# Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

## Ενότητα 5: Μαρκοβιανό σύστημα αναμονής M/M/s


Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

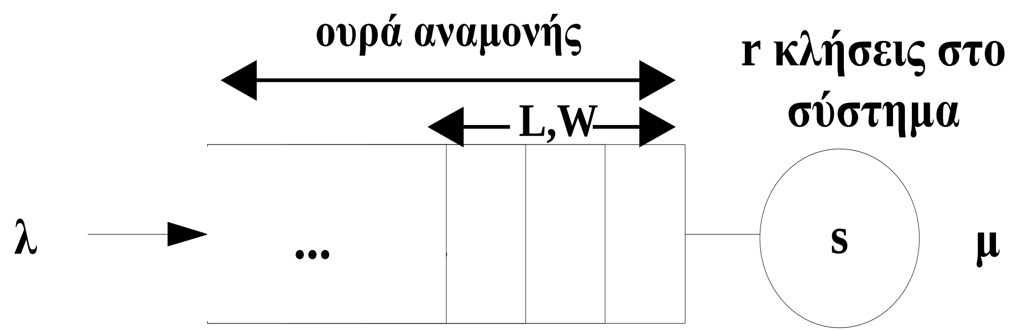
- Περιγραφή και ανάλυση του Μαρκοβιανού συστήματος αναμονής M/M/s

# Περιεχόμενα ενότητας

- Σύστημα αναμονής M/M/s
- Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s (Erlang C formula)
- Κατανομή του χρόνου αναμονής σε σύστημα M/M/s
- Παραδείγματα

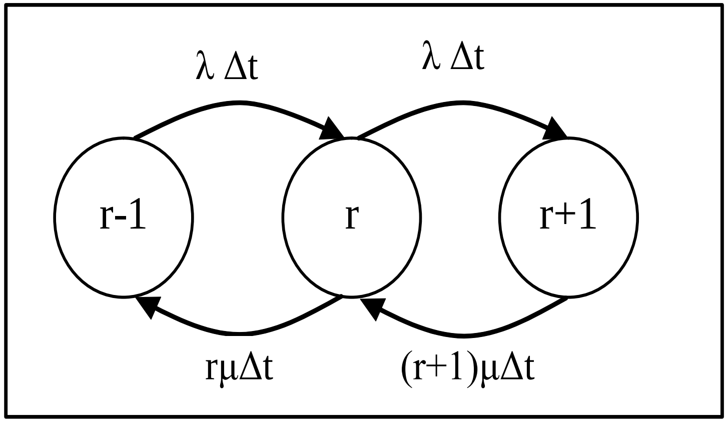
# Σύστημα αναμονής M/M/s (1)

Έστω το σύστημα αναμονής M/M/s του σχήματος με είσοδο Poisson, εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης, s εξυπηρετητές, και άπειρες θέσεις αναμονής, στις οποίες όλες οι κλήσεις παραμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν κατά μέρον όρον επί χρόνον W. L είναι το πλήθος των κλήσεων στην ουρά αναμονής, κατά μέσον όρον ενώ λ και μ είναι ο ρυθμός άφιξης και εξυπηρέτησης, αντίστοιχα.

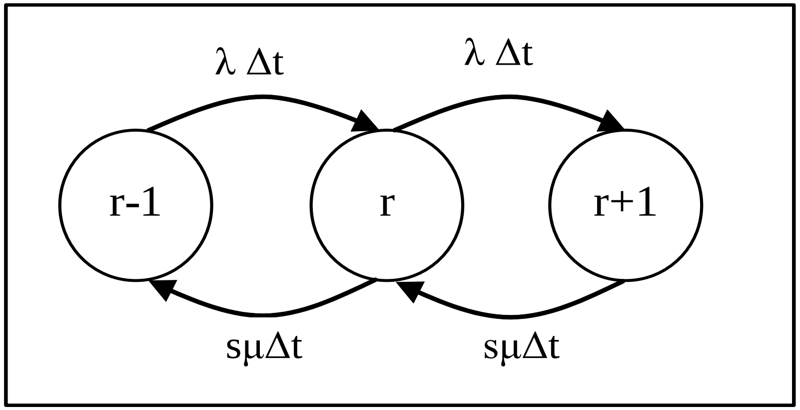


# Σύστημα αναμονής M/M/s (2)

Στα σχήματα α, β που ακολουθούν, παρατηρούμε τα διαγράμματα μεταπτώσεως των καταστάσεων για το σύστημα M/M/s. Το διάγραμμα (α) για r < s είναι ισοδύναμο με αυτό του M/M/s(0). Όμως, στο διάγραμμα (β) για r ≥ s, όταν s κλήσεις εξυπηρετούνται και οι εναπομείνασες (r-s) κλήσεις παραμένουν στην ουρά αναμονής, η πιθανότητα να τερματίσει μια κλήση σε χρόνο Δt, είναι sμΔt (ανεξάρτητη του r).




(α)




(β)

# Σύστημα αναμονής M/M/s (3)

Αν υπάρχει σταθερή κατάσταση, τότε από την σχέση *ρυθμός εξόδου = ρυθμός εισόδου*, έχουμε τις εξισώσεις μονίμου καταστάσεως:

$$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1}, \quad r < s \qquad \textbf{(1α)}$$

$$(\lambda+ s\mu)P_r = \lambda P_{r-1}+s\mu P_{r+1}, \quad r \geq s \qquad \textbf{(1β)}$$

Λύνοντας τις (1) όμοια με την περίπτωση του συστήματος απωλειών M/M/s, και θέτοντας α=λ/μ παίρνουμε:

- ✓ Για r < s: $$P_r = \frac{\alpha^r}{r!} P_0 \qquad \textbf{(2α)}$$

- ✓ Για r≥s: $$P_r = \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{r-s} P_0 \qquad \textbf{(2β)}$$

# Για r < s:

$r=0 \qquad \cancel{\lambda P_0} = \cancel{\mu P_1}$

$r=1 \qquad \cancel{\lambda P_1} + \cancel{\mu P_1} = \cancel{\lambda P_0} + \cancel{2\mu P_2}$

$r=2 \qquad \cancel{\lambda P_2} + \cancel{2\mu P_2} = \cancel{\lambda P_1} + \cancel{3\mu P_3}$

$r=3 \qquad \cancel{\lambda P_3} + \cancel{3\mu P_3} = \cancel{\lambda P_2} + \cancel{4\mu P_4}$

...

$r=r-1 \qquad \lambda P_{r-1} + \cancel{(r-1)\mu P_{r-1}} = \cancel{\lambda P_{r-2}} + r\mu P_r$

αθροίζοντας κατά μέλη, λαμβάνομε:

$$\lambda P_{r-1} = r\mu P_r \rightarrow P_r = (\lambda/\mu)\, P_{r-1}/r \rightarrow P_r = (\alpha/r)\, P_{r-1} = (\alpha/r)(\alpha/(r-1))P_{r-2} = \alpha^2/r(r-1)\, P_{r-2}$$

$$\rightarrow P_r = \frac{\alpha^r}{r!} P_0$$

# Για r≥s:

Για r≥s, υποθέτουμε τοπική ισορροπία, και προσέχουμε μήπως οδηγηθούμε σε άτοπον:

$s\mu P_r = \lambda P_{r-1} \rightarrow P_r = (\alpha/s) P_{r-1}$

| | |
|---|---|
| $r=s$ | $P_s = P_{s+0} = (\alpha/s)P_{s-1} = (\alpha/s)(\alpha^{s-1}/(s-1)!)P_0 = (\alpha^s/s!)P_0 = (\alpha/s)^0(\alpha^s/s!)P_0$ |
| $r=s+1$ | $P_{s+1} = (\alpha/s)P_s = (\alpha/s)(\alpha^s/s!)P_0$ |
| $r=s+2$ | $P_{s+2} = (\alpha/s)P_{s+1} = (\alpha/s)^2(\alpha^s/s!)P_0$ |
| $r=s+3$ | $P_{s+3} = (\alpha/s)P_{s+2} = (\alpha/s)^3(\alpha^s/s!)P_0$ |
| … | |
| $r=s+i$ | $P_{s+i} = (\alpha/s)^i(\alpha^s/s!)P_0$ |

γενικώς: $P_r = \dfrac{\alpha^s}{s!}\left(\dfrac{\alpha}{s}\right)^{r-s} P_0$ (3

# Σύστημα αναμονής M/M/s (4)

Αν $\{P_r\}$ είναι η κατανομή πιθανότητας στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, τότε πρέπει να ισχύει (συνθήκη κανονικοποίησης):

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r = P_0 \left[ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{s} \right)^r \right] = 1$$

(για r = s μέχρι $\infty$ , θέσαμε r $\leftarrow$ r-s)

Αν α<s το δεύτερο άθροισμα στην αγκύλη συγκλίνει σε:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{s} \right)^r = \frac{s}{s - \alpha}$$

οπότε:

$$P_0 = \left( \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha} \right)^{-1} \qquad \textbf{(3)}$$

# Σύστημα αναμονής M/M/s (5)

Στην προηγούμενη διαφάνεια εξετάσαμε την περίπτωση $\alpha<s$.

Αν $\alpha \geq s$ το άθροισμα αποκλίνει και έχουμε $P_0=0$ που σημαίνει ότι η $\{P_r\}$ δεν υπάρχει. Στην πραγματικότητα, όταν δεν χάνεται καμία κλήση σε ένα σύστημα αναμονής, αυτό σημαίνει ότι όλο το προσφερόμενο φορτίο α erl διεκπεραιώνεται. Πάντως, όταν s γραμμές μπορούν να μεταφέρουν μόνο s erl και $\alpha \geq s$, οι κλήσεις που αναμένουν γίνονται άπειρες και το σύστημα αποκλίνει, και έτσι δεν υπάρχει σταθερή κατάσταση λειτουργίας.

Το διεκπεραιούμενο φορτίο ανά εξυπηρετητή, $\rho=\alpha/s$, καλείται **παράγοντας αξιοποίησης (utilization factor)** ή απόδοση των trunks (όπως στα συστήματα απωλειών).

Γενικώς είναι γνωστό ότι ένα σύστημα αναμονής έχει μια σταθερή κατάσταση αν και μόνο αν $\rho<1$.

# Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s (Erlang C formula) (1)

Ως **πιθανότητα αναμονής (queuing probability)** ορίζεται η πιθανότητα ότι μια κλήση θα περιμένει στην ουρά αναμονής προτού εξυπηρετηθεί και συμβολίζεται με M(0), συμβολισμός που δείχνει την πιθανότητα ο χρόνος αναμονής > 0. Μια εισερχόμενη κλήση θα μπει στην ουρά αναμονής αν ο αριθμός των υπαρχουσών κλήσεων δεν είναι μικρότερος από s. Άρα:

$$M(0)=\sum_{r=s}^{\infty}P_r=\frac{\alpha^s}{s!}\frac{s}{s-\alpha}P_0=\frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}\dfrac{s}{s-\alpha}}{\sum_{r=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^r}{r!}+\dfrac{\alpha^s}{s!}\dfrac{s}{s-\alpha}} \qquad \textbf{(4)}$$

η οποία είναι γνωστή ως **Erlang C formula**.

# Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s (Erlang C formula)   (2)

Η (4) γράφεται ως συνάρτηση της Erlang B formula, ως ακολούθως:

$$M(0) = \frac{sE_s(\alpha)}{s - \alpha\left[1 - E_s(\alpha)\right]} \qquad \textbf{(5)}$$

η οποία είναι βολική στους υπολογισμούς.

Η (5) προκύπτει από την (4) αν διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της (4) με τον όρο:

$$\sum_{r=0}^{s} \frac{a^r}{r!}$$

# Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s (Erlang C formula) (3)

Η μέση τιμή των κλήσεων αναμονής δίνεται από την σχέση:

$$L = \sum_{r=s}^{\infty}(r-s)P_r = \frac{\alpha^s}{s!}P_0\sum_{r=0}^{\infty} r\left(\frac{\alpha}{s}\right)^r = M(0)\frac{\alpha}{s-\alpha} \qquad \textbf{(6)}$$

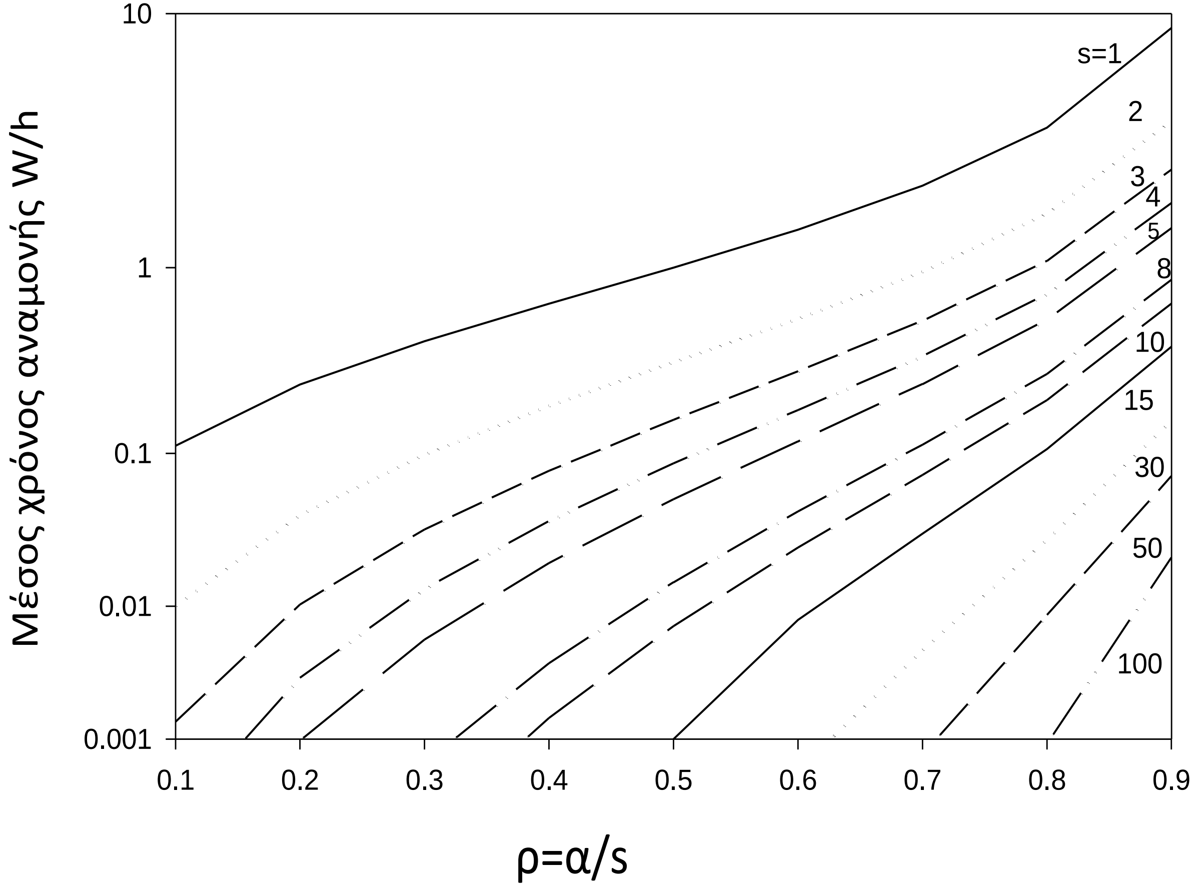
Επίσης, από τον νόμο του Little, υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής W ως εξής:

$$W=L/\lambda=M(0)h/(s-\alpha) \qquad \textbf{(7)}$$

όπου $h=\mu^{-1}$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και $\alpha=\lambda/\mu$ το προσφερόμενο φορτίο κίνησης.

# Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s (Erlang C formula) (4)

Το σχήμα που ακολουθεί δείχνει τον μέσο χρόνο αναμονής W/h σε σύστημα αναμονής M/M/s συναρτήσει του λόγου ρ=α/s και για διάφορες τιμές του s.



# Κατανομή του χρόνου αναμονής σε σύστημα M/M/s (1)

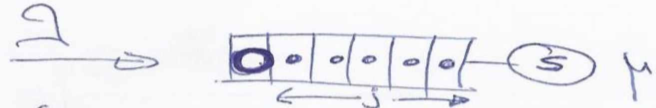
- Για την εκτίμηση της κατανομής του χρόνου αναμονής, υποθέτουμε ως πειθαρχία στην ουρά αναμονής την FIFO (First In First Out).
- Μαρκάρουμε αυθαίρετα μια κλήση ως κλήση υπό παρακολούθηση (δοκιμαστική κλήση).
- Υπολογίζουμε πρώτα την πιθανότητα $q_j$ ότι πριν από την δοκιμαστική κλήση αναμένουν ήδη j κλήσεις. Με άλλα λόγια υπολογίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $q_j$, ότι j κλήσεις αναμένουν στην ουρά, δεδομένου ότι η κλήση δοκιμής αναμένει:

$$q_j = P_{s+j} / M(0) = (1-\rho)\rho^j, \quad j = 0,1,.... \qquad \textbf{(8)}$$

- Η (8) είναι μια **γεωμετρική κατανομή (geometric distribution)** ($\rho=\alpha/s<1$).

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i)$$




$$q_j \equiv \left( j \text{ calls are waiting} \,/\, \text{test call has to wait} \right)$$

$$q_j = \frac{P_{s+j}}{M(0)} \qquad P\left(\begin{matrix} j \text{ calls are} \\ \text{waiting}\end{matrix} \,\Big/\, \begin{matrix}\text{test call} \\ \text{has to wait}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix} j \text{ calls are} \\ \text{waiting}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{test call} \\ \text{has to wait}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{test call} \\ \text{has to wait}\end{matrix}\right)}$$

$$= \frac{P\left(\begin{matrix} j \text{ calls are} \\ \text{waiting}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{test call} \\ \text{has to wait}\end{matrix}\right)} = \frac{P_{s+j}}{M(0)}$$

$$P_{s+j} = \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{s+j-s} P_0 =$$

$$= \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{j} P_0 \quad \text{"}\alpha_r\text{"} \ \frac{\alpha}{s} = \rho \Rightarrow q_j = \frac{P_{s+j}}{M(0)} = \frac{\frac{\alpha^s}{s!}\rho^j P_0}{\frac{\alpha^s}{s!}\frac{s}{s-\alpha} P_0} = \frac{\rho^j}{\frac{s}{s-\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_j = \frac{s-\alpha}{s}\rho^j = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)\cdot \rho^j = \underline{\underline{(1-\rho)\cdot \rho^j}} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

geometric distribution

$$P_{s+j} = M(0)(1-\rho)\rho^j$$

$$Q_j(t) = P\left(\overset{\text{delay}}{\begin{matrix}\text{test call has to} \\ \text{wait longer than } t\end{matrix}} \,/\, \begin{matrix} j \text{ call are} \\ \text{waiting}\end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} e^{-s\mu t}\frac{(s\mu t)^k}{k!}$$

total Probability theory

$$M(t) = P\left(\text{delay} > t \,/\, \begin{matrix} j \text{ calls} \\ \text{are waiting}\end{matrix}\right) = \sum_j P(j \text{ calls are waiting})\, P\left(\begin{matrix}\text{delay} > t / \\ j \text{ calls} \\ \text{are waiting}\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(t) P_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{s+j} \sum_{k=0}^{j} e^{-s\mu t}\frac{(s\mu t)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} M(0)(1-\rho)\rho^j \sum_{k=0}^{j} e^{-s\mu t}\frac{(s\mu t)^k}{k!} = M(0)\cdot(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{(s\mu t)^k}{k!}\rho^j =$$

$$= M(0)(1-\rho)e^{-s\mu t}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{j+k}\frac{(s\mu t)^k}{k!} = M(0)(1-\rho)e^{-s\mu t}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho s\mu t)^k}{k!} =$$

$$= M(0)(1-\rho)e^{-s\mu t}\frac{1}{1-\rho}e^{\rho s\mu t} = M(0)e^{-s\mu t}e^{\rho s\mu t} = M(0)e^{-(1-\rho)s\mu t}$$

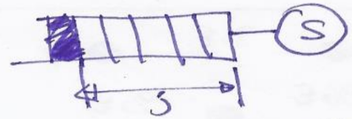
$$P_z = \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{z-s} P_0 \rightsquigarrow P_{s+j} = \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{j} P_0$$

$$\cancel{P_{s+j} = \frac{\alpha^{s+j}}{(s+j)!}}$$

$$M(0) = \frac{\alpha^s}{s!}\,\frac{s}{s-\alpha}\,P_0$$

$$\Rightarrow \frac{P_{s+j}}{M(0)} = \frac{\left(\frac{\alpha}{s}\right)^j}{\frac{s}{s-\alpha}}$$

$$\frac{P_{s+j}}{M(0)} = \left(\frac{\alpha}{s}\right)^j\left(1-\frac{\alpha}{s}\right) = \rho^j(1-\rho)$$




$$q_j = P(\overset{B}{\text{j calls wait}} \,/\, \text{test call wait})$$

$$Q_j = P(\overset{A}{\text{test call waits longer than t}} \,/\, \overset{B}{\text{j calls wait}})$$


τερματίζει 1 από τις S μέ $s\mu\Delta t$ πιθανότητα

K κλήσεις τερματίζουν μέ Poisson κατανομή μέ μέσον $s\mu t$.

$$Q_j(t) = e^{-s\mu t}\sum_{k=0}^{j}\frac{(s\mu t)^k}{k!}$$

$$P(A\cap B) = P(A/B)\,P(B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)$$

$$P_{s+j} = M(0)\,\rho^j(1-\rho)$$

$$M(t) = P(\text{waiting time} > t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(t)\,q_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \cancel{Q_j}\,(1-\rho)\rho^j e^{-s\mu t}\sum_{k=0}^{j}\frac{(s\mu t)^k}{k!}$$

$$\sum_{z=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{z} f(z,k) = \sum_{z=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(z+k,k)$$

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j(1-\rho)e^{-s\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s\mu t)^k}{k!} = M(0)\,e^{-(1-\rho)s\mu t}$$

---

$$Q_j(t) = e^{-s\mu t}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(s\mu t)^k}{k!} \qquad M(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j(1-\rho)e^{-s\mu t}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(s\mu t)^k}{k!} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j\sum_{i=j+1}^{\infty} e^{-s\mu t}\frac{(s\mu t)^i}{i!} = e^{-s\mu t}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \lambda h\\ \alpha &= \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}\right\} h = \frac{1}{\mu} \quad \mu = \frac{1}{h}$$

# Κατανομή του χρόνου αναμονής σε σύστημα M/M/s (2)

Έστω ότι η αρχή μέτρησης του χρόνου είναι η χρονική στιγμή άφιξης της δοκιμαστικής κλήσης. Δεδομένου ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, αν s κλήσεις εξυπηρετούνται, η πιθανότητα να τερματίσει μια κλήση σε χρόνο [t, t+Δt] είναι sμ Δt. Επομένως, η πιθανότητα $P_k(t)$ να τερματίσουν k κλήσεις εντός του χρονικού διαστήματος (0,t] ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή sμt.

Αφού η δοκιμαστική κλήση εισέρχεται προς εξυπηρέτηση, μετά από τις j κλήσεις αναμονής, η πιθανότητα $Q_j(t)$ ότι η δοκιμαστική κλήση θα αναμένει περισσότερο χρόνον από t, δεδομένου ότι j κλήσεις αναμένουν πριν απ' αυτήν, εκφράζεται από το άθροισμα της κατανομής Poisson:

$$Q_j = \sum_{k=0}^{j} P_k(t) = e^{-s\mu t} \sum_{k=0}^{j} \frac{(s\mu t)^k}{k!} \qquad \textbf{(9)}$$

# Κατανομή του χρόνου αναμονής σε σύστημα M/M/s (3)

Η συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής του χρόνου αναμονής M(t) (δηλ. η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής να ξεπεράσει τον χρόνο t) υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας, ως εξής:

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(t) \mathrm{P}_{\mathrm{s+j}} = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(t) \mathrm{M}(0) q_j = \mathrm{M}(0) \sum_{j=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^j e^{-s\mu t} \sum_{k=0}^{j} \frac{(s\mu t)^k}{k!} \quad \textbf{(9α)}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\sum_{\mathrm{r}=0}^{\infty} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{r}} \mathrm{f}(\mathrm{r},\mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\infty} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{r}+\mathrm{k},\mathrm{k})$

έχουμε τελικά:

$$M(t) = M(0)e^{-(1-\rho)s\mu t} \quad \textbf{(10)}$$

# Κατανομή του χρόνου αναμονής σε σύστημα M/M/s (4)

Στην περίπτωση που έχουμε το μοντέλο με ουρά αναμονής RSO (Random Service Order - τυχαία σειρά εξυπηρέτησης), η ακριβής λύση προσεγγίζεται από την $H_2$ (υπερεκθετική κατανομή):

$$M(t) = 0.5\, M(0)\, [r_1\, e^{-r1(s-\alpha)t/h} + r_2\, e^{-r2(s-\alpha)t/h}] \qquad \textbf{(11)}$$

όπου: $r_1 = 1 - \sqrt{\dfrac{\alpha}{2s}},\; r_2 = 1 - r_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2s}}$

Πειθαρχίες όπως FIFO, RSO, LIFO όπου οι κλήσεις της ουράς αναμονής εξυπηρετούνται ανεξάρτητα από τον χρόνο εξυπηρέτησής τους, είναι γνωστές ως **αμερόληπτες πειθαρχίες (non-biased disciplines)**. Για όλες τις αμερόληπτες πειθαρχίες, ο μέσος χρόνος αναμονής δίνεται από την (7). Προτεραιότητες όπως η SSTF (Shortest Service Time First – πρώτα εξυπηρετούνται κλήσεις με τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης) εξαρτώνται από τον χρόνο εξυπηρέτησης και είναι γνωστές ως **μεροληπτικές πειθαρχίες (biased disciplines)** για τις οποίες η (7) δεν ισχύει.

# Παραδείγματα (1)

**Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής στο οποίο οι κλήσεις που φτάνουν εξυπηρετούνται από 3 τηλεφωνήτριες. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι 18 sec. Αν υποθέσουμε ότι οι κλήσεις φτάνουν στο σύστημα με ρυθμό 400 κλήσεις/ώρα να υπολογιστούν:

α) Το ποσοστό των κλήσεων που θα ευρεθούν στην ουρά αναμονής.

β) Ο μέσος χρόνος αναμονής όλων των κλήσεων.

γ) Ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων όταν γνωρίζουμε ότι θα καθυστερήσουν.

δ) Το ποσοστό των κλήσεων που θα καθυστερήσουν περισσότερο από 30 sec, ως προς όλες τις κλήσεις καθώς και ως προς εκείνες τις κλήσεις που καθυστερούν (περιμένοντας στην ουρά αναμονής).

# Παραδείγματα (2)

**Λύση**

Το φορτίο κίνησης που προσφέρεται στο σύστημα αναμονής ισούται με:

$$\alpha = \lambda h = 400 \frac{\text{κλήσεις}}{\text{ώρα}} 18 \text{ sec} = 2 \text{ erl}$$

α) Το ποσοστό των κλήσεων στην ουρά αναμονής υπολογίζεται ως εξής:

$$M(0) = \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{(s-\alpha)} \left( \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha} \right)^{-1} \overset{s=3,\ a=2}{=} 0.44$$

β) Ο μέσος χρόνος αναμονής όλων των κλήσεων στο σύστημα ισούται με:

$$W = M(0) \frac{h}{s-\alpha} = 0.44 \frac{18}{3-2} = 8\text{sec}$$

# Παραδείγματα (3)

γ) Ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων όταν γνωρίζουν ότι θα καθυστερήσουν προκύπτει ότι είναι:

$$W_1 = \frac{W}{M(0)} = \frac{18}{3-2} = 18\text{sec}$$

δ) Το ποσοστό των κλήσεων που θα καθυστερήσουν περισσότερο από 30 sec επί όλων των κλήσεων θα υπολογιστεί από την σχέση:

$$M(t) = M(0)e^{-(1-\frac{\alpha}{s})s\mu t} \Rightarrow M(30) = 0.44e^{-\frac{5}{3}}$$

Αντίθετα το ποσοστό των κλήσεων που θα καθυστερήσουν περισσότερο από 30 sec ως προς μόνον τις κλήσεις που καθυστερούν θα είναι ίσο με $e^{-5/3}$, αφού θα πρέπει να διαιρέσουμε με M(0) την προηγούμενη σχέση.

# Παραδείγματα (4)

**Παράδειγμα 2**

Σε σύστημα αναμονής M/M/1 με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, ο ρυθμός άφιξης είναι $\lambda$=20 κλήσεις/ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu$=27 κλήσεις/ώρα.

Υπολογίστε:

(**a**) Τον συνολικό χρόνο T παραμονής των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

**(b)** Τον συνολικό αριθμό N των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

(**c**) Τον μέσο χρόνο W παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής.

(**d**) Το μέσο μήκος L της ουράς αναμονής.

(**e**) Τα T, N, W, L αν αυξηθεί ο ρυθμός των αφίξεων κατά 5 κλήσεις/ώρα.

(**f**) Τα T, N, W, L αν μειωθεί ο ρυθμός εξυπηρέτησης κατά 5 κλήσεις/ώρα (λ=20 κλήσεις/ώρα).

(**g**) Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα των (**e**) και (**f**);

# Παραδείγματα (5)

**Λύση**

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι: $\alpha=\lambda/\mu$ =20/27=0.74 erl<1 erl.

(**a**) Ο συνολικός χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα προκύπτει από την διαφορά του ρυθμού άφιξης από τον ρυθμό εξυπηρέτησης, ως εξής:

$$T=\frac{1}{\mu-\lambda}\Rightarrow T=\frac{1}{27-20}=\frac{1}{7}hour=8.6\min$$

Βάσει τύπων, σχέση (4), για s=1$\Rightarrow$ M(0) = $\alpha$, και από σχέση (6)$\Rightarrow$

$$W=\frac{\alpha h}{1-\alpha}=\frac{\lambda/\mu}{\mu(1-\lambda/\mu)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Οπότε: $T = W + h = W + 1/\mu \Rightarrow$ $T=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}+\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda+(\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{1}{\mu-\lambda}$

**(b)** $N=\lambda T=\lambda/(\mu-\lambda)=20/7=2.9$

# Παραδείγματα (6)

(c) $$W = T - 1/\mu = 8.6 - \frac{60}{27} = 6.4\min$$

(d) $$L = \lambda W = \frac{20}{60} 6.4 = 2.1$$

(e) $$T = \frac{1}{\mu - \lambda} \Rightarrow T = \frac{1}{27 - 25} = \frac{1}{2} hour = 30\min$$

$$N = \lambda T = (25/60) * 30 = 12.5$$

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \Rightarrow \quad W = T - 1/\mu = 30 - \frac{60}{27} = 27.8\min$$

$$L = \lambda W = \frac{25}{60} 27.8 = 11.6$$

# Παραδείγματα (7)

(f) $$T = \frac{1}{\mu - \lambda} \Rightarrow T = \frac{1}{22-20} = \frac{1}{2} hour = 30 \min$$

$$N = \lambda T = (20/60) * 30 = 10$$

$$W = T - 1/\mu = 30 - \frac{60}{22} = 27.3 \min$$

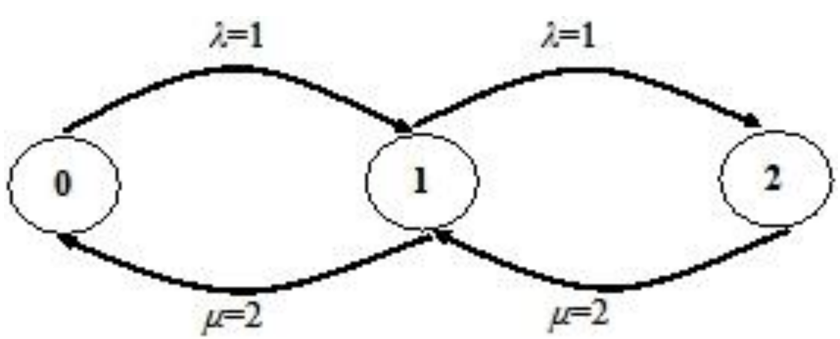
$$L = \lambda W = \frac{20}{60} 27.3 = 9.1$$

(g) Παρατηρούμε ότι μόνο ο συνολικός χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα δεν άλλαξε.

# Παραδείγματα (8)

**Παράδειγμα 3**

Σε σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή και μία θέση στην ουρά αναμονής, M/M/1(1), ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι $\lambda$, ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu$. Το σύστημα (ουρά αναμονής και εξυπηρετητής) μπορεί να είναι άδειο (κατάσταση 0), ή να έχει μία κλήση υπό εξυπηρέτηση (κατάσταση 1), ή να είναι γεμάτο (κατάσταση 2), δηλ. μία κλήση υπό εξυπηρέτηση και μία κλήση στην θέση αναμονής. Έστω $P_0$, $P_1$ και $P_2$ οι πιθανότητες μονίμου καταστάσεως. Το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος έχει ως εξής:



# Παραδείγματα (9)

(**a**) Γράψτε τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας.

(**b**) Μέσω των εξισώσεων του ερωτήματος (a) να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P_0$, $P_1$ και $P_2$.

(**c**) Να υπολογιστούν: η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής, *L*, και η μέση τιμή των κλήσεων σ’ όλο το σύστημα, *N*.

(**d**) Βρείτε την μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων που γίνονται δεκτές στο σύστημα, $\lambda_{\text{eff}}$ (effective arrival rate).

(**e**) Βρείτε την μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής, *W*, και στο σύστημα, *T* .

**(f)** Υπολογίστε την απόδοση *η* του εξυπηρετητή.

(**g**) Να υπολογίσετε (πάλι) τις πιθανότητες $P_0$, $P_1$ και $P_2$ χρησιμοποιώντας <u>μόνο</u> τις εξισώσεις **σφαιρικής ισορροπίας** για κάθε κατάσταση *n* (*n*=0,1 και 2).

# Παραδείγματα (10)

**Λύση**

(**a**) Οι εξισώσεις τοπικής ισορροπίας, «ρυθμός ανόδου» = «ρυθμός καθόδου», ισχύουν **μόνο** μεταξύ γειτονικών καταστάσεων. Έχουμε δύο ζευγάρια γειτονικών καταστάσεων: (0,1) και (1, 2).

Για το ζεύγος (0,1) οι εξισώσεις είναι:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

Για το ζεύγος (1,2) οι εξισώσεις είναι:

$$\lambda P_1 = \mu P_2$$

# Παραδείγματα (11)

(**b**) $\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_0 = 2P_1 \Rightarrow P_1 = 0.5P_0$ *(1)*

$\lambda P_1 = \mu P_2 \Rightarrow P_1 = 2P_2 \Rightarrow P_2 = 0.5P_1$

Λόγω της *(1)*: $P_2 = (0.5)^2 P_0 = 0.25P_0$ *(2)*

Αλλά: $P_0+P_1+P_2=1 \Rightarrow P_0+0.5P_0+0.25P_0=1 \Rightarrow (1+0.5+0.25)P_0 = 1 \Rightarrow 1.75P_0= 1 \Rightarrow P_0= 1 / 1.75 \Rightarrow P_0= 57.14\%$

Από *(1)*:$P_1$=28.57% Από *(2)*:$P_2$=14.29%

(**c**) Στην κατάσταση 0 του συστήματος αλλά και στην 1, έχομε 0 κλήσεις στην ουρά αναμονής, ενώ στην κατάσταση 2 έχομε 1 κλήση στην ουρά αναμονής.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχομε: $L= 0*P_0+0*P_1+1*P_2=0.1429$ κλήσεις.

Η κατάσταση του συστήματος εκφράζει πόσες κλήσεις έχουμε στο σύστημα. Η μέση τιμή N των κλήσεων στο σύστημα, από το ορισμό πάλι της μέσης τιμής είναι:

$N=0*P_0+1*P_1+2P_2=0.2857+2*0.1429 \Rightarrow N=0.5715$ κλήσεις.

# Παραδείγματα (12)

(**d**) Λόγω των περιορισμένων θέσεων στην ουρά αναμονής, μόνον ένα ποσοστό των κλήσεων που φτάνουν στο σύστημα θα γίνει δεκτό. Όταν το σύστημα είναι γεμάτο (κατάσταση 2), τότε οι κλήσεις που φθάνουν, χάνονται. Για να βρούμε το $\lambda_{\text{eff}}$ από τον ρυθμό άφιξης $\lambda$ θα αφαιρέσουμε αυτή την περίπτωση. Δηλαδή:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda - \lambda P_2 = 1 - 0.1429 = 0.8571.$$

(**e**) Από τον νόμο του Little:

$$\text{W}=\text{L}/\lambda_{\text{eff}} = 0.1429 \,/\, 0.8571 = 0.1667$$

Από την επέκταση του νόμου του Little:

$$T=N/\lambda_{\text{eff}} = 0.5715 \,/\, 0.8571 = 0.6667$$

(**f**) Η απόδοση $\eta$ ($=\alpha_c/s$) του εξυπηρετητή δεδομένου ότι είναι ένας μόνον, ισούται με την διεκπεραιουμένη κίνηση $\alpha_c$:

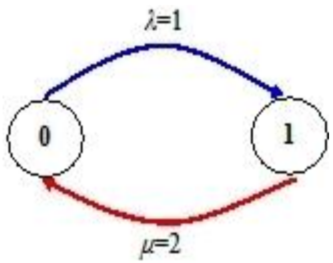
$$\eta = \alpha_c = \lambda_{\text{eff}} \,/\, \mu = 0.8571 \,/\, 2 = 0.42855$$

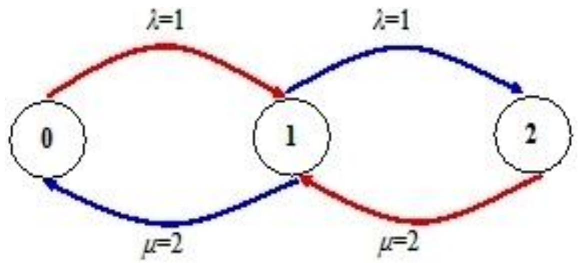
# Παραδείγματα (13)

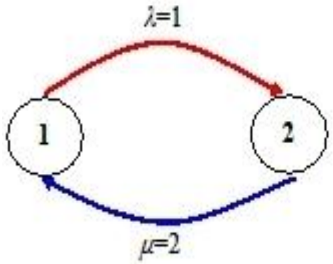
(**g**) Εφαρμόζουμε σε κάθε κατάσταση, τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας

«ρυθμός εισόδου» = «ρυθμός εξόδου»

- Για $n$=0: Για $n$=1: Για $n$=2:




$\mu P_1=\lambda P_0 \Rightarrow 2P_1=P_0$ *(1)* $\lambda P_0+\mu P_2=\lambda P_1+\mu P_1 \Rightarrow P_0+2P_2=P_1+2P_1$ $\lambda P_1=\mu P_2 \Rightarrow P_1=2P_2$ *(3)*

$\Rightarrow P_0+2P_2 = 3P_1$ *(2)*

Όμως οι 3 αυτές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας με τους 3 αγνώστους ($P_0$, $P_1$, $P_2$) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Γι' αυτό αντικαθιστούμε την μία (όποια μας βολεύει) π.χ. την *(2)* με την $P_0+P_1+P_2=1$. Έτσι, αντικαθιστώντας σ' αυτή τις *(1)* και *(3)* $\Rightarrow$

$2P_1+P_1+0.5P_1=1 \Rightarrow 3.5P_1=1 \Rightarrow P_1=1 / 3.5 \Rightarrow P_1=28.57\%$

Από *(1)* $\Rightarrow P_0=57.14\%$ Από *(3)* $\Rightarrow P_2=14.29\%$

Τέλος Ενότητας