



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 12: Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής
δρομολόγησης

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και ανάλυση μεθόδων βέλτιστου σχεδιασμού εναλλακτικής δρομολόγησης
- Περιγραφή και ανάλυση συστημάτων περιορισμένης διαθεσιμότητας



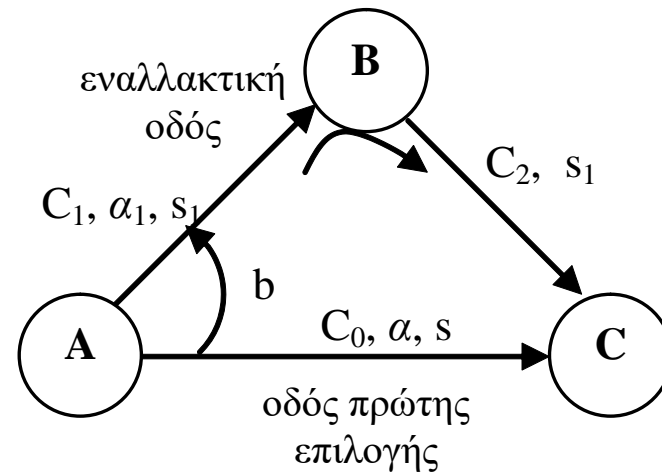
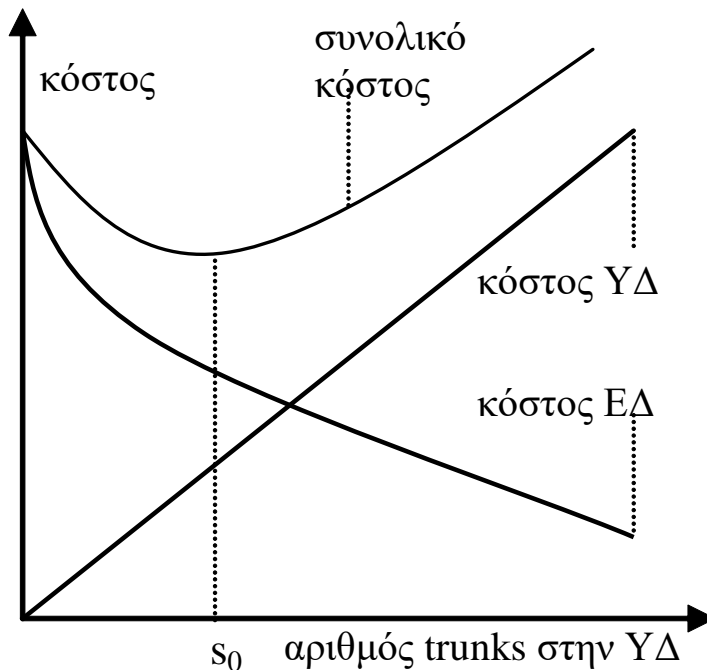
Περιεχόμενα ενότητας

- Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης
 - Βάσει της κλασσικής μεθόδου
 - Βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως
 - Βάσει του συστήματος δέσμευσης γραμμών
- Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας



Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης – Κλασική μέθοδος (1)

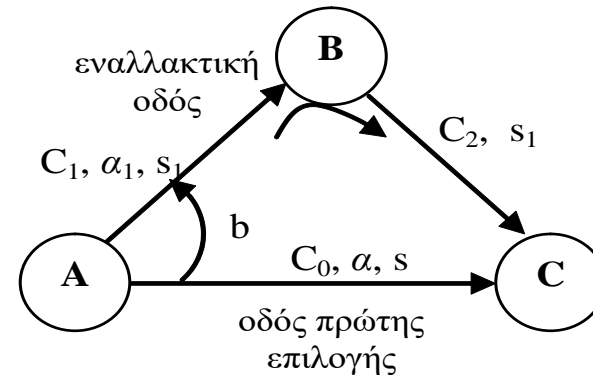
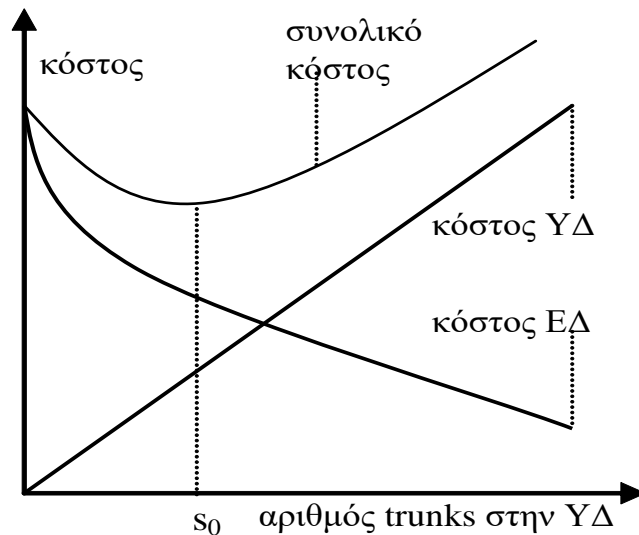
Στα συστήματα εναλλακτικής δρομολόγησης, αν αλλάξουμε την χωρητικότητα της ζεύξης υψηλής εκμετάλλευσης, αλλά διατηρήσουμε σταθερό το GOS, το «κόστος» του συστήματος θα αλλάξει, όπως φαίνεται στο σχήμα (κόστος Διαδρομής Υψηλής εκμετάλλευσης, $ΥΔ \sim$ αριθμού trunks).



Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης – Κλασσική μέθοδος (2)

Θα μελετήσουμε τον βέλτιστο σχεδιασμό του συστήματος εναλλακτικής δρομολόγησης που ελαχιστοποιεί το κόστος, μέσω της κλασσικής μεθόδου. Κεντρική ιδέα της κλασσικής μεθόδου είναι η απλούστευση ότι η κίνηση υπερροής δεν είναι μη τυχαία αλλά τυχαία.

Έστω C_0 , C_1 και C_2 τα κόστη ανά trunk στην διαδρομή υψηλής εκμετάλλευσης A-C και στα τμήματα της εναλλακτικής διαδρομής A-B και B-C αντιστοίχως.



Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης – Κλασσική μέθοδος (3)

Δηλώνοντας το **οριακό κόστος (marginal cost)** ανά μονάδα φορτίου κίνησης (ανά erl) σε σχέση με το κόστος προσθήκης ενός trunk στην εναλλακτική διαδρομή (ΕΔ) με C_E και στην διαδρομή υψηλής εκμετάλλευσης (ΥΔ) με C_Y , έχουμε τις σχέσεις:

$$C_E = \frac{C_1 + C_2}{ATC \text{ στην } \nu \text{ ΕΔ}} \quad (14)$$
$$C_Y = \frac{C_0}{LTC \text{ στην } \nu \text{ ΥΔ}}$$

όπου ATC είναι η **χωρητικότητα του επιπρόσθετου trunk (Additional Trunk Capacity)**, και LTC η **χωρητικότητα του τελευταίου trunk (Last Trunk Capacity)** που ορίσθηκαν στην ενότητα 3 (σχέσεις 32, 34 στις διαφάνειες).

Η επαύξηση της χωρητικότητας της ΥΔ δικαιολογείται όσον $C_Y \leq C_E$.

Σημείωση: Η αρίθμηση συνεχίζεται από την προηγούμενη ενότητα.



Additional Trunk, Last Trunk Capacity

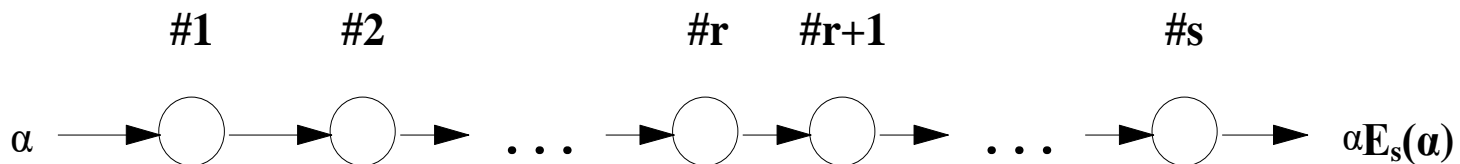
- Η επιπρόσθετη χωρητικότητα γραμμής (**Additional Trunk Capacity - ATC**) καθορίζεται από την αύξηση του φορτίου κίνησης $\Delta\alpha$ όταν μια γραμμή προστίθεται στην ζεύξη αλλά η πιθανότητα απωλείας κλήσεως B παραμένει σταθερή. Άρα:

$$E_s(\alpha) = E_{s+1}(\alpha + \Delta\alpha) = B$$

Αφού $E_s(\alpha) > E_{s+1}(\alpha)$, μπορούμε να βρούμε το $\Delta\alpha = \text{ATC}$ ώστε $E_s(\alpha) = E_{s+1}(\alpha + \Delta\alpha)$

- Έστω το μοντέλο **ταξινομημένης αναζήτησης (ordered trunk hunting)** (σχήμα), στο οποίο φορτίο κίνησης α ερλ προσφέρεται σε s trunks, αλλά απαριθμώντας τα trunks ένα προς ένα, αναζητούνται ελεύθερα trunks σειριακά από το ελάχιστο προς το μέγιστο. Το φορτίο κίνησης που μεταφέρεται από το $\#r$ trunk (γραμμή) δίδεται από την σχέση:

$$\alpha_r = \alpha [E_{r-1}(\alpha) - E_r(\alpha)] \Rightarrow \alpha_s = \alpha [E_{s-1}(\alpha) - E_s(\alpha)] \quad \text{Last Trunk Capacity (LTC)}$$



Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης – Κλασσική μέθοδος (4)

Ορίζουμε τον λόγο K του κόστους της ΕΔ προς το κόστος της ΥΔ:

$$K \equiv \frac{C_1 + C_2}{C_0} \quad (15)$$

Τότε η συνθήκη για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους είναι :

$$\frac{ATC}{LTC} \leq K \quad (16)$$

καθόσον $C_E/C_Y = (C_1 + C_2) \cdot LTC / (C_0 \cdot ATC) = K \cdot (LTC/ATC) = K / (ATC/LTC)$, οπότε για να είναι $C_E \geq C_Y$ πρέπει $K \geq ATC/LTC$, δηλαδή να ισχύει η (16).

Αν α είναι το προσφερόμενο φορτίο και s ο αριθμός των trunks της ΥΔ, τότε:

$$LTC = \alpha [E_{s-1}(\alpha) - E_s(\alpha)] \quad (17)$$



Βέλτιστος σχεδιασμός εναλλακτικής δρομολόγησης – Κλασσική μέθοδος (5)

Παράδειγμα 1

Ποιος είναι ο βέλτιστος αριθμός των trunks στην διαδρομή υψηλής εκμετάλλευσης που καθιστά ελάχιστο το κόστος του συστήματος εναλλακτικής δρομολόγησης όταν το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι $\alpha=5 \text{ erl}$, και ο λόγος κόστους $K=1.5$; Στην πράξη χρησιμοποιείται $ATC=0.83 \text{ erl}$ (για το αμερικάνικο ή το γιαπωνέζικο σύστημα PCM των 24 καναλιών).

Τότε από την (16) έχουμε:
$$LTC \geq \frac{0.83}{1.5} = 0.55 \text{ erl}$$

Υλοποιώντας την (17) στον Η/Υ βρίσκουμε το s που ικανοποιεί την σχέση $LTC \geq 0.55$. Το αποτέλεσμα είναι $s = 5.178$. Άρα ο βέλτιστος αριθμός trunks είναι $s = 5$.

Σημείωση: Η υπόθεση ότι $ATC=0.83 \text{ erl}$ αντιστοιχεί σε $s=24$ trunks στα οποία προσφέρεται τυχαία κίνηση 15.29 erl και ο βαθμός εξυπηρέτησης είναι 1%.



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (1)

Χρησιμοποιώντας την ίδια συμβολογραφία όπως ανωτέρω, η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (ERT) διατυπώνεται ως εξής:

$$b^* = b + \alpha_1 = b(s^*, \alpha^*), \quad v^* = v + \alpha_1 = v(s^*, \alpha^*) \quad (18)$$

$$B = \frac{b(s^* + s_1, \alpha^*)}{b(s^*, \alpha^*)} \quad (19)$$

όπου οι συναρτήσεις $b(.,.)$ και $v(.,.)$ ορίζονται από τις σχέσεις Wilkinson, (9).

Μπορούμε να θεωρήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση κόστους του συστήματος εναλλακτικής δρομολόγησης:

$$f = s_0 + ks_1 \quad (20)$$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (2)

Επομένως ο βέλτιστος σχεδιασμός για την ελαχιστοποίηση του κόστους f με δεδομένη την πιθανότητα απωλείας κλήσεως, B , στην τελική εναλλακτική διαδρομή, αντιστοιχεί σε πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης f , υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}g_1 &= b(s^*, \alpha^*) - b^* = 0 \\g_2 &= v(s^*, \alpha^*) - v^* = 0 \\g_3 &= b(s^* + s_1, \alpha^*) - B b(s^*, \alpha^*) = 0\end{aligned}\tag{21}$$

Οι περιορισμοί αυτοί προκύπτουν από την (19). Εισάγουμε τους πολλαπλασιαστές r_1 , r_2 και r_3 κατά Lagrange, και θέτουμε:

$$F = f + r_1 g_1 + r_2 g_2 + r_3 g_3\tag{22}$$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (3)

Κατόπιν σχηματίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial F}{\partial s_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial s_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial s^*} = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 0$$

και λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο υπό μορφή πίνακος έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{b}_s & \mathbf{v}_s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{b}'_s \\ 0 & \mathbf{b}_s^* & \mathbf{v}_s^* & \mathbf{b}'_s - B\mathbf{b}'_s \\ 0 & \mathbf{b}_a^* & \mathbf{v}_a^* & \mathbf{b}'_a - B\mathbf{b}'_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (4)

Επιλύοντας το σύστημα 23 έχουμε την συνθήκη ελαχιστοποίησης της f , υπό τον περιορισμό:

$$k^{-1} = \left[\frac{b_s (b'_\alpha v_s^* - b'_s v_\alpha^*) - v_s (b'_\alpha b_s^* - b'_s b_\alpha^*)}{b'_s (b_\alpha^* v_s^* - b_s^* v_\alpha^*)} - \frac{b_s}{b'_s} B \right] \quad (24)$$

όπου: $b_s = \partial b(s_0, \alpha_0) / \partial s_0$

$v_s = \partial v(s_0, \alpha_0) / \partial s$

$b_x^* = \partial b(s^*, \alpha^*) / \partial x^*$

$v_x^* = \partial v(s^*, \alpha^*) / \partial x^*$

$b_x' = \partial b(s_1 + s^*, \alpha^*) / \partial x^*$

$x = \alpha, s$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (5)

Θέτοντας $t = s + 1 - a + b$, οι ανωτέρω παράγωγοι υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\partial b(s, a) / \partial a = t b / a$$

$$\partial b(s, a) / \partial s = - b \Psi_{s+1}$$

(25)

$$\partial v(s, a) / \partial a = v/t - t (b^2 - v) / a$$

$$\partial v(s, a) / \partial s = [b^2 (1 + a / t^2) - v] \Psi_{s+1} - ab / t^2$$

όπου το Ψ_{s+1} υπολογίζεται από την (27), κατωτέρω, που προκύπτει ως εξής:



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (6)

Γράφοντας τον Β τύπο του Erlang υπό αναδρομική μορφή και λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$E_s(\alpha) = \alpha E_{s-1}(\alpha) / (s + \alpha E_{s-1}(\alpha)), \text{ όπου } E_0(\alpha) = 1. \rightarrow$$

$$\frac{\partial E_s(\alpha)}{\partial \alpha} = \left[\frac{s}{\alpha} - 1 + E_s(\alpha) \right] E_s(\alpha) \quad (26)$$

$$\frac{\partial E_s(\alpha)}{\partial s} = -\Psi_{s+1}(\alpha) E_s(\alpha)$$

όπου:

$$\Psi_{s+1}(\alpha) \equiv -\frac{\partial}{\partial s} \log E_s(\alpha) = -\frac{\partial E_s(\alpha)}{\partial s} / E_s(\alpha) \quad (27)$$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (7)

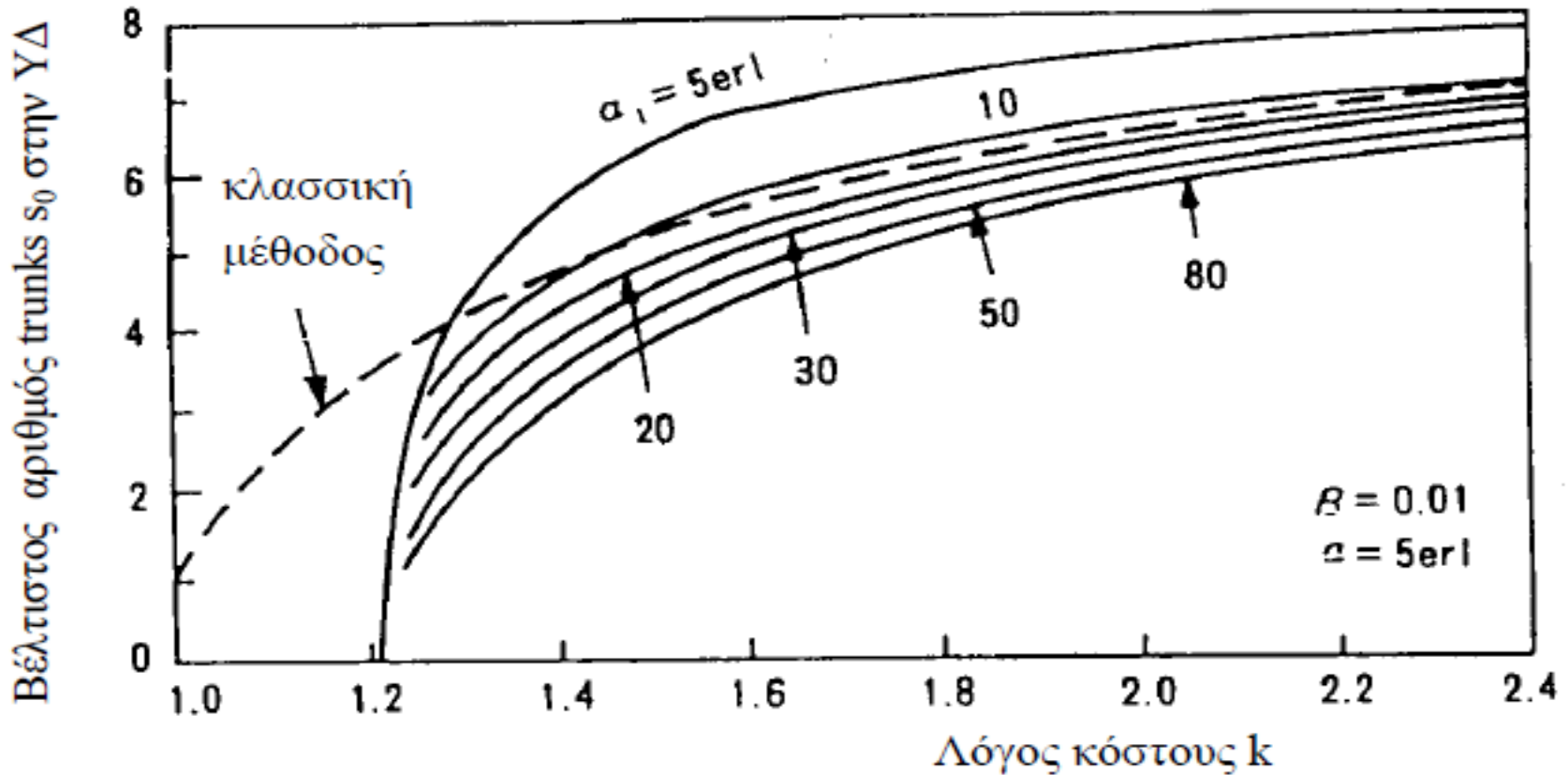
Παράδειγμα 2

Στο σχήμα που προέρχεται από το [1], φαίνεται το αποτέλεσμα της βέλτιστης σχεδίασης ενός συστήματος εναλλακτικής δρομολόγησης, όταν το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης είναι $\alpha = 5 \text{ erl}$ και η πιθανότητα απωλείας κλήσεως στην τελική εναλλακτική διαδρομή είναι $B = 0.01$. Π.χ., με $k = 1.5$ και $\alpha_1 = 10 \text{ erl}$ έχουμε βέλτιστο αριθμό trunks στην διαδρομή υψηλής εκμετάλλευσης $s_0 = 5$. Αυτό συμπίπτει με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 1, όπου ο σχεδιασμός έγινε βάσει της κλασσικής μεθόδου. Το σχήμα περιλαμβάνει επίσης και τα αποτελέσματα της κλασσικής μεθόδου. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η κλασσική μέθοδος προκαλεί κάποιο σφάλμα για μικρές τιμές του k , π.χ. για $k \leq 1.3$ που αντιστοιχεί στην περίπτωση της ψηφιακής μεταγωγής και μετάδοσης.

[1] Akimaru H. and Kawashima K., “*Teletraffic—Theory and Applications*”, Springer-Verlag, 1993.

Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (8)

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμευσης γραμμών (1)

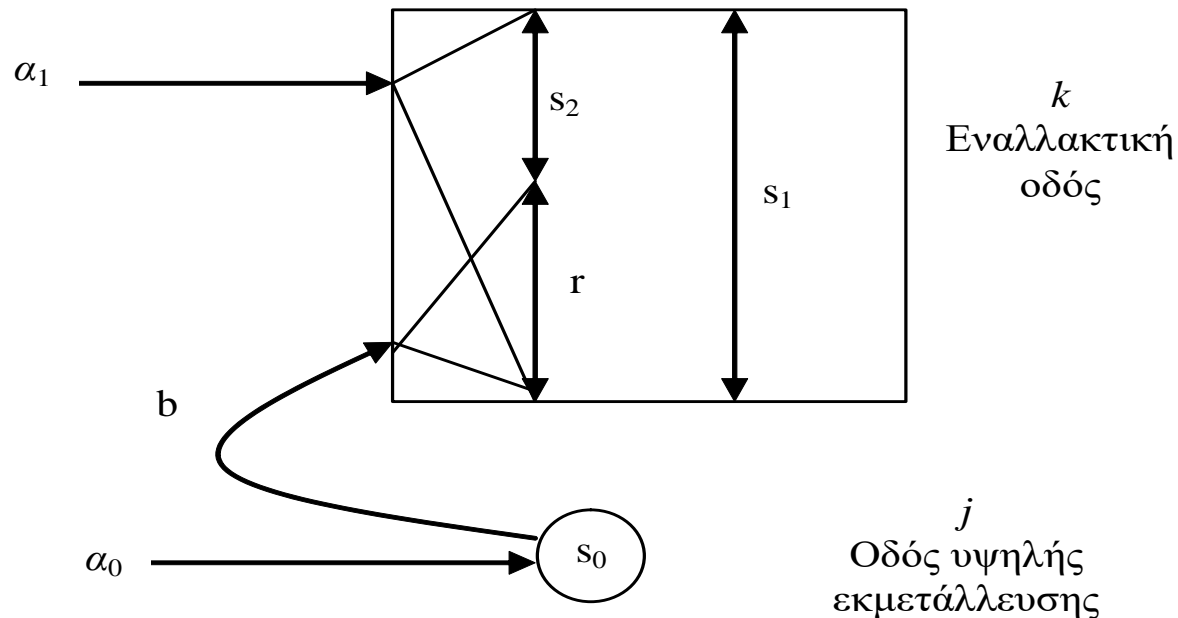
Με την μέθοδο ERT υπολογίζουμε μία πιθανότητα απωλείας κλήσεως στην τελική (εναλλακτική) οδό για το σύνολο της κίνησης a και a_1 . Αν υπολογίζαμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως στην τελική οδό ξεχωριστά για την κίνηση a και ξεχωριστά για την κίνηση a_1 , θα διαπιστώναμε ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο αυτών πιθανοτήτων. Αν θέλουμε να εξισορροπήσουμε τους δύο αυτούς βαθμούς εξυπηρέτησης, πρέπει να ενεργήσουμε ανάλογα με την περίπτωση της πολυδιάστατης κίνησης και να εφαρμόσουμε **σύστημα δέσμευσης γραμμών (trunk reservation system)**.

Θα δεσμεύσουμε ορισμένα trunks από την χωρητικότητα s_1 της τελικής (εναλλακτικής) οδού για να χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την τυχαία κίνηση a_1 , ενώ τα υπόλοιπα θα τα έχουμε σε κοινή χρήση της τυχαίας κίνησης a_1 και της κίνησης υπερροής b .



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμησης γραμμών (2)

Με το σύστημα δέσμησης γραμμών δεσμεύουμε s_2 από τα s_1 trunks της εναλλακτικής διαδρομής για να χρησιμοποιούνται αποκλειστικά από το φορτίο κίνησης α_1 (βλ. σχήμα). Έστω j και k οι αριθμοί των υπαρχουσών κλήσεων στην ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης και στην ζεύξη τελικής διόδευσης, αντιστοίχως.



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμησης γραμμών (3)

Θέτοντας $r = s_1 - s_2$, το σύστημα περιγράφεται ως εξής:

- (1) Η προσφερομένη τυχαία κίνηση (α_0) στην οδό υψηλής εκμετάλλευσης (s_0) διεκπεραιώνεται απ' αυτήν αν $j < s_0$, διαφορετικά αν $j \geq s_0$ υπερρέει στην εναλλακτική οδό.
- (2) Στην εναλλακτική οδό (s_1), οι κλήσεις της τυχαίας κίνησης (α_1) εξυπηρετούνται ως κλήσεις προτεραιότητας αν $k < s_1$ ή φράσσονται και εγκαταλείπουν αμέσως το δίκτυο αν $k \geq s_1$. Οι κλήσεις της κίνησης υπερροής (b) εξυπηρετούνται αν $k < r$ ή φράσσονται και χάνονται αν $k \geq r$.



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμησης γραμμών (4)

Συμβολίζοντας τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως για φορτία α_0 και α_1 , ως B_0 και B_1 αντιστοίχως, αυτές υπολογίζονται ως εξής:

$$B_0 = P_0 \frac{s_1!}{a_1^{s_1}} \sum_{j=r}^{s_1} \frac{\alpha_1^j}{j!}, \quad B_1 = P_1 \frac{a_1^{s_1}}{s_1!} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^r \quad (28)$$

όπου:

$$P_0 = \left[\frac{a_0 s_1!}{a_1^{s_1}} \sum_{j=r}^{s_1} \frac{a_1^j}{j! b(s_0 + j, a)} + \frac{a_1 s_0!}{a_0^{s_0}} \sum_{j=0}^{s_0} \frac{a_0^j}{j! b(s_1 + j, a)} \right]^{-1}$$

$$P_1 = \left[\sum_{j=0}^r \frac{a_2^j}{j!} + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^r \sum_{j=r+1}^{s_1} \frac{a_1^j}{j!} \right]^{-1} \quad (29)$$

και $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1 + b(s_0, \alpha_0)$.



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμευσης γραμμών (5)

Ο βέλτιστος σχεδιασμός που θα καθιστά ελάχιστο το συνολικό κόστος του συστήματος έχοντας ως προδιαγραφή ένα κοινό βαθμό εξυπηρέτησης για τα φορτία κίνησης α_0 και α_1 , γίνεται με παρόμοιο τρόπο αλλά με την βοήθεια της μεθόδου δέσμευσης γραμμών.

Για μια προκαθορισμένη κοινή πιθανότητα απωλείας κλήσεως B , έχουμε τους περιορισμούς ότι:

$$g_0 = B_0 - B = 0, \quad g_1 = B_1 - B = 0 \quad (30)$$

Η συνάρτηση του σχετικού κόστους του συστήματος είναι:

$$f = s_0 + ks_1 \quad (31)$$



Βέλτιστος σχεδιασμός βάσει του συστήματος δέσμησης γραμμών (6)

Η συνθήκη που καθιστά ελάχιστο το f υπό τους περιορισμούς (30) είναι:

$$k = \frac{B_{11}B_{02} - B_{01}B_{12}}{B_{10}B_{02} - B_{00}B_{12}} \quad (32)$$

όπου το k ορίζεται από την σχέση (15) και τα $B_{ij} = \partial B_i / \partial s_j$ ($i, j = 0, 1, 2$) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις (μερικές) παραγώγους της Erlang B-formula (26), (27).



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (1)

Όποιο κι αν είναι το κριτήριο διαστασιολόγησης των συστημάτων εξυπηρέτησης (π.χ. η πιθανότητα απωλείας κλήσεως ή ο μέσος χρόνος αναμονής) προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερους ρυθμούς άφιξης έχουμε, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόδοση (efficiency) του εξυπηρετητή. Αυτή η παρατήρηση είναι ένα καλό πρόσχημα για την συγκέντρωση της κίνησης, αλλά η συγκέντρωση με την σειρά της οδηγεί σε συγκρούσεις με άλλες απαιτήσεις.

Σκεφτείτε π.χ. μια περιοχή με έναν αριθμό τηλεφωνικών κέντρων L_1, \dots, L_m . Είναι δυνατόν να διασυνδέσουμε πολυγωνικώς αυτά τα κέντρα και να σχηματίσουμε ένα δίκτυο. Στην πολυγωνική αυτή σύνδεση δέσμες απ' ευθείας γραμμών παρέχονται μεταξύ κάθε ζεύγους κέντρων. Αφ' ενός μεν η κίνηση θα δρομολογείται μέσω της συντομότερης διαδρομής, αφ' ετέρου όμως πολλές από αυτές τις δέσμες θα μεταφέρουν μικρή κίνηση και έτσι θα έχουν μικρές αποδόσεις.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (2)

Μία άλλη περίπτωση είναι η σύνδεσή τους σε δίκτυο υπό μορφή αστέρα. Όλα τα κέντρα συνδέονται σε ένα κεντρικό κόμβο C μέσω δύο δεσμών γραμμών, μία για κάθε κατεύθυνση.

Έτσι μία σύνδεση $L_i \rightarrow L_j$ δρομολογείται ως $L_i \rightarrow C \rightarrow L_j$.

Χρησιμοποιείται έτσι μεγάλο μήκος καλωδίου, αλλά οι ομάδες των γραμμών είναι λιγότερες, μεταφέρουν περισσότερη κίνηση και έτσι η απόδοση είναι καλύτερη απ' ό,τι στο πολυγωνικό δίκτυο.

Η συνηθισμένη πρακτική είναι ένας συμβιβασμός μεταξύ αυτών των δύο μορφών δικτύου. Δημιουργείται ένα δίκτυο αστέρα στο οποίο προστίθενται ομάδες απ' ευθείας γραμμών μεταξύ των κέντρων που έχουν περισσότερες συναλλαγές (π.χ. γειτονικές πόλεις).



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (3)

Μία κλήση $L_i \rightarrow L_j$ θα χρησιμοποιήσει, αν υπάρχει, μια ελεύθερη απ' ευθείας γραμμή $L_i \rightarrow L_j$. Όταν καμμία απ' ευθείας γραμμή δεν είναι ελεύθερη, τότε χρησιμοποιείται η εναλλακτική διαδρομή $L_i \rightarrow C \rightarrow L_j$.

Η κίνηση που ακολουθεί αυτή η δρομολόγηση λέγεται **κίνηση υπερροής (overflow traffic)**. Όλες οι κινήσεις υπερροής που απορρέουν από το κέντρο L_i μοιράζονται την χρήση της ομάδας γραμμών $L_i \rightarrow C$. Γι' αυτό τις καλούμε κοινές γραμμές.

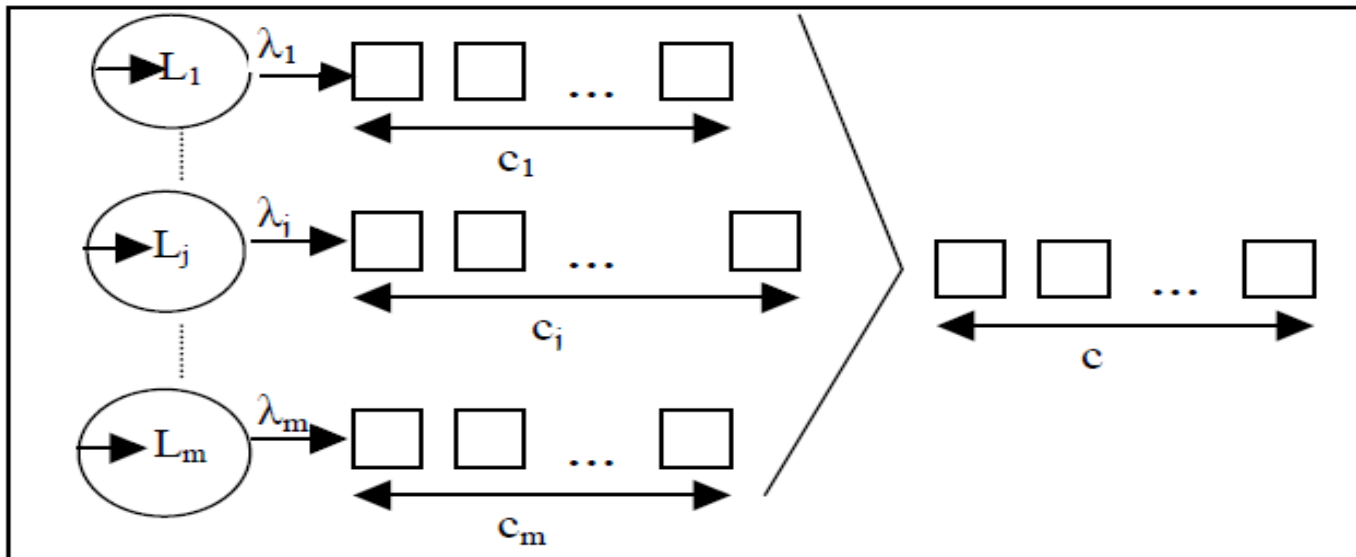
Οι απ' ευθείας γραμμές δεν χρειάζεται να είναι πολυάριθμες. Έτσι στις απ' ευθείας δέσμες γραμμών μπορούμε να έχουμε καλύτερες αποδόσεις, απ' ό,τι στην περίπτωση του πολυγωνικού δικτύου. Οι σχετικά μικρές υπερροές από το κέντρο L_i ομαδοποιούνται και δρομολογούνται μέσω της ζεύξης $L_i \rightarrow C$. Στην κοινή αυτή δέσμη γραμμών θα διαχειρισθούμε τις συνολικές κινήσεις προς τα κέντρα L_j όταν δεν είναι εφικτές οι απ' ευθείας ζεύξεις από το L_i .

Η συγκέντρωση όλων αυτών των κινήσεων στην δέσμη γραμμών $L_i \rightarrow C$, παράγει και μια καλή απόδοση και γι' αυτές τις γραμμές.



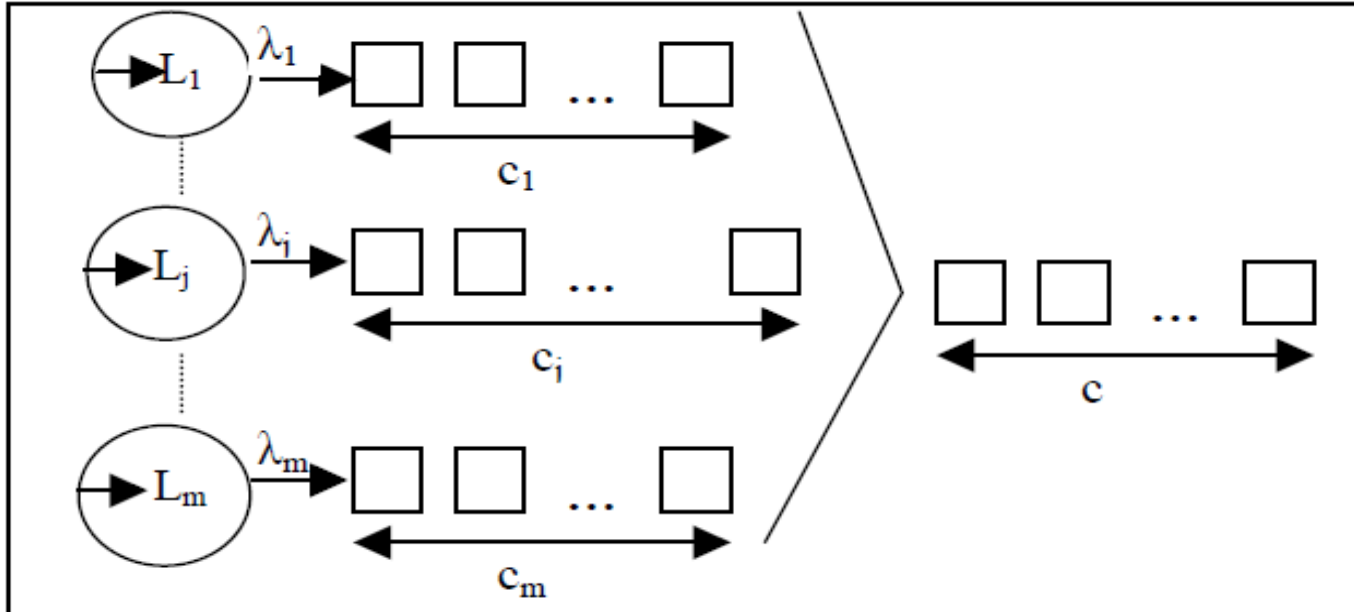
Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (4)

Τώρα βέβαια μπορεί να δημιουργηθεί η απορία: Τι ποσοστό της κίνησης $L_i \rightarrow L_j$, βρίσκει κατειλημμένες και τις δύο δέσμες γραμμών, τόσο την απ' ευθείας δέσμη γραμμών $L_i \rightarrow L_j$ (αν παρέχεται) όσον και την δέσμη των κοινών γραμμών $L_i \rightarrow C$; Ας υποθέσουμε ότι το κέντρο L_i παράγει ροές κίνησης προς άλλα κέντρα L_1, \dots, L_m (εκτός του L_i) με ρυθμούς άφιξης $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Αυτές οι κινήσεις επιτάσσουν c_1, \dots, c_m απ' ευθείας γραμμές. Επιπλέον υπάρχουν C κοινές γραμμές $L_i \rightarrow C$ για να εξυπηρετήσουν την κίνηση υπερροής (βλ. σχήμα όπου το τετράγωνο συμβολίζει μια γραμμή).



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (5)

Κλήσεις μπορούν να καταλάβουν μία ελεύθερη κοινή γραμμή μόνο όταν όλες οι γραμμές c_j της απ' ευθείας ζεύξης $L_i \rightarrow L_j$ είναι κατειλημμένες. Έστω ότι δεν υπάρχει ουρά αναμονής. Σ' αυτό το σχέδιο εξυπηρέτησης δεν έχουμε πια πλήρη διαθεσιμότητα των εξυπηρετητών, αφού οι απ' ευθείας γραμμές δεν είναι διαθέσιμες σ' όλες τις κλήσεις αλλά μόνο σε ένα μέρος αυτών. Γι' αυτό και το σύστημα αυτό λέγεται **σύστημα περιορισμένης διαθεσιμότητας (restricted availability system)**.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (6)

Μια άλλη αιτία ύπαρξης της περιορισμένης διαθεσιμότητας μπορεί να είναι και η εξής:

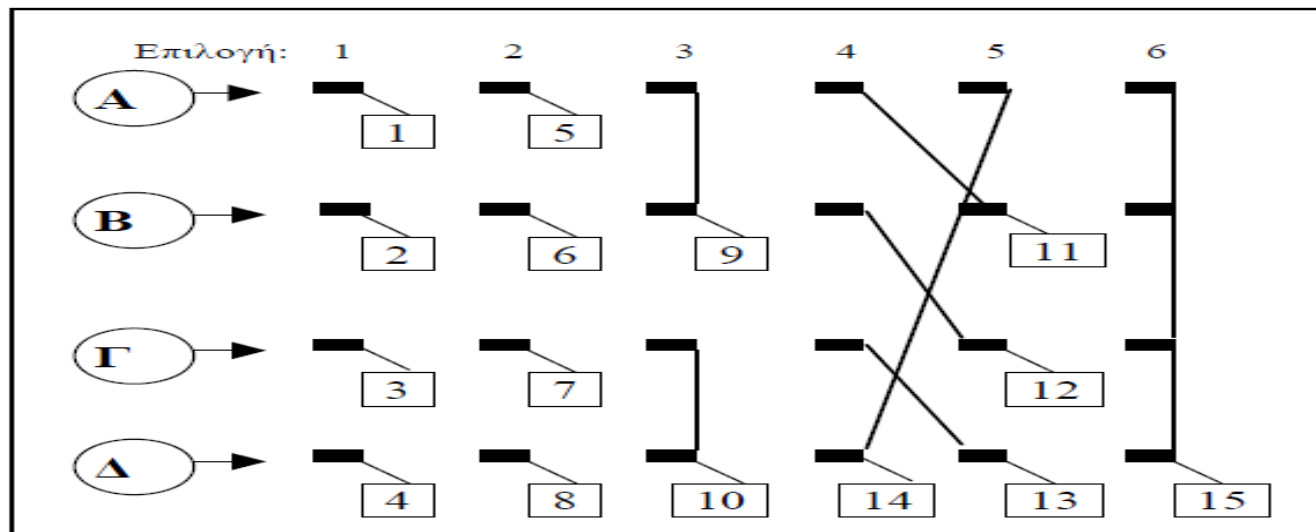
Όταν έχουμε μεγάλο φορτίο κίνησης απαιτείται και μεγάλος αριθμός εξυπηρετητών. Όμως μπορεί να υπάρξουν τεχνικά εμπόδια, για να γίνουν και οι c εξυπηρετητές διαθέσιμοι σε όλες τις κλήσεις. Σε πολλές περιπτώσεις μια κλήση δεν μπορεί να αποκτήσει πρόσβαση σε περισσότερους από k ($< c$) εξυπηρετητές. Η διαθεσιμότητα είναι περιορισμένη στο k (π.χ. 10 ή 20 στην τηλεφωνία), όπως λέμε.

Είναι δε πρακτικό, να χωρίσουμε την ομάδα των κλήσεων, σε έναν αριθμό υποομάδων όπου κάθε μία θα έχει τις δικές της k επιλογές ανάμεσα στους c εξυπηρετητές. Κλήσεις από μια τέτοια ομάδα, χρησιμοποιούν βασικά μια δέσμη γραμμών πρώτης επιλογής και αν αυτή είναι (πλήρως) κατειλημμένη προσπαθούν στη δεύτερη κ.τ.λ. Αν και οι k επιλογές είναι κατειλημμένες τότε η κλήση χάνεται.



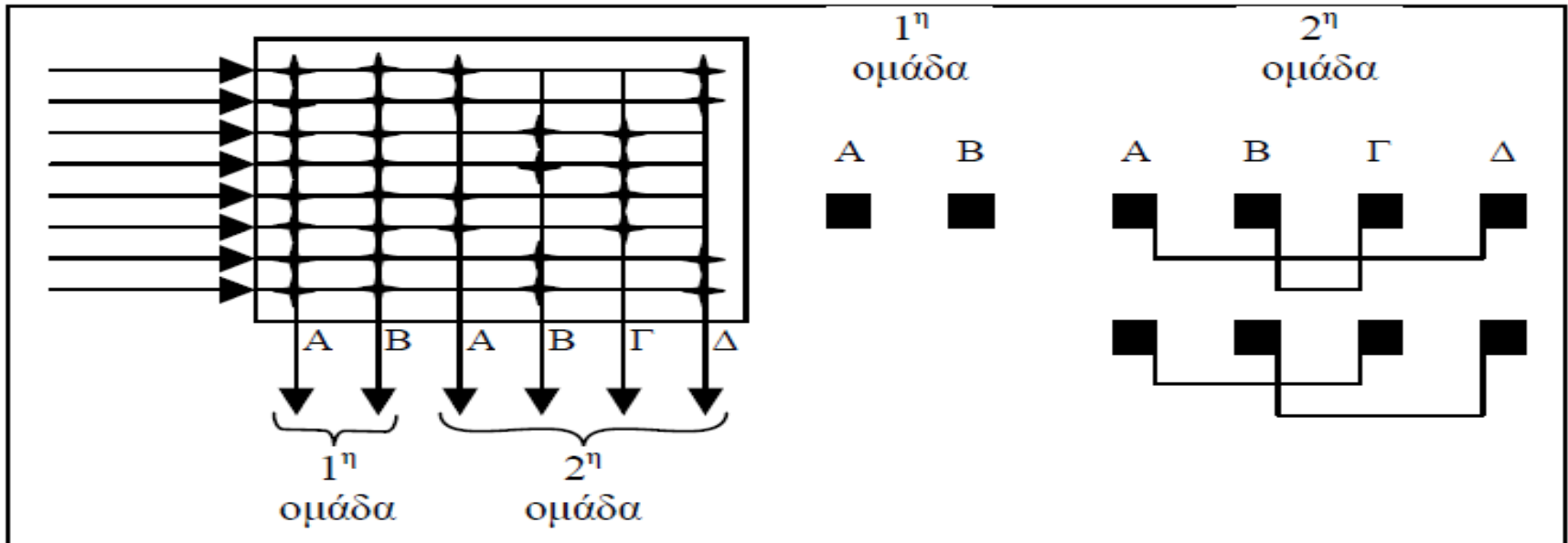
Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (7)

Εξ αιτίας της σειράς αναζήτησης ελεύθερης γραμμής σε μια δέσμη γραμμών, οι πρώτες επιλογές θα έχουν περισσότερη κίνηση απ' ό,τι οι τελευταίες (βλ. σχήμα). Λόγω αυτού του γεγονότος, εφαρμόζεται κοινή χρήση των τελευταίων επιλογών, ώστε να αυξηθεί η απόδοση των εξυπηρετητών που εμφανίζονται σ' αυτές τις επιλογές. Έτσι έχουμε τις λεγόμενες **βαθμώσεις ή κλιμακώσεις (gradings)** στην χρήση των εξυπηρετητών. Το σχήμα δείχνει την κλιμάκωση της χρήσης των εξυπηρετητών. Στις δύο πρώτες επιλογές έχουμε αποκλειστική χρήση των εξυπηρετητών από κάθε ομάδα κλήσεων, στις επόμενες τρεις επιλογές έχουμε εν μέρει κοινούς εξυπηρετητές και στην τελευταία επιλογή έχουμε κοινούς εξυπηρετητές.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (8)

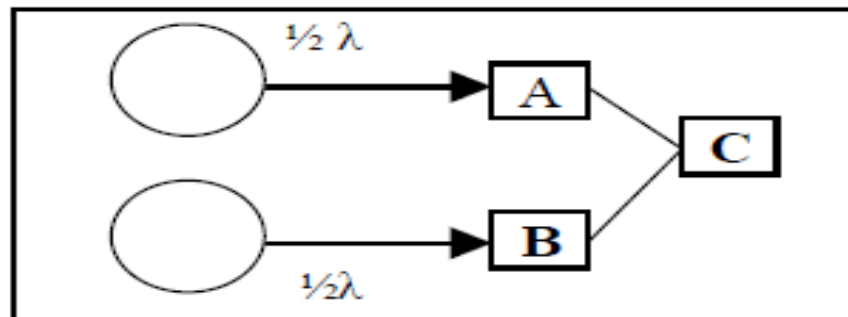
Άλλο παράδειγμα βαθμώσεων παρουσιάζεται παρακάτω: Ένας διακόπτης έχει 8 εισερχόμενες γραμμές και 6 εξερχόμενες. Ο διακόπτης αυτός είναι ένα σύστημα περιορισμένης διαθεσιμότητας. Για να βάλουμε κάποια τάξη στην χρήση των 6 εξόδων χρησιμοποιούμε το εξής σχέδιο κλιμάκωσης: Διακρίνουμε δύο ομάδες εξόδων. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από 2 εξερχόμενες γραμμές πλήρους προσιτότητας και η δεύτερη ομάδα από 4 γραμμές με διαθεσιμότητα (προσιτότητα) 2. Η βάρθρωση παρίσταται συνήθως με απλά σχέδια όπως στο δεξιό μέρος του σχήματος.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (9)

Παράδειγμα 3 – Ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως.

Θεωρούμε το σύστημα εξυπηρέτησης περιορισμένης διαθεσιμότητας του σχήματος και υποθέτουμε εκθετική κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Παρότι το σύστημα έχει τρεις εξυπηρετητές A, B και C, υποθέτουμε ότι οι κλήσεις έχουν πρόσβαση μόνον σε δύο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι οι κλήσεις χωρίζονται σε δύο ομάδες και ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων κάθε ομάδας είναι $\frac{1}{2}\lambda$. Οι κλήσεις της 1^{ης} ομάδας οδεύουν προς τους A και C ενώ της 2^{ης} ομάδας προς τους B και C. Αν και οι δύο εξυπηρετητές κάθε ομάδας κλήσεων είναι κατειλημμένοι, οι κλήσεις χάνονται. Συμβολίζουμε τους μη απησχολημένους εξυπηρετητές με παύλες και τους κατειλημμένους με αστερίσκους.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (10)

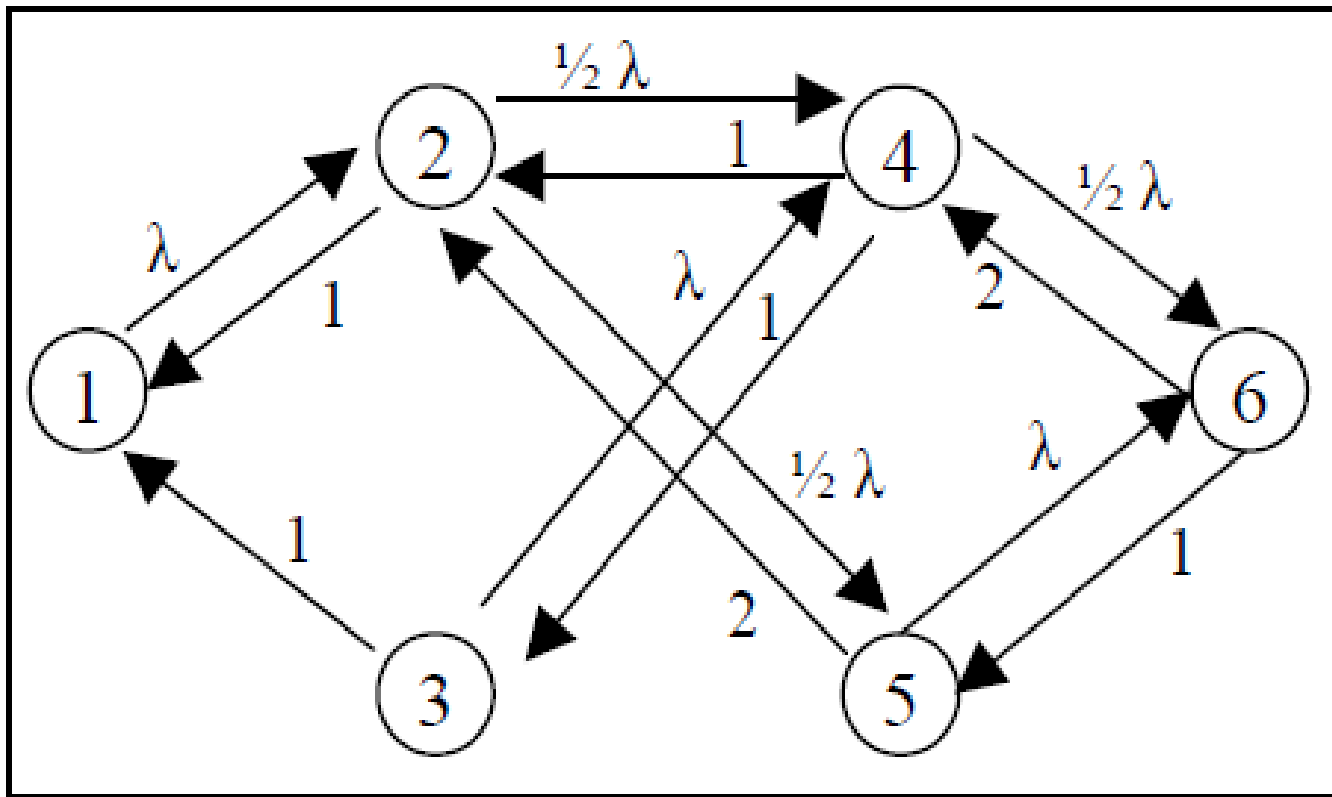
Στο πίνακα περιγράφουμε τις καταστάσεις του συστήματος και δηλώνουμε τις πιθανότητες μονίμων καταστάσεων. Συνδυασμοί που είναι ισοπίθανοι (λόγω συμμετρίας) παίρνονται μαζί για να μορφοποιήσουν μια κατάσταση.

Κατάσταση	Περιγραφή	Πιθανότητα
[1]	$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$	P_1
[2]	$\begin{bmatrix} * & - \\ - & - \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} - & - \\ * & - \end{bmatrix}$	P_2
[3]	$\begin{bmatrix} - & - \\ - & * \end{bmatrix}$	P_3
[4]	$\begin{bmatrix} * & - \\ - & * \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} - & * \\ * & * \end{bmatrix}$	P_4
[5]	$\begin{bmatrix} * & - \\ * & - \end{bmatrix}$	P_5
[6]	$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$	P_6



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (11)

Το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων του συστήματος αυτού φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (12)

Από το διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων, εφαρμόζοντας την σχέση της σφαιρικής ισορροπίας για κάθε κατάσταση, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$$0 = -\lambda p_1 + 1p_2 + 1p_3$$

$$0 = \lambda p_1 - (0.5\lambda + 0.5\lambda + 1)p_2 + 1p_4 + 2p_5$$

$$0 = -(\lambda + 1)p_3 + 1p_4$$

$$0 = 0.5\lambda p_2 + \lambda p_3 - (0.5\lambda + 2)p_4 + 2p_6 \quad (33)$$

$$0 = 0.5\lambda p_2 - (\lambda + 2)p_5 + 1p_6$$

$$0 = 0.5\lambda p_4 + \lambda p_5 - 3p_6$$

$$\text{και } p_1 + \dots + p_6 = 1 \quad (34)$$

Διαγράφοντας μια εξίσωση από το σύστημα (33), το σύστημα (33), (34) μπορεί να λυθεί αριθμητικά (6 εξισώσεις με 6 αγνώστους). Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{B} = 0.5p_4 + 1p_6 \quad (35)$$

αφού χάνεται το 50% των κλήσεων από την κατάσταση 4 και το 100% των κλήσεων από την κατάσταση 6.



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (13)

Για $\lambda = 1$, το σύστημα των 6 εξισώσεων με τους 6 αγνώστους γίνεται:

System of equations:

$$\begin{cases} -1 p_1 + 1 p_2 + 1 p_3 + 0 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 = 0 \\ 1 p_1 + -2 p_2 + 0 p_3 + 1 p_4 + 2 p_5 + 0 p_6 = 0 \\ 0 p_1 + 0 p_2 + -2 p_3 + 1 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 = 0 \\ 1 p_1 + 1 p_2 + 1 p_3 + 1 p_4 + 1 p_5 + 1 p_6 = 1 \\ 0 p_1 + 0.5 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4 + -3 p_5 + 1 p_6 = 0 \\ 0 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + 0.5 p_4 + 1 p_5 + -3 p_6 = 0 \end{cases}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ INTERNET: *linear system of equations matrix calculator* (google search)

Π.χ. <https://matrixcalc.org/en/slu.html>

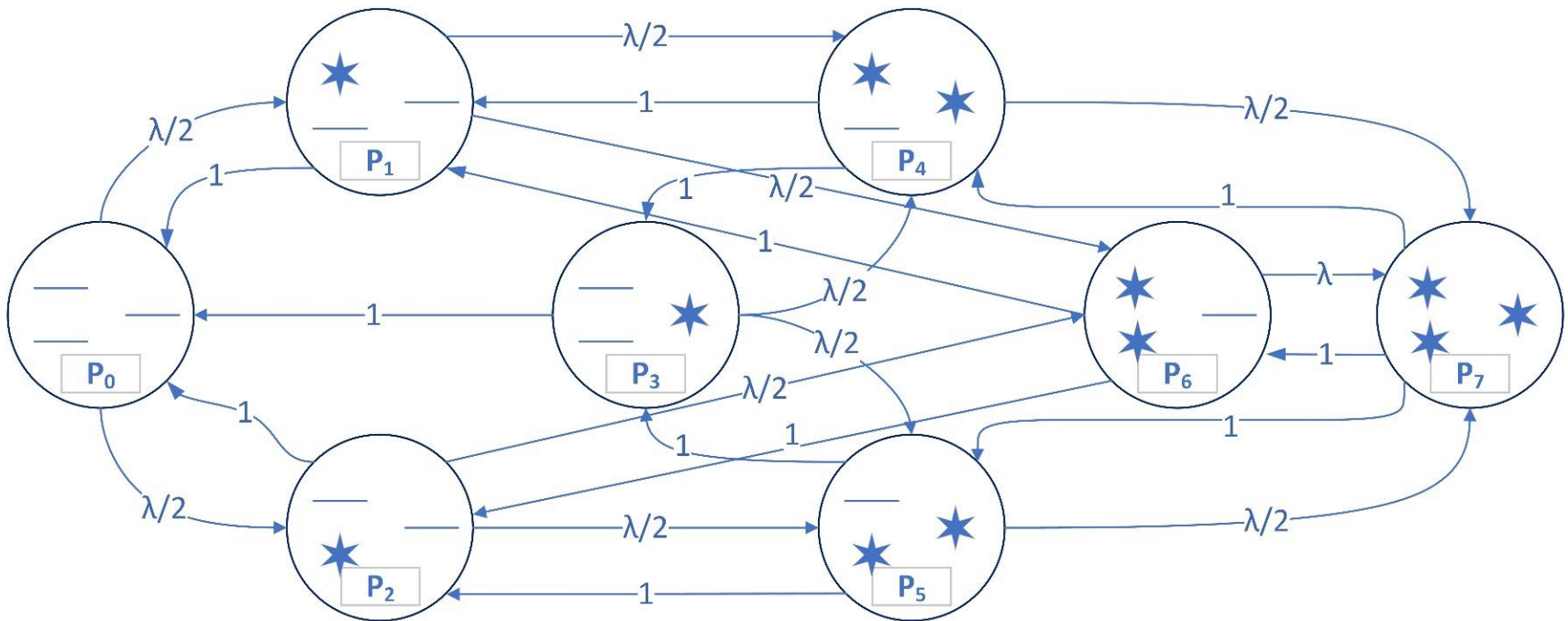
$$p_1 = 0.383, p_2 = 0.321, p_3 = 0.062, p_4 = 0.123, p_5 = 0.068, p_6 = 0.043 \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = 0.5p_4 + p_6 = 0.1045 = \mathbf{10.45 \%}$$



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (14)

- Αν δεν ενοποιήσουμε καταστάσεις σε αυτό το σύστημα περιορισμένης διαθεσιμότητας, τότε προκύπτει το ακόλουθο **state transition diagram**:



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (15)

Επομένως, χωρίς να ενοποιήσουμε τις καταστάσεις στο σύστημα αυτό, βάσει του διαγράμματος μεταπτώσεων των καταστάσεων, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα 8 εξισώσεων (με 8 αγνώστους):

System of equations:

$$\begin{cases}
 1 p_0 + -1 p_1 + -1 p_2 + -1 p_3 + 0 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 + 0 p_7 = 0 \\
 -0.5 p_0 + 2 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + -1 p_4 + 0 p_5 + -1 p_6 + 0 p_7 = 0 \\
 -0.5 p_0 + 0 p_1 + 2 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4 + -1 p_5 + -1 p_6 + 0 p_7 = 0 \\
 0 p_0 + 0 p_1 + 0 p_2 + 2 p_3 + -1 p_4 + -1 p_5 + 0 p_6 + 0 p_7 = 0 \\
 0 p_0 + -0.5 p_1 + 0 p_2 + -0.5 p_3 + 2.5 p_4 + 0 p_5 + 0 p_6 + -1 p_7 = 0 \\
 0 p_0 + 0 p_1 + -0.5 p_2 + -0.5 p_3 + 0 p_4 + 2.5 p_5 + 0 p_6 + -1 p_7 = 0 \\
 0 p_0 + -0.5 p_1 + -0.5 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4 + 0 p_5 + 3 p_6 + -1 p_7 = 0 \\
 1 p_0 + 1 p_1 + 1 p_2 + 1 p_3 + 1 p_4 + 1 p_5 + 1 p_6 + 1 p_7 = 1
 \end{cases}$$

Η λύση του οποίου είναι (<https://matrixcalc.org/en/slu.html>):

$p_0=0.383$, $p_1=0.160$, $p_2=0.160$, $p_3=0.062$, $p_4=0.062$, $p_5=0.062$, $p_6=0.068$, $p_7=0.043$, και:

$$B = 0.5p_4 + 0.5p_5 + p_7 = 0.1045 = 10.45 \% (!!!)$$



Συστήματα περιορισμένης διαθεσιμότητας (16)

Όταν οι βαθμώσεις γίνονται πολύπλοκες ή όταν η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης διαφέρει, το σύστημα των εξισώσεων γίνεται πολύ δύσκολο.

Όταν υπάρχουν c εξυπηρετητές, όταν δεν υπάρχει συμμετρία και οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν κατανομή Erlang- k , ο αριθμός των εξισώσεων είναι $(k+1)^c$, δηλαδή πάρα πολύ μεγάλος για πρακτικά προβλήματα.

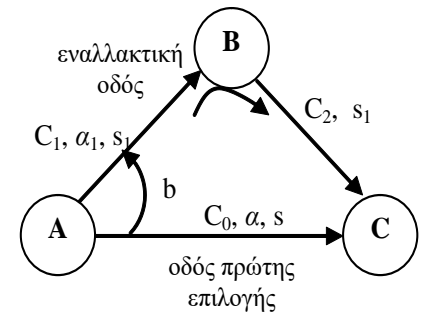
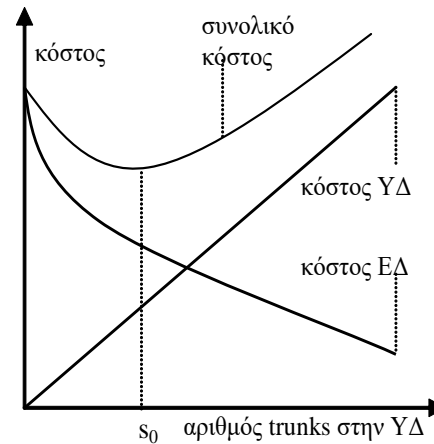
Ο ακριβής λοιπόν υπολογισμός των πιθανοτήτων απωλείας κλήσεως στις περιπτώσεις περιορισμένης διαθεσιμότητας δεν είναι δυνατός, εκτός των πολύ απλών συστημάτων.

Σε πρακτικά προβλήματα χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι όπως π.χ. είναι η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως που ανέπτυξε ο R.I. Wilkinson (1955/56) για την επίλυση του προβλήματος της κίνησης υπερροής σε σύστημα εναλλακτικής δρομολόγησης.



Άσκηση βέλτιστου σχεδιασμού συστήματος αναμονής

Το σχήμα (δεξιά) έχει ευρύτερη ανάγνωση. Το κόστος εξυπηρέτησης ΥΔ μπορεί να είναι ανάλογο του αριθμού των εξυπηρετητών ($C_0 \times s$) και να παρίσταται με την ευθεία «κόστος ΥΔ», το δε «κόστος ΕΔ» στην εναλλακτική διαδρομή, να παριστά κόστος εξαρτώμενο από την συνολική καθυστέρηση των κλήσεων στο σύστημα εξυπηρέτησης, και άρα από την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής και στους εξυπηρετητές: $L + \alpha$, δηλ. κόστος στην ΕΔ = $C_1 \cdot (L + \alpha)$, όπου το L είναι συνάρτηση των s και του προσφερομένου φορτίου κίνησης α , ενώ το C_1 εκφράζει το κόστος της καθυστέρησης ανά μονάδα χρόνου για κάθε κλήση (πελάτη). Το συνολικό κόστος θα είναι:
 $f = C_0 s + C_1(L + \alpha)$.



Ζητείται να ευρεθεί η τιμή του s που καθιστά ελάχιστο το f , αν πρόκειται για σύστημα αναμονής $M/M/s$ με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, μέσο ρυθμό άφιξης 15 κλήσεις / min και μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης ανά εξυπηρετητή (trunk) 10 κλήσεις / min.
Δίδεται: $C_0 = 2$ μονάδες (ευρώ) / trunk και $C_1 = 5$ μονάδες (ευρώ) / trunk.



ΛΥΣΗ

- Κατ' αρχήν πρέπει $\alpha < s \Rightarrow s > \lambda / \mu \Rightarrow s > 15 / 10 \Rightarrow s \geq 2$, ώστε το σύστημα να ευρίσκεται σε ευσταθή κατάσταση. Ακολουθώντας, αρχίζοντας με $s = 2$ υπολογίζουμε το L βάσει των τύπων,

$$L = \sum_{r=s}^{\infty} (r-s) P_r = \frac{\alpha^s}{s!} P_0 \sum_{r=0}^{\infty} r \left(\frac{\alpha}{s}\right)^r = M(0) \frac{\alpha}{s-\alpha} \quad M(0) = \sum_{r=s}^{\infty} P_r = \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha} P_0 = \frac{\frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha}}{\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha}}$$

(ή <http://www.site2241.net/erlang.htm> για το $M(0)$)

Για $s = 2$, $\alpha = 1.5$ έχουμε:

$$M(0) = \frac{\frac{(1.5)^2}{2!} \frac{2}{2-1.5}}{1+1.5 + \frac{(1.5)^2}{2!} \frac{2}{2-1.5}} = \frac{\frac{2.25}{0.5}}{2.5 + \frac{2.25}{0.5}} = \frac{4.5}{7} = 0.64286 \quad \text{και} \quad L = 0.64286 \frac{1.5}{2-1.5} = 1.9286$$

Άρα $C_1(L + \alpha) = 5(1.9286 + 1.5) = 17.143$, $C_0 s = 4$ και $f = 21.143$



ΛΥΣΗ

Έτσι παίρνουμε τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα:

Αριθμός trunks s	$L + \alpha$	Κόστος καθυστέρησης	Κόστος trunks	Συνολικό κόστος
2	3.4286	17.143	4	21.143
3	1.7368	8.684	6	14.684
4	1.5448	7.724	8	15.724
5	1.5086	7.543	10	17.543

ώστε να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος f συναρτήσει του s .

- Άρα το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος γίνεται ελάχιστο όταν $s = 3$.



Τέλος Ενότητας