ❑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ❑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Διαδικασία ορθογωνοποίησης σημάτων Gram – Schmidt (1/2)

- ✓ **Βήμα 1**: Ορίζεται ως $g_1(t)=s_1(t)$, οπότε η πρώτη συνάρτηση βάσης είναι:

$$\phi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\|g_1(t)\|}, \ \|g_1(t)\| \neq 0.$$

- ✓ **Βήμα 2**: Ορίζεται ως $g_2(t)=s_2(t)-\varphi_1(t) < s_2=\varphi_1 >$, οπότε η δεύτερη συνάρτηση βάσης θα είναι:

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|}, \ \|g_2(t)\| \neq 0.$$

- ✓ **Βήμα *k***: Με τον ίδιο τρόπο στο k-οστό βήμα ορίζεται:

$$g_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_i(t) \langle s_k, \phi_i \rangle$$

$$\phi_k(t) = \frac{g_k(t)}{\|g_k(t)\|}, \ \|g_k(t)\| \neq 0$$

Διαδικασία ορθογωνοποίησης σημάτων Gram – Schmidt (2/2)

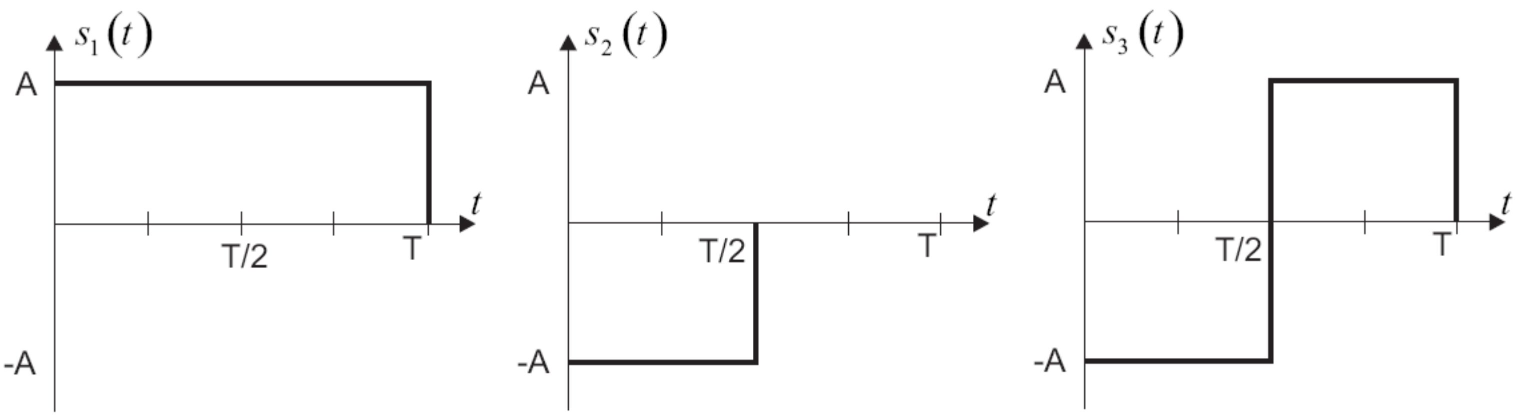
Η διαδικασία συνεχίζεται για όλα τα υπόλοιπα σήματα έως το $s_M(t)$. Από αυτά μόνο εκείνα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή ισχύει $||g_k(t)||\neq 0$, συμμετέχουν στη δημιουργία μίας νέας συνάρτησης βάσης.

Ο συνολικός αριθμός $N\leq M$ των συναρτήσεων βάσης που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία σχηματίζουν μία N-διάστατη βάση στο χώρο των M σημάτων.

Σημειώστε ότι η διάσταση του χώρου θα είναι ίση με M μόνο αν όλα τα σήματα $s_1(t)$,…, $s_M(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

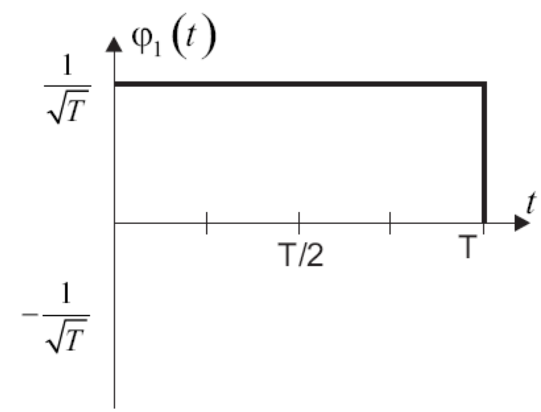
Γεωμετρική αναπαράσταση σημάτων- Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram – Schmidt (1/3)

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gram – Schmidt για να βρείτε τις ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης του χώρου των σημάτων $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$.



Βήμα 1: Εύρεση της πρώτης συνάρτησης βάσης:

$$\phi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} = \frac{s_1(t)}{A\sqrt{T}},$$



Γεωμετρική αναπαράσταση σημάτων- Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram – Schmidt (2/3)

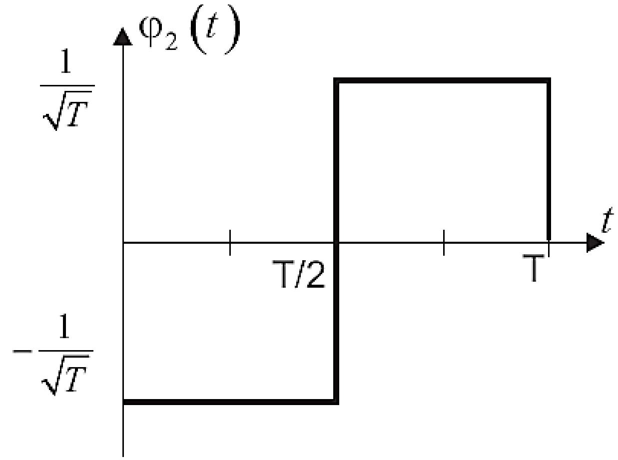
Βήμα 1: Εύρεση της δεύτερης συνάρτησης βάσης: $\phi_2(t) = \dfrac{g_2(t)}{\|g_2(t)\|},$

$$g_2(t) = s_2(t) - \langle s_2, \phi_1 \rangle \, \phi_1(t) =$$

$$= \begin{cases} -A - \left(-\frac{A}{2}\sqrt{T}\right)\frac{1}{\sqrt{T}} \\ 0 - \left(-\frac{A}{2}\sqrt{T}\right)\frac{1}{\sqrt{T}} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{A}{2}, & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ +\frac{A}{2}, & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$

$$\|g_2(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{A}{2}\right)^2 \frac{T}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{T}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2 T}{4}} = \frac{A}{2}\sqrt{T}.$$



Γεωμετρική αναπαράσταση σημάτων- Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram – Schmidt (3/3)

Βήμα 3: Εύρεση της τρίτης συνάρτησης βάσης: $\phi_3(t) = \dfrac{g_3(t)}{\sqrt{\|g_3(t)\|}},$

$$g_3(t) = s_3(t) - \langle s_3, \phi_1 \rangle \, \phi_1(t) - \langle s_3, \phi_2 \rangle \, \phi_2(t) =$$

$$= \begin{cases} -A - A\sqrt{T}\frac{-1}{\sqrt{T}}, & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -A - A\sqrt{T}\frac{1}{\sqrt{T}}, & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$

Δύο συναρτήσεις βάσης: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ❑ ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ❑ **ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ**
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ❑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Αστερισμοί (1/4)

Ένα σύνολο *M* διανυσμάτων, τα οποία ανήκουν σε ένα γεωμετρικό-διανυσματικό χώρο ονομάζεται αστερισμός (constellation). Αντίστοιχα, ένα σύνολο σημάτων δημιουργεί το δικό του αστερισμό.

- ✓ Κάθε σήμα αναπαριστάται με ένα σημείο του αστερισμού και αντιστοιχεί σε μία διαφορετική κυματομορφή. Όλες οι κυματομορφές ανήκουν στην ίδια ορθοκανονική βάση και μοιράζονται τις ίδιες συναρτήσεις βάσης.
- ✓ Η μέση ενέργεια ενός αστερισμού σημάτων δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{E}_s = \sum_{i=1}^{M} \|\mathbf{s}_i\|^2 \Pr(\mathbf{s}_i), \qquad \|\mathbf{s}_i\|^2 = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^2$$

με s_{ij} την *j*-συνιστώσα του *i*-οστού σήματος και $\Pr(s_i)$ είναι η a-priori πιθανότητα εμφάνισης αυτού του αστερισμού.

Αστερισμοί (2/4)

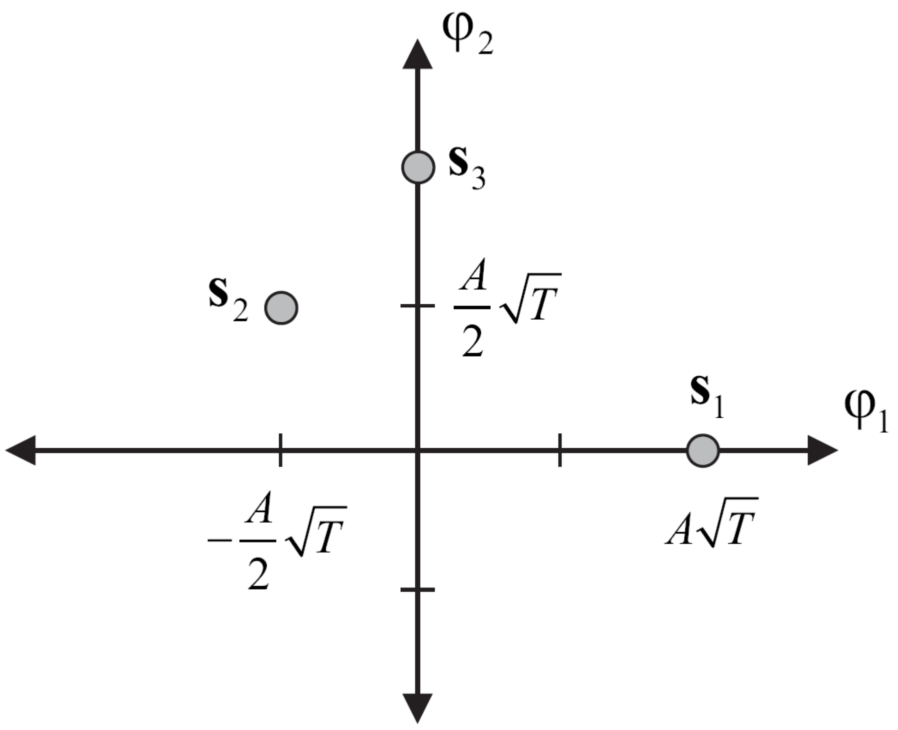
- Η ελαχιστοποίηση των E_s με σκοπό την εξοικονόμηση ενέργειας εκπομπής, απαιτεί την τοποθέτηση των σημείων του αστερισμού όσο το δυνατόν πλησιέστερα του σημείου [0,0,…,0]. Όμως, η προσέγγιση των σημείων έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της Ευκλείδειας απόστασης, οποία –όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια- αποτελεί κρίσιμη παράμετρο του συστήματος αφού συνδέεται με την πιθανότητα σφάλματος.
- Το γεωμετρικό πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης σημείων με αστερισμό με περιορισμού στη μέση ενέργεια και στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως πρόβλημα *sphere-packing*. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία του C.E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communication”, Bell System Technical Journal.

Αστερισμοί (3/4)

$$\mathbf{s_1} = (A\sqrt{T}) \times \phi_1 + 0 \times \phi_2$$

$$\mathbf{s_2} = (-\frac{A}{2}\sqrt{T}) \times \phi_1 + (+\frac{A}{2}\sqrt{T}) \times \phi_2$$

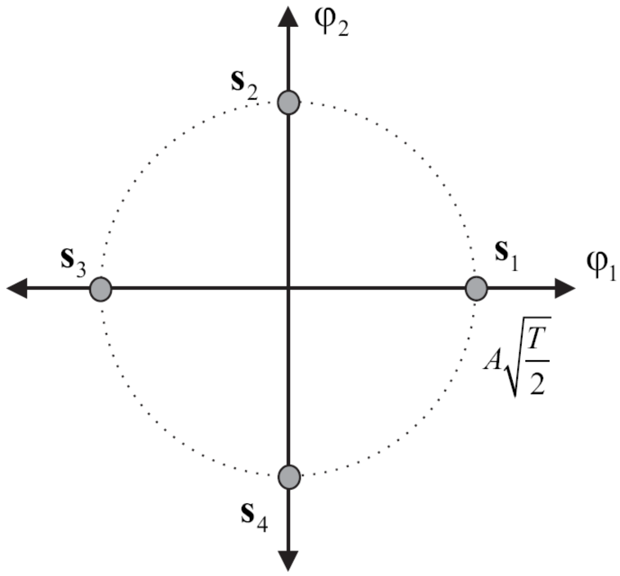
$$\mathbf{s_3} = 0 \times \phi_1 + (A\sqrt{T}) \times \phi_2$$



Αστερισμοί (4/4)

$$s_i(t) = A\cos\theta_i \cos 2\pi f_c t - A\sin\theta_i \sin 2\pi f_c t$$

$$t \in [0, T],\ \theta_i = 2\pi\frac{i-1}{M},\ i = 1, 2, \ldots, M$$



$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\pi f_c t,\ \phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\pi f_c t$$

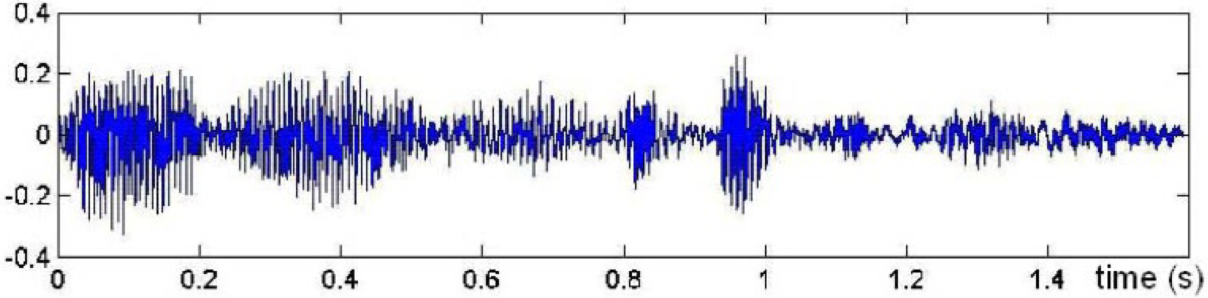
$$\mathbf{s_i} = \left\{ A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\theta_i, A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\theta_i \right\}$$

Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ❑ ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ❑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ❑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Σήματα: Βασικής ζώνης και Ζωνοπερατό

- Σήμα βασικής ζώνης (baseband) είναι το σήμα με μη-μηδενικό φασματικό περιεχόμενο στην περιοχή γύρω από τη συχνότητα f=0 και σχεδόν μηδενικό περιεχόμενο στην υπόλοιπη περιοχή του φάσματος



- Ζωνοπερατό (bandpass) είναι το σήμα με μη-μηδενικό φασματικό περιεχόμενο συγκεντρωμένο γύρω από μία κεντρική συχνότητα $f=\pm f_c$ (με f_c >>0) και σχεδόν μηδενικό περιεχόμενο στην υπόλοιπη περιοχή του φάσματος

$$X(f) = 0,\ |f - f_c| \geq 2W \quad \Rightarrow \quad x(t) = Am(t)\cos 2\pi f_c t$$

Ζωνοπερατά Σήματα

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Συμφασική (In-phase) συνιστώσα

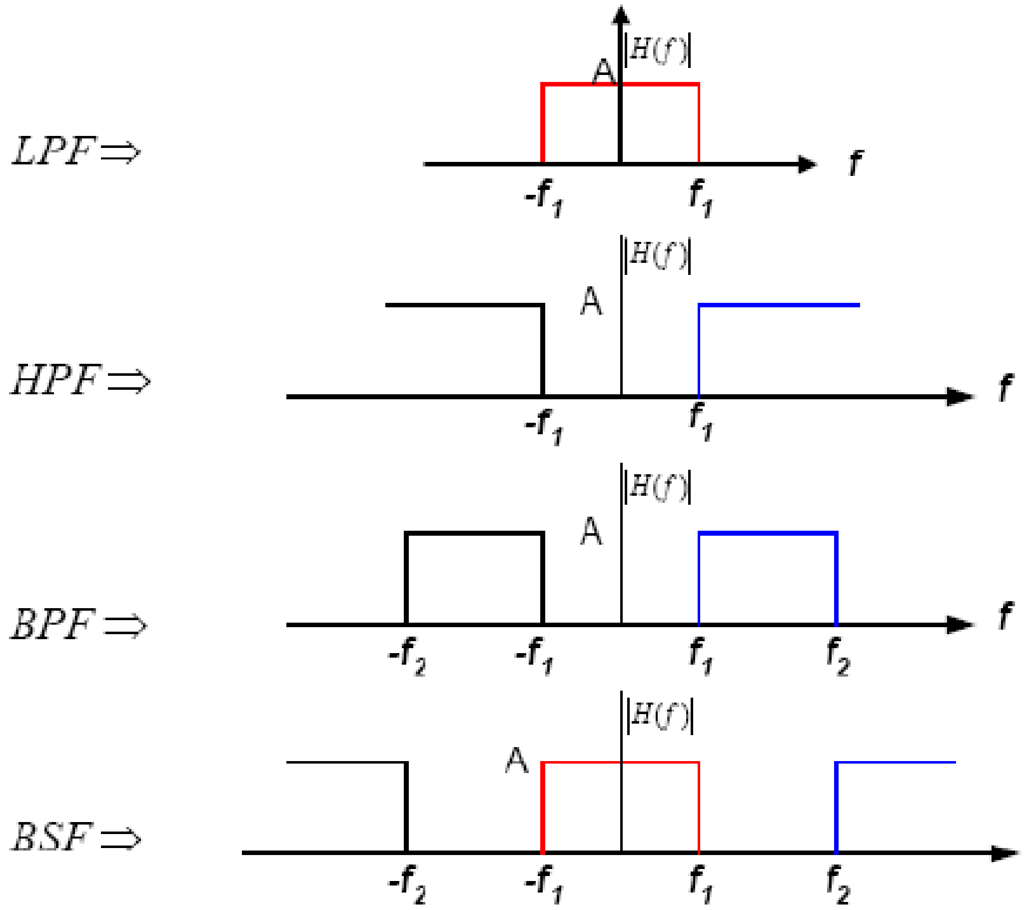
Βασικής ζώνης

Ορθογώνια (Quadrature) συνιστώσα

Περιβάλλουσα $$V(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}$$

Φάση $$\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{x_Q(t)}{x_I(t)}\right]$$

Φίλτρα



Διαμόρφωση

Διαμόρφωση, είναι η διαδικασία αντιστοίχισης της πληροφορίας που μεταφέρει το σήμα βασικής ζώνης m(t) σε ένα χαρακτηριστικό ενός ζωνοπερατού σήματος, κατάλληλου για μετάδοση στο κανάλι

- Ανθρώπινη ομιλία (εύρος συχνοτήτων 20 Hz με 5 KHz).
- Δεν υπάρχουν κεραίες για συχνότητες αυτής της τάξης (μήκος κύματος της τάξης των 100 Km)

- ✓ Χαμηλή πολυπλοκότητα διατάξεων εκπομπή-λήψης Η/Μ ακτινοβολίας
- ✓ Πολυπλεξία — Κινητή Τηλεφωνία
- ✓ Αντιμετώπιση των περιορισμών που επιβάλλει το κανάλι
- ✓ Διαμόρφωση για περιορισμό θορύβου και παρεμβολών
- ✓ Απονομή συχνοτήτων — Ραδιοφωνία-Τηλεόραση

Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες

- Στα αναλογικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα η πληροφορία με τη μορφή αναλογικού σήματος αποτυπώνεται στο πλάτος ή τη γωνία του φέροντος σήματος, παράμετροι οι οποίες μπορούν θεωρητικά να λάβουν άπειρο αριθμό τιμών-καταστάσεων.
- Στα ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα η πληροφορία μετατρέπεται από αναλογική σε ψηφιακή μορφή (αν δεν είναι ήδη, όπως για παράδειγμα σε επικοινωνίες υπολογιστών) και κατόπιν –αφού υποστεί κατάλληλη επεξεργασία- ακολουθεί η αντιστοίχιση του ψηφιακού σήματος σε πεπερασμένο αριθμό αναλογικών κυματομορφών προς εκπομπή, οι οποίες ονομάζονται *σύμβολα* (*symbols*).

Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ❑ ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ
- ❑ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ
- ❑ ΣΗΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΝΟΠΕΡΑΤΑ
- ❑ **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ**

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Μιχαήλ Λογοθέτης 2015. «Συστήματα Επικοινωνιών – Ενότητα 2: Εισαγωγή στις διαμορφώσεις αναλογικού σήματος». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE789/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Τα σχήματα στις διαφάνειες 8, 19-21, 25-26, 31-32, 34 και 36 προέρχονται από το σύγγραμμα του μαθήματος“Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα”, Εκδόσεις Τζιόλα, μετά από άδεια του συγγραφέα Καθ. Γ. Καραγιαννίδη.