Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 3: Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

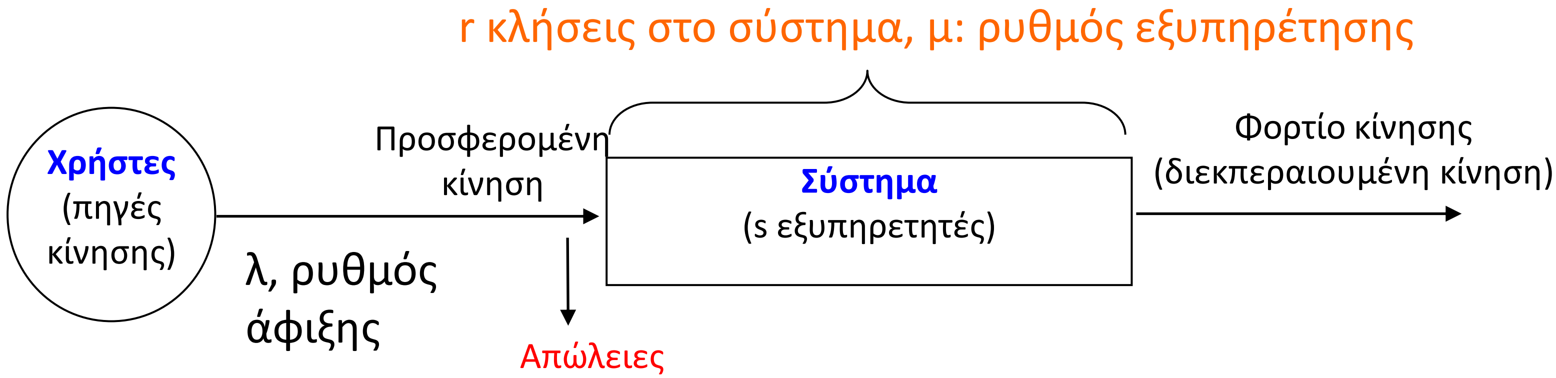
Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και ανάλυση των Μαρκοβιανών συστημάτων απωλειών Erlang M/M/s(0) και Engset M(n)/M/s(0)
- Περιγραφή της έννοιας της στατιστικής ισορροπίας
- Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως και της πιθανότητας συμφόρησης στον χρόνο σε σύστημα απωλειών Engset
- Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως σε σύστημα απωλειών Erlang
- Περιγραφή της έννοιας της απόδοσης γραμμών (trunk efficiency/occupancy) και της ταξινομημένης αναζήτησης γραμμής (ordered trunk hunting)

Περιεχόμενα ενότητας

- Το σύστημα απωλειών M/M/s(0)
- Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας
- Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0)
- Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset
- Πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο στο σύστημα απωλειών Engset
- Τύπος απωλειών Erlang – Erlang B formula
- Απόδοση γραμμών (trunk efficiency/occupancy)
- Ταξινομημένη αναζήτηση γραμμής (ordered trunk hunting)

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (1)



Θεωρούμε το σύστημα απωλειών του ανωτέρω σχήματος με αφίξεις Poisson και εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης. Από την στιγμή που οι αφίξεις μπλοκάρονται και εγκαταλείπουν το σύστημα όταν βρουν όλους τους εξυπηρετητές απασχολημένους, είναι επόμενο ο αριθμός των υπαρχουσών κλήσεων στο σύστημα να ισούται με τον αριθμό των κλήσεων που εξυπηρετούνται, δηλαδή με τον αριθμό των απασχολημένων εξυπηρετητών.

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (2)

Έστω N(t) ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα την χρονική στιγμή t, και έστω ότι δεν υπάρχουν καταστάσεις όπου δύο ή περισσότερες κλήσεις ξεκινούν ή τερματίζουν σε $(t, t+\Delta t]$ όταν $\Delta t \to 0$. Τότε, το γεγονός $\{N(t+\Delta t)=r\}$ προκύπτει από μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. A: $N(t) = r$ και καμία κλήση δεν ξεκινά ή τερματίζει στο $(t, t+\Delta t]$
2. B: $N(t) = r-1$ και μία κλήση ξεκινά στο $(t, t+\Delta t]$
3. C: $N(t) = r+1$ και μία κλήση τερματίζει στο $(t, t+\Delta t]$

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (3)

Έστω $P_r(t) = P\{N(t)=r\}$.

Επειδή η πιθανότητα να τερματίσει μια κλήση στο $(t, t+\Delta t)$, με r κλήσεις να βρίσκονται σε εξέλιξη, ισούται με $r\mu \Delta t$, έχουμε τις παρακάτω πιθανότητες:

- $P\{A\} = P_r(t)\,(1-\lambda\Delta t-r\mu\Delta t)$
- $P\{B\} = P_{r-1}(t)\,\lambda\Delta t$ **(1)**
- $P\{C\} = P_{r+1}(t)\,(r+1)\mu\Delta t$

Επειδή τα γεγονότα A, B, C είναι μοναδικά έχουμε:

$$P_r(t+\Delta t)=P\{A\}+P\{B\}+P\{C\}=P_r(t)+[\lambda P_{r-1}(t)-(\lambda+r\mu)P_r(t)+(r+1)\mu P_{r+1}(t)]\Delta t \quad \textbf{(2)}$$

Ανάλυση του συστήματος M/M/s(0) – Εξήγηση σχέσεων (1)

- Έστω $N(t)$ ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα στον χρόνο t, τότε το γεγονός $\{N(t + \Delta t) = r\}$ προκύπτει από μία από τις τρεις περιπτώσεις Α, Β, Γ:
  - Α: { $N(t) = r$ } *και* { *καμία κλήση δεν ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα* $(t, t + \Delta t]$ } .
  - Β: { $N(t) = r-1$} *και* { *μία μόνο κλήση ξεκινά στο* $(t, t + \Delta t]$ }.
  - Γ: { $N(t) = r+1$ *και* { *μία μόνο κλήση (από τις* $r+1$*) τερματίζει στο* $(t, t + \Delta t]$ }.
- Οπότε η πιθανότητα των γεγονότων αυτών θα είναι, P{A}, P{B}, P{Γ} (σχέση (1) στην διαφάνεια 6). Δηλ. το «και» εκφράζεται με το γινόμενο των πιθανοτήτων.

{ *καμία κλήση δεν ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα* $(t, t + \Delta t]$ } =
{ *καμία κλήση δεν* [*ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα* $(t, t + \Delta t]$] } =
$= 1 - (\lambda\Delta t + r\mu\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - r\mu\Delta t$ **Επομένως $P\{A\} = P_r(t)\,(1-\lambda\Delta t-r\mu\Delta t)$**
{ *μία μόνο κλήση ξεκινά στο* $(t, t + \Delta t]$ } = $\lambda\,\Delta t$ **Επομένως $P\{B\} = P_{r-1}(t)\,\lambda\Delta t$**
{ *μία μόνο κλήση (από τις* $r+1$*) τερματίζει στο* $(t, t + \Delta t]$ } = $(r+1)\mu\Delta t$. Εξήγηση:
Η πιθανότητα να τερματίσει μία κλήση στο Δt είναι ανάλογος του Δt *(σύμφωνα με τα αξιώματα των τυχαίων γεγονότων – άφιξης ή τερματισμού). Επειδή όμως έχουμε συνολικά* $r+1$ *κλήσεις υπό εξυπηρέτηση, ο τερματισμός* 1 *κλήσης, μπορεί να συμβεί από τον τερματισμός της 1^{ης} κλήσης ή της 2^{ης} κλήσης … ή της* $(r+1)$ *κλήσης. Το «ή» εκφράζεται με πρόσθεση πιθανοτήτων. Κάθε ένα από αυτά τα* $(r+1)$ *γεγονότα έχει πιθανότητα* $\mu\Delta t$*, οπότε η πρόσθεση μας δίνει* $(r+1)\mu\Delta t$. **Επομένως $P\{C\} = P_{r+1}(t)\,(r+1)\mu\Delta t$**

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (4)

Η (2) μας δίνει την διαφορική εξίσωση:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_r(t+\Delta t) - P_r(t)}{\Delta t} = dP_r(t)/dt = \lambda P_{r-1}(t)-(\lambda+r\mu)P_r(t)+(r+1)\mu P_{r+1}(t). \qquad \textbf{(3)}$$

Πρακτικά ενδιαφερόμαστε για την μόνιμη κατάσταση λειτουργίας μετά από αρκετό χρόνο. Αν υπάρχει μια τέτοια (μόνιμη) κατάσταση, τότε υπάρχει και μια μοναδική οριακή πιθανοτική κατανομή $\{P_r\}$ τέτοια ώστε για $t \to \infty$ να ισχύει:

$$P_r(t) \rightarrow P_r\,, \quad \{dP_r(t)/dt\} \rightarrow 0$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση.

Αυτό καλείται **στατιστική ισορροπία (statistical equilibrium)** και το P_r λέγεται **πιθανότητα μονίμου καταστάσεως (steady state probability).**

Άρα, στην μόνιμη κατάσταση, το αριστερό μέλος της σχέσης (3) είναι 0.

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (5)

Επομένως προκύπτει η σχέση **(εξίσωση κατάστασης ισορροπίας)**:

$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1}+(r+1)\mu P_{r+1}$, $r = 0,1,\ldots,s$ **(4)**

όπου $P_r= 0$ για $r = -1, s+1$

Η επίλυση της (4), μέσω προσθέσεων κατά μέλη των σχέσεων που προκύπτουν από την (4) για r = 0 ως r = i-1, μας δίνει την σχέση:

$P_i = (\alpha/i)P_{i-1} \quad i=1,2,\ldots s, \ \alpha = \lambda/\mu$ **(5)**

ή

$P_i = (\alpha/i)P_{i-1} = [\alpha^2/i(i-1)]P_{i-2} = \ldots. = (\alpha^i/i!)P_0$ **(6)**

όπου P_0 η πιθανότητα το σύστημα να είναι κενό (χωρίς κλήσεις).

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (6)

Από την συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_{i=0}^{s} P_i = P_0 + P_0 \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha^i}{i!} = 1 \qquad (7)$$

προκύπτει τελικά ότι (λύνοντας ως προς P_0):

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1} \qquad (8)$$

και λόγω της (6), προκύπτει η **κατανομή Erlang**:

$$P_r = \frac{\dfrac{\alpha^r}{r!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}} \qquad (9)$$

Το σύστημα απωλειών M/M/s(0) (7)

Αν στην (9), η τιμή του s γίνει πολύ μεγάλη τότε προκύπτει η κατανομή Poisson:

$$P_r \rightarrow [\alpha^r / r!]\, e^{-\alpha} \qquad s \rightarrow \infty \qquad \textbf{(9α)}$$

Για τον λόγο αυτό η (9) μεταφράζεται ως η διαδικασία Poisson περικοπτόμενη από την χωρητικότητα των γραμμών (εξυπηρετητών).

Γι' αυτό η (9) λέγεται και **περικεκομμένη κατανομή Poisson (Truncated Poisson Distribution).**

Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας (1)

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της $(\lambda + r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1}$ με Δt έχουμε:

$$P_r \lambda \Delta t + P_r r \mu \Delta t = P_{r-1} \lambda \Delta t + P_{r+1} (r+1) \mu \Delta t \qquad \textbf{(10)}$$

η οποία ερμηνεύεται ως εξής:

Έστω S_r η κατάσταση όπου υπάρχουν r κλήσεις στο σύστημα. Τότε, το αριστερό μέλος της (10) αναπαριστά την πιθανότητα

$S_r \rightarrow S_{r+1}$ ή $S_r \rightarrow S_{r-1}$, (από την S_r σε γειτονικές καταστάσεις)

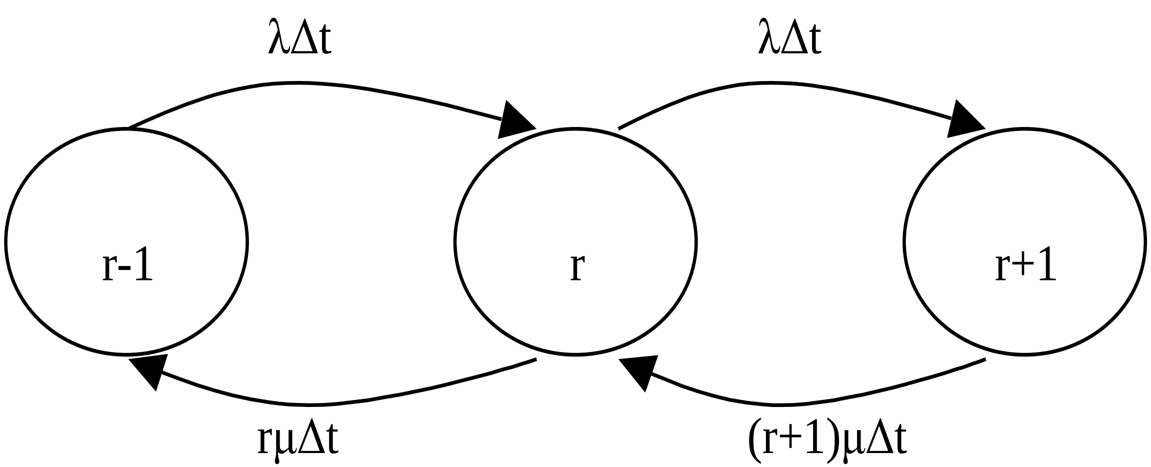
ενώ το δεξιό μέλος αναπαριστά την πιθανότητα

$S_{r-1} \rightarrow S_r$ ή $S_{r+1} \rightarrow S_r$ (από τις γειτονικές καταστάσεις στην S_r)

Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας (2)

Επομένως, από την (10) φαίνεται ότι η πιθανότητα να πάμε από την κατάσταση S_r σε γειτονικές καταστάσεις, ισούται με την πιθανότητα να πάμε από γειτονικές καταστάσεις στην S_r. Αυτό ονομάζεται

«ρυθμός εισόδου = ρυθμός εξόδου» (rate-in = rate-out).



Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας (3)

Από την σχέση (5) προκύπτει και η σχέση:

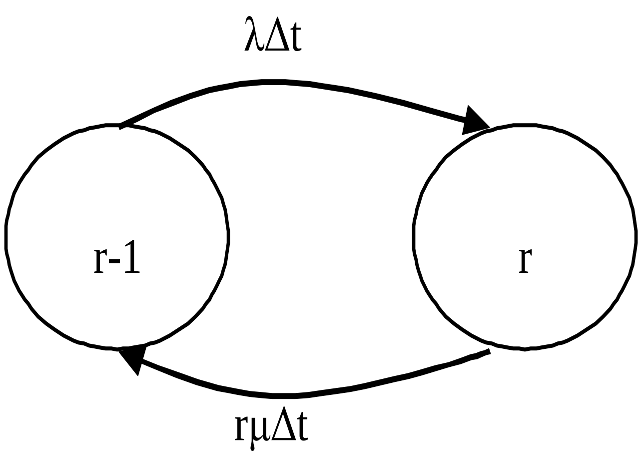
$\lambda P_{r-1} = r\mu P_r \quad r=1,2,\ldots s,$ **(10α)**

Το αριστερό μέλος της (10α) εκφράζει τον ρυθμό κατάστασης που «ανεβαίνει» και το δεξιό μέλος τον ρυθμό κατάστασης που «κατεβαίνει» και έτσι η (10α) ονομάζεται:

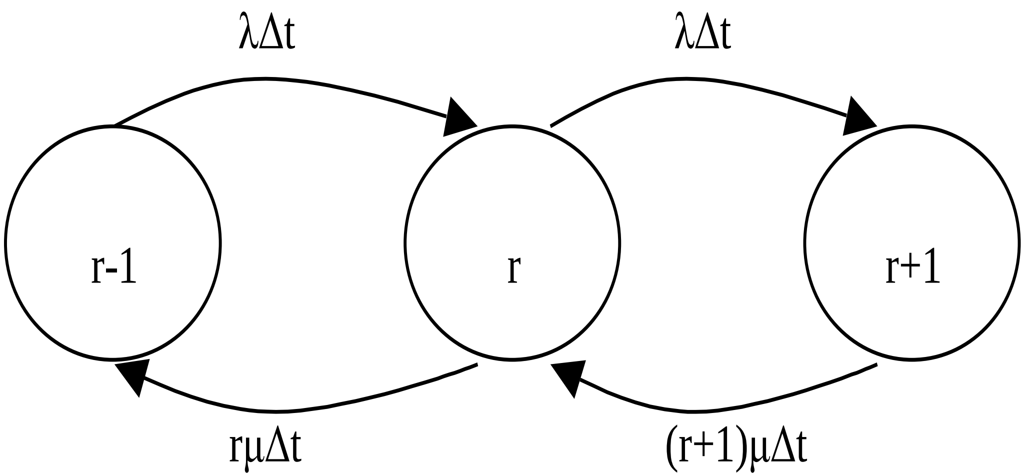
«ρυθμός ανόδου=ρυθμός καθόδου» (**rate_up = rate_down**).

- Η (10α) αναφέρεται και ως **τοπική ισορροπία (local balance)**.
- Η (4) και ως **σφαιρική ισορροπία (global balance)**.
- Η ύπαρξη σφαιρικής ισορροπίας **δεν συνεπάγεται** την ύπαρξη τοπικής ισορροπίας**. Το αντίθετο ισχύει.**

Η έννοια της στατιστικής ισορροπίας (4)



Τοπική ισορροπία



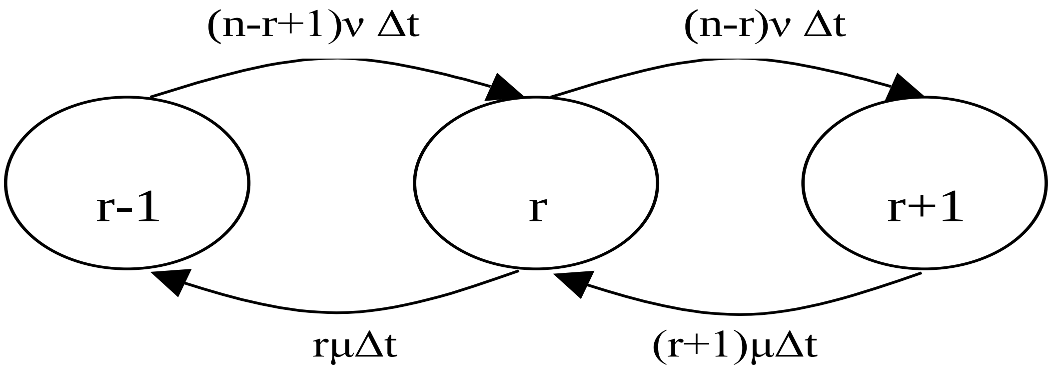
Σφαιρική ισορροπία

Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0) (1)

Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών παρόμοιο με το προηγούμενο, με **πεπερασμένες** όμως πηγές εισόδου, n.

Επίσης, υποθέτουμε ότι ο χρόνος άφιξης από μία αδρανή είσοδο είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή v^{-1}. Αυτό ονομάζεται **ψευδο-τυχαία είσοδος** (διαδικασία, άφιξη, κ.λ.π.). Δηλ. μόνο το τρίτο αξίωμα των τυχαίων αφίξεων δεν ισχύει, αφού έχουμε πεπερασμένο πληθυσμό.

Για την ανάλυση του συστήματος θεωρούμε ότι υπάρχουν r κλήσεις στο σύστημα (υπό εξυπηρέτηση), οπότε n-r πηγές είναι αδρανείς και ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων είναι (n-r)ν (βλ. διάγραμμα καταστάσεων):



Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0) (2)

Από την σχέση «ρυθμός εξόδου = ρυθμός εισόδου», έχουμε την

εξίσωση μονίμου καταστάσεως (steady state equation):

$[(n-r)\, v + r\, \mu\,]\, P_r = (n - r + 1)\, v\, P_{r-1} + (r + 1)\, \mu\, P_{r+1}\,, \quad r = 0, 1, ..., s\,,$ **(11)**

όπου $P_{-1} = P_{s+1} = 0$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με εκείνη του M/M/s(0) προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$P_r = \{(n - r + 1)\, v\, h\, /\, r\}\, P_{r-1}, \qquad r = 1,2,...,s$ **(11α)**

όπου $h = \mu^{-1}$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.

Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0)   (3)

Από την (11α) και την συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει η **κατανομή Engset:**

$$P_r = \frac{\binom{n}{r}(vh)^r}{\sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}(vh)^i} \qquad r = 0, 1, \ldots, s \qquad \textbf{(12)}$$

Αν n→ ∞ και nvh=α = σταθερό, τότε:

$$\binom{n}{r}(vh)^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot\frac{(nvh)^r}{r!} \to \frac{\alpha^r}{r!} \qquad \textbf{(13)}$$

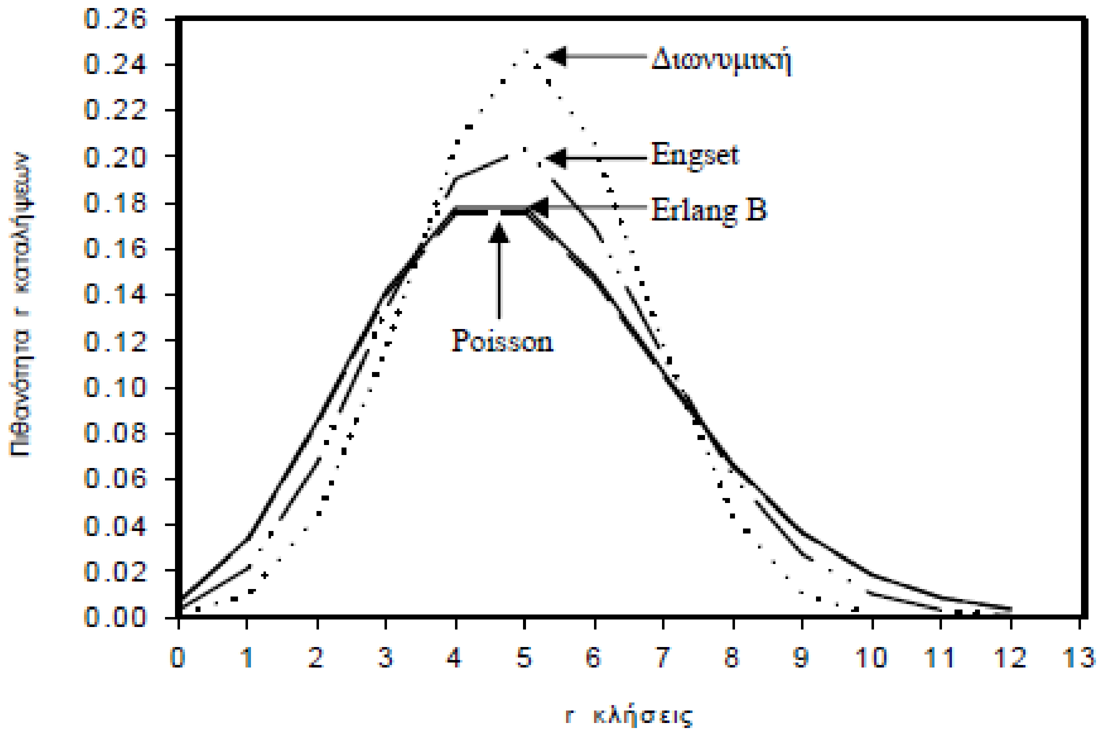
(πολλαπλασίασα και διαίρεσα με n^r). Οπότε, λόγω της (13), η (12) συμπίπτει με την (9) (κατανομή Erlang) (ως όφειλε!).

Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0)   (4)

Στην ειδική περίπτωση όπου **n ≤ s** (οπότε δεν χάνονται κλήσεις), ο παρονομαστής της (12) γίνεται $(1+vh)^n$ και η (12) απλοποιείται στην **διωνυμική κατανομή (binomial distribution):**

$$P_r = \binom{n}{r} \cdot \alpha^r \cdot (1-\alpha)^{n-r} \qquad \textbf{(14)}$$

όπου: $\alpha = vh/(1+vh)$ **(14α)**



Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0) (5)

Υπολογισμός της πιθανότητας Π_r να υπάρχουν r κλήσεις στο σύστημα ακριβώς πριν από την άφιξη μιας κλήσης.

Δηλ. την Π_r την υπολογίζει εσωτερικός «παρατηρητής» του συστήματος.

Έστω ΔΕ το γεγονός της άφιξης μιας κλήσης σε χρόνο Δt και E_r το γεγονός ότι υπάρχουν r κλήσεις στο σύστημα (στην κατάσταση ισορροπίας). Τότε, Π_r = P{Er | ΔΕ} (δεσμευμένη πιθανότητα). Από το θεώρημα Bayes έχουμε:

$$\Pi_r = P\{E_r \mid \Delta E\} = \frac{P\{E_r\}P\{\Delta E \mid E_r\}}{\sum_{i=0}^{s} P\{E_i\}P\{\Delta E \mid E_i\}} \qquad \textbf{(15)}$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$

$\Rightarrow P(A/B) = P(A)P(B/A)/P(B)$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B/A_i)$$

Τύπος του Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{\sum_i P(A_i)P(B/A_i)}$$

Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0)   (6)

Επειδή $P\{\Delta E/E_r\} = (n\text{-}r)\nu\Delta t$ και $P\{E_r\} = P_r$, μέσω της (12), έχουμε:

$$P\{E_r\}P\{\Delta E|E_r\} = \binom{n}{r}(\nu h)^r P_0 (n-r)\nu\Delta t = \binom{n-1}{r}(\nu h)^r P_0 n\nu\Delta t \qquad \textbf{(15α)}$$

$$\binom{n}{r}(n-r) = \binom{n-1}{r}n \text{, όντως:}$$

$$\binom{n}{r}(n-r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}(n-r)$$

$$n\binom{n-1}{r} = n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-1-r+1)}{r!}$$

Αντικαθιστώντας την (15α) στην (15) παίρνομε:

$$\Pi_r = \frac{\binom{n-1}{r}(\nu h)^r}{\sum_{i=0}^{s}\binom{n-1}{i}(\nu h)^i} \qquad r = 0,1,2,\ldots,s \qquad \textbf{(16)}$$

Το σύστημα απωλειών M(n)/M/s(0) (7)

Συγκρίνοντας την (16) με την (12) έχουμε:

$$\Pi_r [n] \equiv P_r [n - 1] \qquad \textbf{(17)}$$

Η (17) μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Από την στιγμή που ένας εισερχόμενος πελάτης καταλαμβάνει μια είσοδο, θα δει την συμπεριφορά του συστήματος με τις εναπομένουσες (n-1) εισόδους.

Αν n → ∞, τότε η είσοδος γίνεται Poisson και έχουμε:

$$\Pi_r [\infty] = P_r [\infty] \qquad \textbf{(18)}$$

Η σχέση (18) αναμενόταν λόγω της ιδιότητας PASTA (ή, αν θέλετε, η (18) αποδεικνύει την ιδιότητα PASTA – Poisson Arrivals See Time Averages).

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (1)

Έστω α το προσφερόμενο φορτίο κίνησης και α_c το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από ένα σύστημα. Τότε ο ρυθμός απωλειών που καλείται και πιθανότητα απωλείας κλήσεως (call blocking probability) δίνεται από την σχέση:

$$B=(\alpha-\alpha_c)/\alpha \qquad \textbf{(19)}$$

Έστω N ο αριθμός των κλήσεων στην κατάσταση ισορροπίας. Τότε, από την 4η ιδιότητα του φορτίου κίνησης έχουμε:

$$\alpha_c = E\{N\} = \sum_{r=0}^{s} rP_r = P_0 nvh \sum_{r=0}^{s-1} \binom{n-1}{r} (vh)^r \qquad \textbf{(20)}$$

Επίσης, από την σχέση α = ch, έχουμε:

$$\alpha = \mathrm{E}\{\mathrm{n}-\mathrm{N}\}\mathrm{vh} = \sum_{r=0}^{s}(n-r)P_r vh = \mathrm{vh}\sum_{r=0}^{s}(n-r)\binom{n}{r}(vh)^r P_0 = \mathrm{P_0 nvh}\sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{s}}\binom{\mathrm{n}-1}{\mathrm{r}}(vh)^r \qquad \textbf{(21)}$$

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (2)

Η (19) μέσω των (20) και (21) οδηγεί στον **τύπο απωλειών του Engset (Engset loss formula)**, γνωστό και ως **πιθανότητα συμφόρησης κλήσεων**:

$$B = \frac{\binom{n-1}{s}(vh)^s}{\sum_{i=0}^{s}\binom{n-1}{i}(vh)^i} = \Pi_s \qquad \textbf{(22)}$$

Ή, εναλλακτικά, ο αριθμητής $(\alpha - \alpha_c)$ υπολογίζεται ως:

$$\alpha\text{-}\alpha_c = P_s(n\text{-}s)(vh) = \binom{n}{s}(vh)^s(n\text{-}s)(vh)P_0 = \binom{n-1}{s}n(vh)(vh)^s P_0$$

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (3)

Από την (22) έχουμε τον ακόλουθο **αναδρομικό** τύπο απωλειών του Engset:

$$B(s,n,vh)=\frac{(n-s)vhB(s-1,n,vh)}{s+(n-s)vhB(s-1,n,vh)} \qquad \textbf{(23)}$$

όπου

B(s, n, vh): η πιθανότητα απωλείας κλήσεως

s: ο αριθμός των εξυπηρετητών

n: ο αριθμός των πηγών κίνησης

v: ο ρυθμός άφιξης κλήσεων ανά ανενεργή πηγή

h: ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων

Το γινόμενο vh μπορεί να εκφραστεί από την σχέση:

$$\mathrm{vh}=\frac{\alpha}{\mathrm{n}-\alpha[1-\mathrm{B}(\mathrm{s},\mathrm{n},\mathrm{vh})]} \qquad \textbf{(24)}$$

όπου vh το φορτίο κίνησης για κάθε ανενεργή πηγή και α το συνολικό φορτίο κίνησης

Σύστημα M(n)/M/s(0)

- Μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ του φορτίου α και των απωλειών B για το σύστημα M(n)/M/s, ως εξής:
- $\alpha = (n\text{-}r)vh \Rightarrow r = (nvh - \alpha)/(vh)$
- όπου r ο αριθμός των κατειλημμένων εξυπηρετητών κατά μέσον όρο.
- Από την 4η ιδιότητα του φορτίου κινήσεως $r = \alpha_c$.
- Επειδή $\alpha_c=\alpha(1-B)=(nvh-\alpha)/(vh)$ προκύπτει ότι:
- $\alpha = nvh/(1+vh(1\text{-}B))$, απ' όπου προκύπτει η (24):

$$vh = \frac{\alpha}{n - \alpha\left[1 - B(s, n, vh)\right]}$$

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (4)

Παράδειγμα εφαρμογής του αναδρομικού τύπου απωλειών Engset

Να υπολογιστεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως σε ένα γραφείο όπου έχουμε 4 τηλέφωνα που προσφέρουν κίνηση 1 erl σε δύο τηλεφωνικές γραμμές.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσεως εργαζόμαστε ως εξής:

Έχουμε n = 4, s=2 ενώ στην σχέση (23) ο όρος vh είναι άγνωστος.

Θέτουμε αρχικά B(s, n, vh)=0

1ο Βήμα: Υπολογίζουμε τον όρο vh από την (24)

2ο Βήμα: Υπολογίζουμε το **B(s, n, vh)** από την (23) *(για s = 1, 2 ενώ για s=0 υποθέτουμε ότι B=1)*

3ο βήμα: Υπολογίζουμε το **α = nvh/(1+vh(1-B)).** **(25)**

Αν το α ισούται με την τιμή που δίνεται στην εκφώνηση *(εδώ 1 erl)* τότε σταματάμε. Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 3.

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (5)

B(s, n, vh)=0

$$1^o \text{ βήμα}: vh = \frac{1}{4-1(1-0)} = 0.3333$$

$$2^o \text{ βήμα}: \begin{cases} B(0,4,0.3333) = 1 \\ B(1,4,0.3333) = \dfrac{(4-1)\times 0.3333}{1+(4-1)\times 0.3333} = 0.5 \\ B(2,4,0.3333) = \dfrac{(4-2)\times 0.3333\times 0.5}{2+(4-2)\times 0.3333\times 0.5} = 0.1428 \end{cases}$$

$$3^o \text{ βήμα}: a = \frac{4\times 0.3333}{1+0.3333\times(1-0.1428)} = 1.037 > 1$$

Επειδή η τιμή 1.037 erl δεν είναι κοντά στο 1 erl επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 3, θεωρώντας **B(s, n, vh) = 0.1428**.

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (6)

B(s, n, vh)=0.1428

$$1^{o}\ \text{βήμα}: vh = \frac{1}{4-1(1-0.1428)} = 0.3182$$

$$2^{o}\ \text{βήμα}: \begin{cases} B(0,4,0.3182) = 1 \\ B(1,4,0.3182) = \dfrac{(4-1)\times 0.3182}{1+(4-1)\times 0.3182} = 0.4884 \\ B(2,4,0.3182) = \dfrac{(4-2)\times 0.3182\times 0.4884}{2+(4-2)\times 0.3182\times 0.4884} = 0.1345 \end{cases}$$

$$3^{o}\ \text{βήμα}: a = \frac{4\times 0.3182}{1+0.3182\times(1-0.1345)} = 0.998 < 1$$

Η τιμή 0.998 erl δεν είναι τόσο κοντά στο 1 erl οπότε επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 3, θεωρώντας **B(s, n, vh) = 0.1345**.

Πιθανότητα απωλείας κλήσεως στο σύστημα απωλειών Engset (7)

B(s, n, vh)=0.1345

$$1^o\ \text{βήμα}: vh = \frac{1}{4-1(1-0.1345)} = 0.3190$$

$$2^o\ \text{βήμα}: \begin{cases} B(0,4,0.3190) = 1 \\ B(1,4,0.3190) = \dfrac{(4-1)\times 0.3190}{1+(4-1)\times 0.3190} = 0.4890 \\ B(2,4,0.3190) = \dfrac{(4-2)\times 0.3190\times 0.4890}{2+(4-2)\times 0.3190\times 0.4890} = 0.1349 \end{cases}$$

$$3^o\ \text{βήμα}: a = \frac{4\times 0.3190}{1+0.3190\times(1-0.1349)} = 1.00002 \approx 1$$

Άρα η πιθανότητα απωλείας κλήσεως είναι 13.49%.

Πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο στο σύστημα απωλειών Engset (1)

Η πιθανότητα ένας εξωτερικός παρατηρητής να βρει όλους τους εξυπηρετητές κατειλημμένους υπολογίζεται από την (12) ως εξής:

$$B_T = \frac{\binom{n}{s}(vh)^s}{\sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}(vh)^i} = P_s \qquad \textbf{(26)}$$

Η πιθανότητα αυτή καλείται **πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο (time congestion probability)** αφού τείνει να ισούται με το ποσοστό του χρόνου που όλοι οι εξυπηρετητές είναι κατειλημμένοι, όταν το διάστημα παρατήρησης είναι πολύ μεγάλο.

Πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο στο σύστημα απωλειών Engset (2)

Σημειώνεται ότι ακόμη και όταν τα n, h και v δίνονται, το α εξαρτάται απ' το B. Πάντως, στη περίπτωση όπου $n \leq s$ έχουμε B = 0, οπότε όλο το προσφερόμενο φορτίο διεκπεραιώνεται. Ισχύει δηλαδή:

$$\alpha = nvh/(1+vh) \equiv \alpha_s \qquad \textbf{(27)}$$

όπου α_s το **επιδιωκόμενο φορτίο κίνησης (intended traffic load)**.

Σ' αυτή την περίπτωση η πιθανότητα κατάστασης P_j απλοποιείται στη διωνυμική κατανομή, όπως φαίνεται στην (14), και η σχέση (14α) γίνεται $\alpha = \alpha_s/n$ το οποίο είναι το προσφερόμενο φορτίο ανά πηγή κίνησης.

Τύπος απωλειών Erlang – Erlang B formula (1)

Αν n→ ∞ και v → 0, και κρατήσουμε σταθερό το γινόμενο nvh = α, χρησιμοποιώντας την σχέση (13) έχουμε τον **τύπο απωλειών του Erlang:**

$$B = B_T = \frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}} \equiv E_s(\alpha) \qquad \textbf{(28)}$$

ο οποίος αναφέρεται και ως **Erlang B-formula** και συμβολίζεται με $E_s(\alpha)$.

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε την σχέση, ότι το προσφερόμενο φορτίο ισούται με το επιδιωκόμενο/προσδοκώμενο:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{nvh}{1 + nv(1 - B)} = \alpha_s \qquad \textbf{(29)}$$

Τύπος απωλειών Erlang – Erlang B formula (2)

Από την σχέση (28) έχουμε τον επαναληπτικό (αναδρομικό) τύπο:

$$E_s(\alpha) = \alpha E_{s-1}(\alpha)/(s+\alpha E_{s-1}(\alpha)), \;\; E_0(\alpha) = 1 \qquad \textbf{(30)}$$

ο οποίος είναι πολύ βολικός για αριθμητικούς υπολογισμούς.

Η B-formula του Erlang είναι χρήσιμη στον τηλεπικοινωνιακό μηχανικό καθώς βρίσκει εφαρμογές στον σχεδιασμό ενσύρματων τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, δικτύων GSM κτλ.

Τύπος απωλειών Erlang – Erlang B formula (3)

Απόδειξη του αναδρομικού τύπου Erlang B

$$E_s(\alpha)=\frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}}{\sum\limits_{i=0}^{s}\dfrac{\alpha^i}{i!}}=\frac{\dfrac{\alpha\alpha^{s-1}}{s(s-1)!}}{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^i}{i!}+\dfrac{\alpha^s}{s!}}=\frac{\dfrac{\alpha\alpha^{s-1}}{s(s-1)!}}{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^i}{i!}+\dfrac{\alpha\alpha^{s-1}}{s(s-1)!}}=\frac{\dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^i}{i!}}\dfrac{\alpha\alpha^{s-1}}{s(s-1)!}}{1+\dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^i}{i!}}\dfrac{\alpha\alpha^{s-1}}{s(s-1)!}}$$

οπότε με βάση το γεγονός ότι:

$$E_{s-1}(\alpha)=\frac{\dfrac{\alpha^{s-1}}{(s-1)!}}{\sum\limits_{i=0}^{s-1}\dfrac{\alpha^i}{i!}}$$

αποδεικνύεται τελικά η αναδρομική σχέση (30): $E_s(\alpha) = \alpha E_{s-1}(\alpha)/(s+\alpha E_{s-1}(\alpha))$

Τύπος απωλειών Erlang – Erlang B formula (4)

Στην γραφική παράσταση απεικονίζεται η πιθανότητα απωλείας των κλήσεων συναρτήσει του προσφερομένου φορτίου κίνησης, το οποίο μεταβάλλεται από 0 έως 20 erl, όταν ο αριθμός των servers είναι 5 ή 10 ή 15.

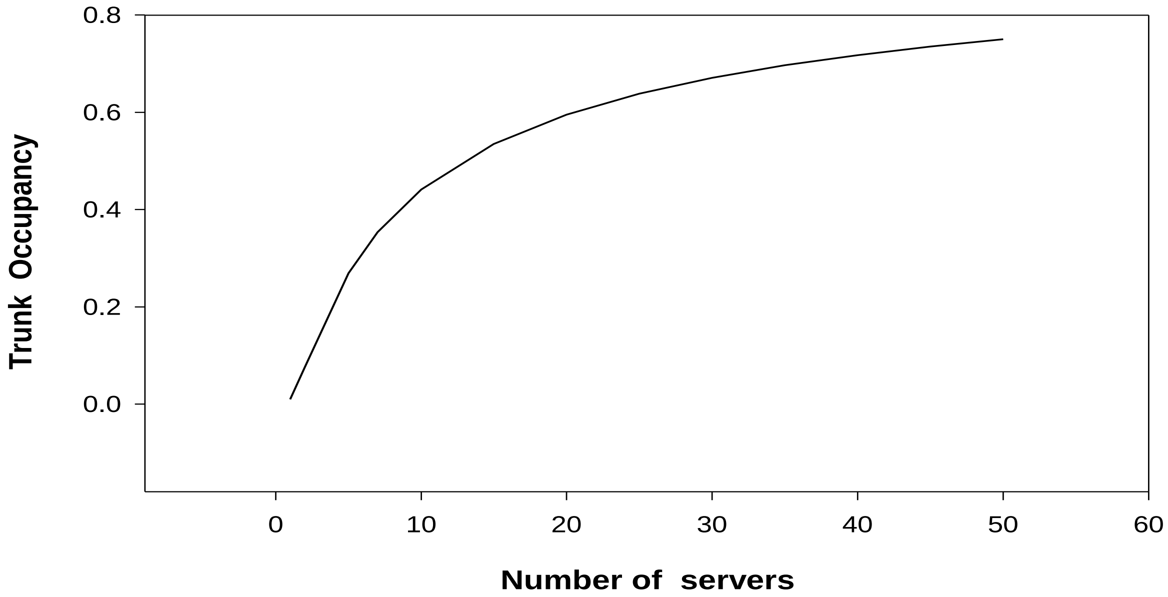
Απόδοση γραμμών (trunk efficiency/occupancy) (1)

Το φορτίο κίνησης που μεταφέρεται από μια γραμμή (δηλαδή ο λόγος της διεκπεραιουμένης κινήσεως προς τον συνολικό αριθμό των γραμμών) λέγεται **απόδοση των γραμμών (trunk efficiency - occupancy)** και δίδεται από την σχέση:

$$\eta = \alpha_c / s = \{\alpha(1-B)\}/s \qquad \textbf{(31)}$$

<u>Παρατήρηση</u> Πρέπει να τονιστεί ότι αφού μια γραμμή μπορεί να μεταφέρει το μέγιστο 1 erl, έχουμε την σχέση $\eta \leq 1$. Έτσι, σε συστήματα απωλειών αν και το προσφερόμενο φορτίο $\alpha > s$, το μεταφερόμενο φορτίο είναι $\alpha_c = \alpha(1-B) < s$ οπότε η σταθερή (μόνιμη) κατάσταση πάντοτε υφίσταται.

Απόδοση γραμμών (trunk efficiency/occupancy) (2)



Το παραπάνω σχήμα δείχνει ένα παράδειγμα της απόδοσης γραμμών, με δεδομένη την πιθανότητα απωλείας κλήσεως B=0.01 (grade of service). Βλέπουμε ότι με δεδομένο GOS, όσο μεγαλύτερο αριθμό γραμμών έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι και η απόδοση γραμμών. Αυτό λέγεται **επίδραση μεγάλης κλίμακας (large scale effect)** και είναι η περίπτωση ενός γενικού συστήματος κίνησης, αποτελεί δε σπουδαίο χαρακτηριστικό στον σχεδιασμό τηλεπικοινωνιακών συστημάτων.

Απόδοση γραμμών (trunk efficiency/occupancy) (3)

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

A) Ποια είναι το μέγιστο φορτίο κίνηση που μπορεί να διεκπεραιώσει ένα σύστημα M/M/s (συνολικό σε Erlangs και ανά κανάλι – Erlang/κανάλι) με πιθανότητα απωλείας κλήσεως 2%, για s = 4, s = 20, s = 30 κανάλια και s = 40 κανάλια; Ποια είναι η απόδοση *η* των καναλιών (s) σε κάθε περίπτωση;

B) Πόσοι χρήστες μπορούν να εξυπηρετηθούν από 30 κανάλια και πόσοι από 40 κανάλια, με GoS = 2%; Υποθέστε την ακόλουθη συμπεριφορά χρήστη: 1 κλήση/ώρα με μέση διάρκεια 105 s.

Απόδοση γραμμών (trunk efficiency/occupancy) (4)

- **ΛΥΣΗ**

Α) ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ ΙΝΤΕΡΝΕΤ: *Erlang B calculator* (google search)

Π.χ. https://www.erlang.com/calculator/erlb/

Blocking (GoS)	Lines (Channels)	Traffic (α)	Traffic/channel	η
0.02 (2%)	4	**1.05 erl**	**0.2625 erl**	0.25725
0.02 (2%)	20	**13.15 erl**	**0.6575 erl**	0.64435
0.02 (2%)	30	**21.90 erl**	**0.7300 erl**	0.71540
0.02 (2%)	40	**30.95 erl**	**0.7738 erl**	0.758275

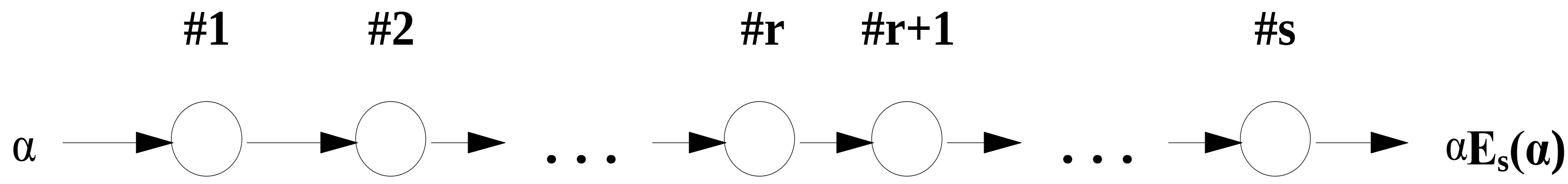
Β) Η μέση κίνηση ενός χρήστη είναι $\alpha_1 = c\ h = (1/3600)*105 = 0.029167$ erl

Άρα, στην περίπτωση των 30 καναλιών (γραμμή PCM) η συνολική κίνηση των 21.90 erl αντιστοιχεί σε 21.90 / 0.029167 = **750.85** χρήστες κατά μέσον όρον, ενώ στην περίπτωση των 40 καναλιών η συνολική κίνηση των 30.95 erl αντιστοιχεί σε 30.95 / 0.029167 = **1061.1** χρήστες κατά μέσον όρον.

Ταξινομημένη αναζήτηση γραμμής (ordered trunk hunting) (1)

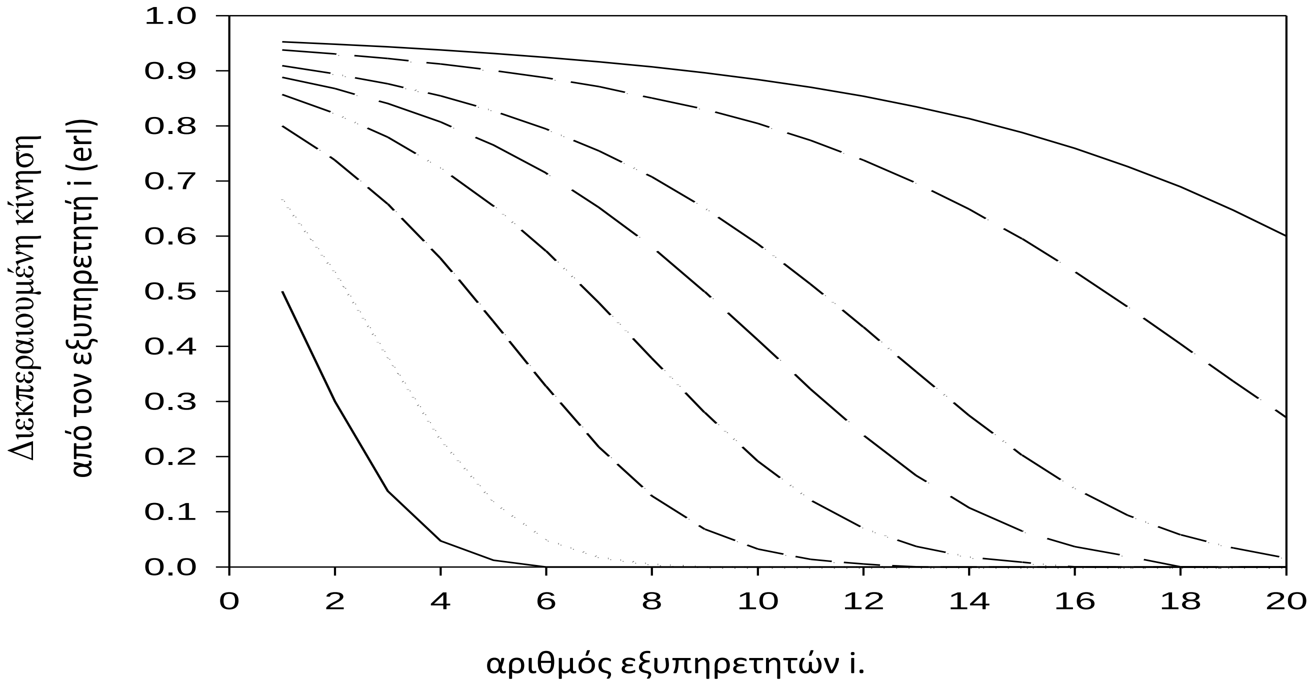
Έστω το μοντέλο **ταξινομημένης αναζήτησης (ordered trunk hunting)** που φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο το φορτίο κίνησης α erl δίδεται για να απαριθμηθούν οι γραμμές (trunks) οι οποίες αναζητούνται σειριακά από τον ελάχιστο ως τον μέγιστο αριθμό. Το φορτίο κίνησης που μεταφέρεται από την r γραμμή δίδεται από την σχέση:

$$\alpha_r = \alpha\,[E_{r-1}(\alpha) - E_r(\alpha)] \qquad \textbf{(32)}$$



Ταξινομημένη αναζήτηση γραμμής (ordered trunk hunting) (2)

Το σχήμα που ακολουθεί δείχνει ένα αριθμητικό παράδειγμα της (32). Φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερο αριθμό γραμμών έχουμε, τόσο μικρότερο είναι το φορτίο ανά γραμμή που μεταφέρεται. Συγκεκριμένα το φορτίο που μεταφέρεται από την τελευταία γραμμή (την s) ονομάζεται **χωρητικότητα της τελευταίας γραμμής (Last Trunk Capacity - LTC)**.



Ταξινομημένη αναζήτηση γραμμής (ordered trunk hunting) (3)

Το συνολικό μεταφερόμενο φορτίο α_c είναι:

$$\alpha_c = \sum_{r=1}^{s} \alpha_r = \alpha[1 - E_s(\alpha)] \qquad \textbf{(33)}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο αναζήτησης π.χ. σειριακός, τυχαίος κ.λ.π.

Η **επιπρόσθετη χωρητικότητα γραμμής (Additional Trunk Capacity - ATC)** καθορίζεται από την αύξηση του φορτίου κίνησης Δα όταν μια γραμμή προστίθεται στην ζεύξη αλλά η πιθανότητα απωλείας κλήσεως B παραμένει σταθερή. Άρα:

$$\mathbf{E_s(\alpha) = E_{s+1}(\alpha+\Delta\alpha) = B} \qquad \textbf{(34)}$$

Το LTC και το ATC χρησιμοποιούνται στον σχεδιασμό συστημάτων εναλλακτικής δρομολόγησης.

Τέλος Ενότητας