ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 10: Προσέγγιση μειωμένου φορτίου

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

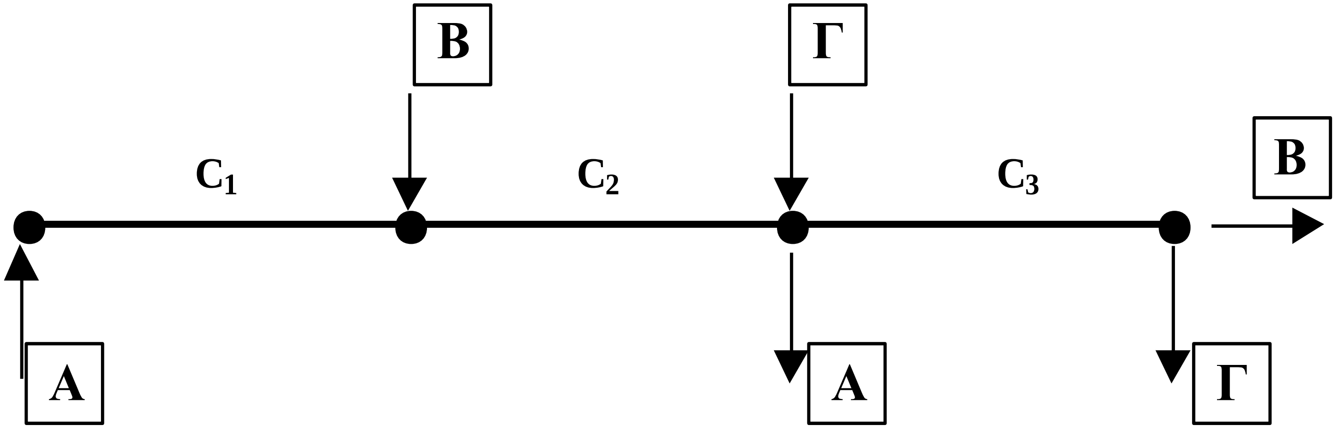
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και ανάλυση της προσεγγιστικής μεθόδου του μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα
- Περιγραφή και ανάλυση της προσεγγιστικής μεθόδου του μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών

Περιεχόμενα ενότητας

- Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα
- Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών
- Παράδειγμα δικτύου



Το «όριο γινομένου» για τηλεφωνικά δίκτυα (1)

Έστω ότι το τηλεπικοινωνιακό δίκτυο υποστηρίζει κλήσεις μιας υπηρεσίας, όπως είναι η περίπτωση των τηλεφωνικών δικτύων όπου $b_k=1$, $k \in K$. Έστω $E_C(\alpha)$ ότι είναι η πιθανότητα απωλείας κλήσεως για ένα σύστημα απωλειών (Erlang) με προσφερόμενη κίνηση α και C εξυπηρετητές. Ισχύει:

$$E_C(\alpha) = \frac{\frac{\alpha^C}{C!}}{\sum_{c=0}^{C} \frac{\alpha^c}{c!}}$$

Ορίζουμε ως $\overline{\alpha_j}$ το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην j ζεύξη:

$$\overline{\alpha_j} = \sum_{k \in K_j} \alpha_k \qquad \textbf{(12)}$$

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει ένα απλό άνω όριο για την πιθανότητα απωλείας κλήσεως όταν η κλήση διεκπεραιώνεται μέσω μιας διαδρομής με αυθαίρετο αριθμό ζεύξεων.

Το «όριο γινομένου» για τηλεφωνικά δίκτυα (2)

Θεώρημα 3

Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως για μια κατηγορία κλήσεων k περιορίζεται από το όριο, το οποίο καλείται **όριο γινομένου (product bound)** (άρθρο [3]):

$$B_k \le 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - E_{C_j}(\overline{\alpha_j})\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Σε εφαρμογές στις οποίες το όριο είναι μικρό και οι διαδρομές των κλήσεων μικρές, η (13) είναι μια άριστη προσέγγιση της πιθανότητας απωλείας κλήσεως. <u>Όταν όμως οι διαδρομές είναι μεγάλες, η προσέγγιση αυτή δίδει μη αξιόπιστα αποτελέσματα</u>.

[3] W. Whitt, *“Blocking when Service is required from Several Facilities Simultaneously”*, AT&T Technical Journal, No.64, 1985.

Το «όριο γινομένου» για τηλεφωνικά δίκτυα (3)

Παράδειγμα (μη αξιοπιστίας της (13))

Έστω η περίπτωση όπου όλες οι ζεύξεις έχουν την ίδια χωρητικότητα C και έστω ότι υπάρχει μόνο μια κατηγορία κλήσεων που χρησιμοποιεί όλες τις ζεύξεις. Έχουμε δηλαδή ότι $\alpha_j = \alpha_1$ για όλες τις ζεύξεις j=1,...,J.

Το όριο γινομένου,

$$B_k \leq 1 - \left(1 - E_C(a_1)\right)^J \qquad \textbf{(14)}$$

μπορεί να φθάσει πολύ κοντά στην μονάδα αυξάνοντας το J ενώ η πραγματική πιθανότητα απωλείας κλήσεως είναι $E_C(\alpha_1)$ για όλες τις ζεύξεις!!

Το «όριο γινομένου» για τηλεφωνικά δίκτυα (4)

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι το όριο γινομένου είναι ένα άνω όριο, επομένως είναι λογικό να αναζητήσουμε μικρότερες τιμές, οι οποίες θα δίδουν καλύτερες προσεγγίσεις.

Μια τέτοια προσέγγιση είναι να μειώσουμε το φορτίο κίνησης $\overline{\alpha_j}$ στην ζεύξη j, λαμβάνοντας υπόψη τις απώλειες στις άλλες ζεύξεις.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **προσέγγιση μειωμένου φορτίου (reduced load approximation)** και μελετάται ακολούθως!

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (1)

Έστω ένα τηλεφωνικό δίκτυο (δίκτυο απωλειών μορφής γινομένου) το οποίο υποστηρίζει μια μόνο υπηρεσία, δηλαδή ένα δίκτυο όπου b_k=1 για όλες τις κλήσεις.

Βάσει του θεωρήματος 3 (ανωτέρω), η πιθανότητα η ζεύξη j να είναι κατειλημμένη έχει ως άνω όριο:

$$E_{C_j}(\overline{\alpha_j}) = E_{C_j}\left(\sum_{k \in K_j} \alpha_k\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή το αποτέλεσμα αυτό είναι ένα άνω όριο της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, προσεγγίζουμε τις απώλειες της ζεύξης j, μειώνοντας τα α_k στην (1) ώστε να λάβουμε υπόψη μας τις απώλειες στις υπόλοιπες ζεύξεις (εκτός της j).

Αντικαθιστούμε λοιπόν το α_k της έκφρασης (1) με $\alpha_k t_k(j)$ όπου $t_k(j)$ είναι η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμη τουλάχιστον μια μονάδα εύρους ζώνης σε κάθε ζεύξη (εκτός της j) της διαδρομής που ακολουθεί μια κλήση κατηγορίας k.

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (2)

Ορίζοντας με L_j την προσεγγιστική πιθανότητα η ζεύξη j να είναι πλήρως κατειλημμένη έχουμε:

$$L_j = E_{C_j}\left(\sum_{k \in K_j} \alpha_k t_k(j) \right) \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης, αν υποθέσουμε (λανθασμένα!!!) ότι οι απώλειες είναι ανεξάρτητες από ζεύξη σε ζεύξη τότε:

$$t_k(j) = \prod_{i \in R_k - \{j\}} (1 - L_i) \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις (3), (4) προκύπτει η (5) , η οποία καλείται **εξίσωση σταθερού σημείου (fixed-point equation)**, και η οποία ικανοποιείται από τις προσεγγιστικές πιθανότητες απωλείας κλήσεως στις ζεύξεις $L_1,\ldots, L_j$:

$$L_j = E_{C_j}\left(\sum_{\kappa \in K_j} \alpha_\kappa \prod_{i \in R_\kappa - \{j\}} (1 - L_i) \right) \quad j = 1,\ldots,J \qquad \textbf{(4)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (3)

Θεωρώντας εκ νέου την υπόθεση της ανεξαρτησίας των ζεύξεων, έχουμε την παρακάτω προσέγγιση για τις απώλειες των κλήσεων της κατηγορίας k:

$$B_k \approx 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - L_j\right), \quad k = 1, \ldots, K \qquad \textbf{(5)}$$

Οι (4) και (5) συνθέτουν την **προσέγγιση μειωμένου φορτίου (reduced load approximation),** η οποία συναντάται στην διεθνή βιβλιογραφία και ως **«Erlang fixed point equation».**

Προτού προχωρήσουμε σε ένα παράδειγμα τονίζουμε ότι, η μέθοδος του μειωμένου φορτίου <u>είναι προσεγγιστική μέθοδος διότι</u>:

(α) Βασίζεται στην υπόθεση ότι οι απώλειες είναι ανεξάρτητες από ζεύξη σε ζεύξη.

(β) Λαμβάνεται υπόψη μόνο η μείωση του φορτίου κίνησης μιας ζεύξης, λόγω απωλειών στις υπόλοιπες.

(γ) Η προσφερομένη κίνηση σε όλες τις ζεύξεις μιας διαδρομής δεν είναι Poisson.

Για καλή η ακρίβεια, πρέπει να υπάρχει μεγάλος αριθμός κλήσεων σε κάθε ζεύξη και μικρός αριθμός κλάδων στην ζεύξη.

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (4)

Αν και υπάρχουν παραδείγματα αυτής της μεθόδου στα οποία η μέθοδος δεν συγκλίνει, ωστόσο για τα περισσότερα δίκτυα πρακτικού ενδιαφέροντος η μέθοδος συγκλίνει σ’ ένα μοναδικό σταθερό σημείο (unique fixed point) το οποίο ικανοποιεί την σχέση:

$$L_j^* \le E_{C_j}\left(\overline{\alpha_j}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

όπου $\overline{\alpha_j} = \sum_{k \in K_j} \alpha_k$ και επειδή:

$$B_k \approx 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - L_j\right) \qquad \textbf{(7)}$$

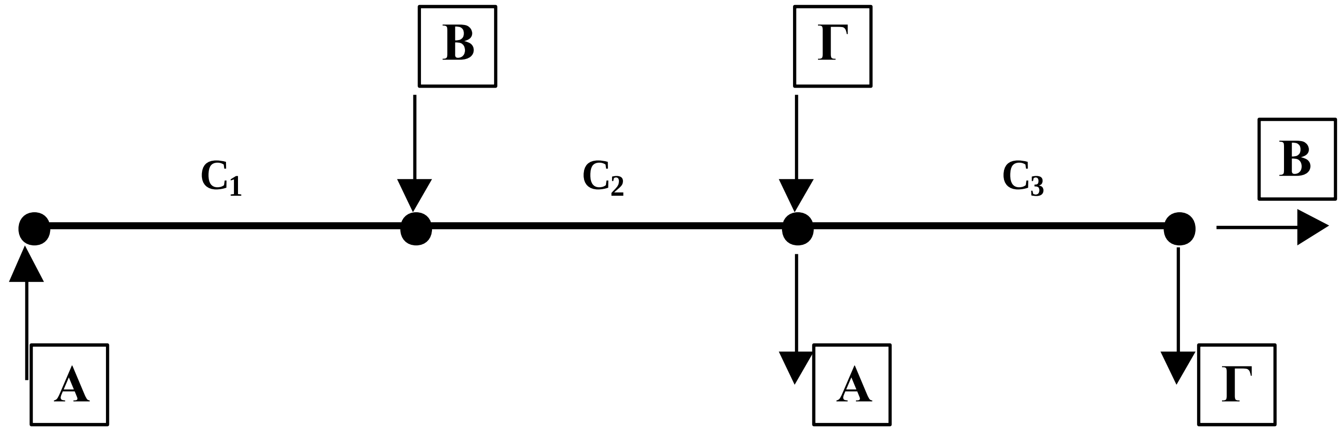
έχουμε τελικά:

$$1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - L^*{}_j\right) \le 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - E_{C_j}\left(\overline{\alpha_j}\right)\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (5)

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το τηλεφωνικό δίκτυο του σχήματος το οποίο αποτελείται από τρεις ζεύξεις C_1, C_2, C_3 και εξυπηρετεί τρεις συνδέσεις (διαδρομές) Α, Β, Γ. Η χωρητικότητα των ζεύξεων είναι $C_1=C_2=C_3=15$ trunks ενώ το προσφερόμενο φορτίο κίνησης $\alpha_A=\alpha_B=\alpha_C=5$ erl. Να εφαρμόσετε την προσέγγιση μειωμένου φορτίου προκειμένου να υπολογίσετε τις τιμές blocking B_A, B_B, B_Γ.



Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (6)

Λύση

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση μειωμένου φορτίου στο δίκτυο αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} L_1 &= E_{C_1}\left(\alpha_A t_A(1)\right), \\ L_2 &= E_{C_2}\left(\alpha_A t_A(2) + \alpha_B t_B(2)\right), \\ L_3 &= E_{C_3}\left(\alpha_B t_B(3) + \alpha_\Gamma t_\Gamma(3)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

$$t_A(1) = 1 - L_2,\ t_A(2) = 1 - L_1,\ t_B(2) = 1 - L_3,\ t_B(3) = 1 - L_2,\ t_\Gamma(3) = 1$$

Άρα: $L_1 = E_{C_1}\left(\alpha_A(1-L_2)\right),\ L_2 = E_{C_2}\left(\alpha_A(1-L_1)+\alpha_B(1-L_3)\right),\ L_3 = E_{C_3}\left(\alpha_B(1-L_2)+\alpha_\Gamma\right)$

και

$$\begin{aligned} B_A &\approx 1-(1-L_1)(1-L_2), \\ B_B &\approx 1-(1-L_2)(1-L_3), \\ B_\Gamma &\approx 1-(1-L_3) \end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (7)

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (9) και (10), εφαρμόζουμε την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο.

Θέτουμε $L_1=L_2=L_3=1$, (υποθέτουμε δηλαδή ότι η πιθανότητα απωλείας κλήσεως σε κάθε ζεύξη είναι 100%).

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στις σχέσεις (9) και αφού υπολογίσουμε τα νέα L_1, L_2, L_3, αντικαθιστούμε τις τιμές τους στις σχέσεις (10) με σκοπό να υπολογίσουμε τις απώλειες για κάθε σύνδεση (για κάθε διαδρομή).

Εν συνεχεία αντικαθιστούμε τα L_1, L_2, L_3 εκ νέου στις εξισώσεις (9) κ.ο.κ.

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (8)

Πιο αναλυτικά, για $L_1=L_2=L_3=1$ η νέα τριάδα τιμών είναι $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0.000157$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις σχέσεις (10) έχουμε: $B_A \approx 1$, $B_B \approx 0.000157$, $B_\Gamma \approx 0.000157$.

Εν συνεχεία αντικαθιστούμε τις τιμές $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0.000157$ στις σχέσεις (9) οπότε η νέα τριάδα τιμών είναι $L_1=0.000157$, $L_2=0.036466$, $L_3=0.180316$.

Με βάση τις τιμές αυτές υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες απωλείας κλήσεως σε κάθε διαδρομή:

$$B_A \approx 0.036618, \quad B_B \approx 0.210207, \quad B_\Gamma \approx 0.180316.$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα (9)

Θέτοντας ως κριτήριο τερματισμού αυτής της διαδικασίας, οι επόμενες από τις προηγούμενες τιμές των L_1, L_2, L_3 να διαφέρουν λιγότερο από 0.00001, παρατηρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει μετά από 8 επαναλήψεις (βλ. πίνακα).

Επανάληψη	L_1	L_2	L_3	B_A	B_B	B_Γ
1	0.000000	0.000000	0.000157	1.000000	0.000157	0.000157
2	0.000157	0.036466	0.180316	0.036618	0.210207	0.180316
3	0.000013	0.010778	0.168421	0.010791	0.177384	0.168421
4	0.000020	0.019001	0.176808	0.019021	0.192450	0.176808
5	0.000018	0.011104	0.176442	0.011122	0.185557	0.176442
6	0.000018	0.011138	0.176701	0.011156	0.185871	0.176701
7	0.000018	0.011114	0.176690	0.011133	0.185841	0.176690
8	**0.000018**	**0.011158**	**0.176698**	**0.011176**	**0.185885**	**0.176698**

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (1)

Θεωρούμε μια ζεύξη χωρητικότητας C στην οποία καταφθάνουν κλήσεις από διάφορες κατηγορίες κλήσεων (από το σύνολο K_j) που προσφέρουν φορτίο κίνησης γ_l, $l \in K_j$ και απαιτούν εύρος ζώνης b_l, $l \in K_j$. Ορίζουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως της κατηγορίας k, ως:

$$Q_k\left[C;\gamma_l, l \in K_j\right] = 1 - \sum_{c=0}^{C-b_k} q(c) \qquad \textbf{(11)}$$

όπου q(c) η πιθανότητα να έχουμε c κατειλημμένες γραμμές στην κατάσταση ισορροπίας.

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (2)

Ορίζουμε ως L_{jk} την προσεγγιστική πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από b_k μονάδες εύρους ζώνης ελεύθερες στην ζεύξη j. Υποθέτουμε μάλιστα ότι τα γεγονότα αυτά είναι ανεξάρτητα από ζεύξη σε ζεύξη και οι κλήσεις της κατηγορίας l φθάνουν στην ζεύξη j σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με προσφερόμενο φορτίο κίνησης:

$$\alpha_l \prod_{i \in R_l - \{j\}} \left(1 - L_{il}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

Λόγω της υπόθεσης της ανεξαρτησίας των ζεύξεων, ισχύει:

$$L_{jk} = Q_k\left[C_j;\, \alpha_l \prod_{i \in R_l - \{j\}} (1 - L_{il}),\ l \in K_j\right], k \in K_j,\, j = 1, \ldots, J \qquad \textbf{(13)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (3)

Όπως και για την περίπτωση των δικτύων μίας υπηρεσίας έτσι και εδώ χρησιμοποιούμε την τεχνική των επαναλαμβανομένων αντικαταστάσεων. Προσεγγίζουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως για την κατηγορίας k ως εξής:

$$B_k \approx 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - L_{jk}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

Στην συνέχεια, θα δείξουμε μέσω ενός παραδείγματος ότι η γενίκευση της προσέγγισης μειωμένου φορτίου δεν έχει πάντοτε μοναδική λύση.

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (4)

Παράδειγμα

Θεωρήστε ένα δίκτυο το οποίο αποτελείται από C ζεύξεις με χωρητικότητα C μονάδες εύρους ζώνης ανά ζεύξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν στο δίκτυο C+1 κατηγορίες κλήσεων όπου η κατηγορία k, k=1,...,C, χρησιμοποιεί μόνο την ζεύξη k, απαιτεί C μονάδες εύρους ζώνης από την ζεύξη k και το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι α_w (**ευρείας ζώνης υπηρεσία - wideband**). Οι κλήσεις της κατηγορίας C+1 απαιτούν μια μονάδα εύρους ζώνης από τις C ζεύξεις και το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι α_n (**στενής ζώνης υπηρεσία - narrowband**). Αν α είναι το προσφερόμενο φορτίο κίνησης των κλήσεων στενής ζώνης σε μια ζεύξη αφού έχει μειωθεί (από α_n) λόγω των απωλειών στις προηγούμενες C-1 ζεύξεις, η προσέγγιση μειωμένου φορτίου δίνει:

$$\alpha = \alpha_n \left[1 - q(C)\right]^{C-1} \qquad \textbf{(15)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (5)

Παράδειγμα (συνέχεια)

όπου

$$q(C) = \frac{\dfrac{\alpha^C}{C!} + \alpha_w}{\displaystyle\sum_{c=0}^{C} \frac{\alpha^c}{c!} + \alpha_w} \qquad \textbf{(16)}$$

Συνδυάζοντας τις (15) και (16) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση σταθερού σημείου (fixed point equation):

$$\alpha = \alpha_n \frac{\displaystyle\sum_{c=0}^{C-1} \frac{\alpha^c}{c!}}{\displaystyle\sum_{c=0}^{C} \frac{\alpha^c}{c!} + \alpha_w} \qquad \textbf{(17)}$$

Προσέγγιση μειωμένου φορτίου για δίκτυα πολλαπλών υπηρεσιών (6)

Η (17) δεν έχει πάντοτε μοναδική λύση για το α.

Π.χ., αν $α_w$=1, $α_n$=10 και C=10 τότε έχουμε τρεις διαφορετικές λύσεις: 0.125, 1.417 και 6.205.

Οι αντίστοιχες προσεγγίσεις για τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως των υπηρεσιών στενής και ευρείας ζώνης είναι (0.999, 0.505), (0.886, 0.805) και (0.412, 0.998).

Οι πολλαπλές λύσεις στις εξισώσεις σταθερού σημείου μπορεί να προειδοποιήσουν τον σχεδιαστή του δικτύου για πιθανές αστάθειες.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό αυτό το σημείο παρατηρήστε ότι το δίκτυο του παραδείγματος εναλλάσσεται μεταξύ μεγάλων περιόδων που μεταφέρει μόνο κλήσεις στενής ζώνης και μεγάλων περιόδων που μεταφέρει μόνο κλήσεις ευρείας ζώνης.

Αντανακλώντας αυτή την έμφυτη αστάθεια, η προσέγγιση μειωμένου φορτίου δίνει μια λύση με περίπου 100% απώλεια των κλήσεων στενής ζώνης και μια λύση με περίπου 100% απώλεια των κλήσεων ευρείας ζώνης.

Τέλος Ενότητας