Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 9 – 10 (Δίκτυα απωλειών μορφής γινομένου – Προσέγγιση μειωμένου φορτίου)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 9 και 10 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) των δικτύων απωλειών μορφής γινομένου και 2) της προσεγγιστικής μεθόδου του μειωμένου φορτίου για τηλεφωνικά δίκτυα και δίκτυα απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 9-10: (Δίκτυα απωλειών μορφής γινομένου – Προσέγγιση μειωμένου φορτίου)

Άσκηση 1

Θεωρείστε δύο κατηγορίες κίνησης των οποίων οι κλήσεις απαιτούν b_1 και b_2 μονάδες εύρους, αντίστοιχα. Οι κλήσεις των κατηγοριών αυτών εξυπηρετούνται από ένα δίκτυο που αποτελείται από 3 ζεύξεις με χωρητικότητες C_1, C_2 και C_3 μονάδες εύρους ζώνης, αντίστοιχα.

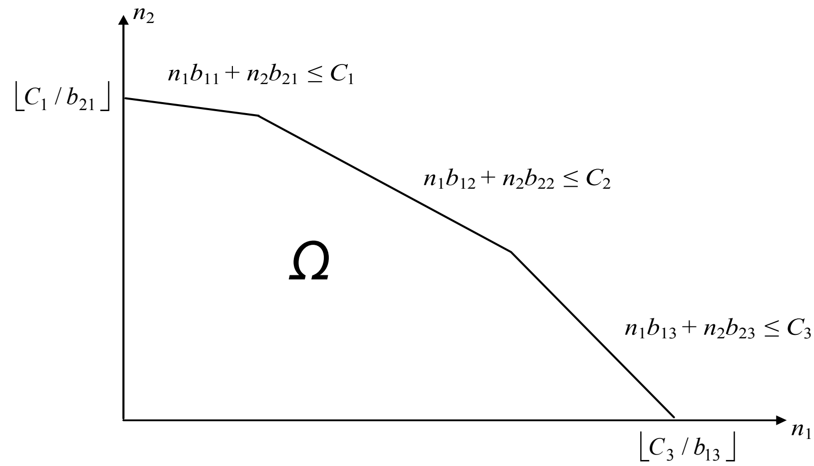
Να σχεδιάσετε το σύνολο καταστάσεων **Ω** αν γνωρίζετε ότι το σύνολο **Ω** δίνεται από την γενική σχέση:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \boldsymbol{n} : 0 \le \sum_{k \in K_p}^{K} n_k b_k \le C_p,\ p = 1,\dots,P \right\}$$

όπου: C_p είναι η χωρητικότητα της ζεύξης p, K είναι ο αριθμός των κατηγοριών κίνησης, K_p είναι το σύνολο των κατηγοριών κίνησης των οποίων οι κλήσεις εξυπηρετούνται από την ζεύξη p, δηλαδή $K_p = \{k \in K : p \in R_k\}$ και R_k είναι η σταθερή διαδρομή (fixed route) των κλήσεων της κατηγορίας k στο δίκτυο.

Λύση

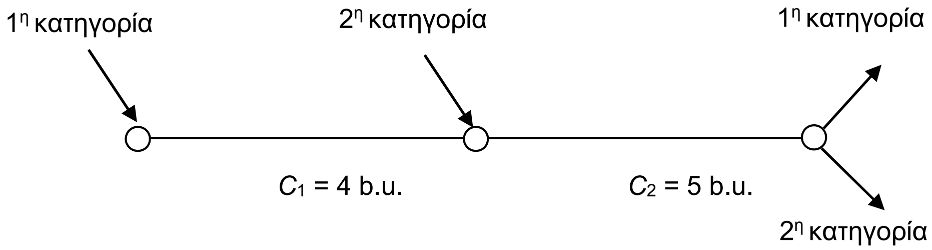
Το σύνολο καταστάσεων **Ω** παρουσιάζεται στο σχήμα 1, όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το x και $b_{kp} = \begin{cases} b_k, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ p \in R_k \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο **Ω** οριοθετείται από τρεις γραμμικούς περιορισμούς.



Σχήμα 1: Σύνολο καταστάσεων **Ω** του δικτύου τριών ζεύξεων της Άσκησης 1.

Άσκηση 2

Θεωρείστε το δίκτυο δύο ζεύξεων του σχήματος 2. Η πρώτη ζεύξη έχει χωρητικότητα C_1 = 4 μονάδες εύρους ζώνης (bandwidth units, b.u.) ενώ η δεύτερη C_2 = 5 b.u. Το δίκτυο εξυπηρετεί δύο κατηγορίες κίνησης. Οι κλήσεις της 1ης κατηγορίας απαιτούν b_1 = 1 b.u. από κάθε ζεύξη του δικτύου ενώ οι κλήσεις της 2ης κατηγορίας απαιτούν b_2 = 2 b.u. μόνο από την δεύτερη ζεύξη του δικτύου. Στο δίκτυο αυτό εφαρμόζεται η πολιτική πλήρους διάθεσης του εύρους ζώνης. Επομένως, οι νέες κλήσεις μπλοκάρονται και χάνονται οποτεδήποτε δεν υπάρχει διαθέσιμο το εύρος ζώνης που απαιτούν. Να βρείτε τις δυνατές καταστάσεις $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ του συνόλου $\boldsymbol{\Omega}$ καθώς και τις αντίστοιχες κατειλημμένες χωρητικότητες j_1, j_2 των δύο ζεύξεων.



Σχήμα 2: Δύο κατηγορίες κίνησης που εξυπηρετούνται από δίκτυο δύο ζεύξεων.

Λύση

Με βάση την σχέση: $\boldsymbol{\Omega}=\{\ \boldsymbol{n}: 0 \leq \sum_{k \in K_p}^{K} n_k b_k \leq C_p,\ p=1,...,P\}$ καθώς και το γεγονός ότι $j_1 = 0,\ldots,C_1$ και $j_2 = 0,\ldots,C_2$, βρίσκουμε ότι το σύστημα αποτελείται από 11 δυνατές καταστάσεις που παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1: Σύνολο δυνατών καταστάσεων και κατειλημμένων χωρητικοτήτων της Άσκησης 2

n_1	n_2	j_1	j_2
0	0	0	0
0	1	0	2
0	2	0	4
1	0	1	1
1	1	1	3
1	2	1	5
2	0	2	2
2	1	2	4
3	0	3	3
3	1	3	5
4	0	4	4

Άσκηση 3

Θεωρείστε εκ νέου το δίκτυο της Άσκησης 2. Αν η άφιξη των κλήσεων κάθε κατηγορίας ακολουθεί μια διαδικασία Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι, τότε αποδεικνύεται ότι οι πιθανότητες $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1,...,n_K)$ εκφράζονται μέσω της ακόλουθης λύσης μορφής γινομένου [1]:

$$P(\boldsymbol{n}) = G^{-1}\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right) \tag{1}$$

όπου $G \equiv G(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}}\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right)$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης, $a_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$ είναι το προσφερόμενο φορτίο κίνησης (σε erl) των κλήσεων της κατηγορίας k και $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{n}: 0 \le \sum_{k\in K_p}^{K} n_k b_k \le C_p,\ p = 1,...,P\}$.

Αν τα φορτία κίνησης είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ erl, να υπολογιστούν:

α) Οι πιθανότητες $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2)$.

β) Οι πιθανότητες $q(\boldsymbol{j}) = q(j_1, j_2)$

γ) Οι πιθανότητες απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης.

δ) Η εκμετάλλευση (utilization) κάθε ζεύξης.

[1] Z. Dziong, J. Roberts, "Congestion probabilities in a circuit switched integrated services network", Performance Evaluation, Vol. 7, Issue 4, pp. 267-284, November 1987.

Λύση

α) Βασιζόμενοι στον πίνακα 1 της Άσκησης 2, υπολογίζουμε τους αριθμητές της (1) ως εξής:

$$P^{'}(0,0) = \frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^0}{0!} = 1,\quad P^{'}(0,1) = \frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^1}{1!} = a_2 = 1,\quad P^{'}(0,2) = \frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^2}{2!} = \frac{a_2}{2} = 0.5,\quad P^{'}(1,0) = \frac{a_1^1}{1!}\frac{a_2^0}{0!} = a_1 = 1,$$

$$P^{'}(1,1) = \frac{a_1^1}{1!}\frac{a_2^1}{1!} = a_1 a_2 = 1,\ P^{'}(1,2) = \frac{a_1^1}{1!}\frac{a_2^2}{2!} = a_1\frac{a_2}{2} = 0.5,$$

$$P^{'}(2,0) = \frac{a_1^2}{2!}\frac{a_2^0}{0!} = \frac{a_1}{2} = 0.5,\ P^{'}(2,1) = \frac{a_1^2}{2!}\frac{a_2^1}{1!} = \frac{a_1^2}{2} = 0.5,\ P^{'}(3,0) = \frac{a_1^3}{3!}\frac{a_2^0}{0!} = \frac{a_1^3}{3!} = \frac{1}{6},$$

$$P^{'}(3,1) = \frac{a_1^3}{3!}\frac{a_2^1}{1!} = \frac{a_1^3 a_2}{3!} = \frac{1}{6},\ P^{'}(4,0) = \frac{a_1^4}{4!}\frac{a_2^0}{0!} = \frac{a_1^4}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Επίσης: $G = \sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}} P^{'}(n_1,n_2) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}}\left(\prod_{k=1}^{K}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right) = 6.375$.

Οπότε από την σχέση $P(n_1,n_2)=\dfrac{P^{'}(n_1,n_2)}{G}$ υπολογίζουμε όλες τις πιθανότητες:

$$P(0,0)=P(0,1)=P(1,0)=P(1,1)=\frac{1}{G}=0.1568627$$
$$P(0,2)=P(1,2)=P(2,0)=P(2,1)=\frac{0.5}{G}=0.0784313$$
$$P(3,0)=P(3,1)=\frac{1}{6G}=0.02614379$$
$$P(4,0)=\frac{1}{24G}=0.006535947$$

Θυμίζουμε ότι πρέπει να ισχύει: $\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}} P(n_1,n_2)=1$.

β) Βασιζόμενοι στον πίνακα 1 της Άσκησης 2 έχουμε:

$$q(0,0)=P(0,0)=0.1568627,\ q(0,2)=P(0,1)=0.1568627,$$
$$q(0,4)=P(0,2)=0.0784313,\ q(1,1)=P(1,0)=0.1568627,$$
$$q(1,3)=P(1,1)=0.1568627,\ q(1,5)=P(1,2)=0.0784313,$$
$$q(2,2)=P(2,0)=0.0784313,\ q(2,4)=P(2,1)=0.0784313,$$
$$q(3,3)=P(3,0)=0.02614379,\ q(3,5)=P(3,1)=0.02614379,$$
$$q(4,4)=P(4,0)=0.006535947$$

γ) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως της κατηγορίας κίνησης *k* δίνεται από την σχέση:

$$P_{b_k}=\sum_{\left\{\boldsymbol{j}\middle|\bigcup_{p=1}^{P}\left[\left(b_{kp}+j_p\right)>C_p\right]\right\}} G^{-1}q(\boldsymbol{j})$$

όπου: $G=\sum_{\boldsymbol{j}\in\boldsymbol{\Omega}} q(\boldsymbol{j})$, $b_{kp}=\begin{cases} b_k & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ p\in R_k \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$ και $q(\boldsymbol{j})=q(j_1,j_2)$.

Οι κλήσεις της 1ης κατηγορίας κίνησης μπλοκάρονται οποτεδήποτε δεν υπάρχει διαθέσιμη μία μονάδα εύρους ζώνης είτε στην 1η είτε στην 2η ζεύξη. Οι κλήσεις της 2ης κατηγορίας κίνησης μπλοκάρονται όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμες δύο μονάδες εύρους ζώνης στην 2η ζεύξη.

Επομένως:

$$P_{b_1}=q(1,5)+q(3,5)+q(4,4)=0.11111$$
$$P_{b_2}=q(0,4)+q(1,5)+q(2,4)+q(3,5)+q(4,4)=0.26797$$

δ) Η εκμετάλλευση (utilization) κάθε ζεύξης υπολογίζεται από την σχέση:

$$U_p=\sum_{\tau=1}^{C_p} G^{-1}\tau q_p(\tau)$$

όπου: $q_p(\tau)=\sum_{\left\{\boldsymbol{j}\middle| j_p=\tau\right\}} q(\boldsymbol{j})$.

Υπολογίζουμε αρχικά τους όρους $q_p(\tau)$:

$$q_1(1) = q(1,0) + q(1,1) + q(1,2) + q(1,3) + q(1,4) + q(1,5) = 0.3921567$$
$$q_1(2) = q(2,0) + q(2,1) + q(2,2) + q(2,3) + q(2,4) + q(2,5) = 0.1568626$$
$$q_1(3) = q(3,0) + q(3,1) + q(3,2) + q(3,3) + q(3,4) + q(3,5) = 0.05228758$$
$$q_1(4) = q(4,0) + q(4,1) + q(4,2) + q(4,3) + q(4,4) + q(4,5) = 0.006535947$$
$$q_2(1) = q(0,1) + q(1,1) + q(2,1) + q(3,1) + q(4,1) = 0.1568627$$
$$q_2(2) = q(0,2) + q(1,2) + q(2,2) + q(3,2) + q(4,2) = 0.235294$$
$$q_2(3) = q(0,3) + q(1,3) + q(2,3) + q(3,3) + q(4,3) = 0.18300649$$
$$q_2(4) = q(0,4) + q(1,4) + q(2,4) + q(3,4) + q(4,4) = 0.1633985$$
$$q_2(5) = q(0,5) + q(1,5) + q(2,5) + q(3,5) + q(4,5) = 0.104575$$

Άρα:

$$U_1 = 1q_1(1) + 2q_1(2) + 3q_1(3) + 4q_1(4) = 0.88888$$
$$U_2 = 1q_2(1) + 2q_2(2) + 3q_2(3) + 4q_2(4) + 5q_2(5) = 2.35294$$

Άσκηση 4

Θεωρείστε την Άσκηση 3. Σκοπός της νέας άσκησης είναι ο υπολογισμός των $q(\boldsymbol{j}) = q(j_1, j_2)$, και κατ' επέκταση των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως και της εκμετάλλευσης της ζεύξης, μέσω του παρακάτω αναδρομικού τύπου, γνωστού στην βιβλιογραφία ως Dziong-Roberts formula [1]:

$$q(\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 1, & if\ \ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} \\ \dfrac{1}{j_p} \sum_{k=1}^{K} \alpha_k b_{kp} q(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{b}_k), & j_p = 1, \ldots, C_p \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

όπου: $b_{kp} = \begin{cases} b_k & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ p \in R_k \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$, $\boldsymbol{b}_k$ είναι η *k*-οστή γραμμή ενός (*K* x *P*) πίνακα με $\boldsymbol{b}_k$ = (b_{k1}, b_{k2}, ..., $b_{kp,\ldots,}$ b_{kP}). Στην περίπτωση μας, όπου οι κλήσεις της 1ης κατηγορίας χρησιμοποιούν και τις δύο ζεύξεις ενώ οι κλήσεις της 2ης κατηγορίας μόνο την δεύτερη ζεύξη, ο (2 x 2) πίνακας έχει την μορφή $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Σημειώνουμε ότι ο τύπος των Dziong-Roberts δίνει ακριβή αποτελέσματα (τα ίδια με εκείνα της λύσης μορφής γινομένου που παρουσιάστηκε στην Άσκηση 3), ενώ στην περίπτωση μόνο μιας ζεύξης συμπίπτει με τον γνωστό αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts.

[1] Z. Dziong, J. Roberts, "Congestion probabilities in a circuit switched integrated services network", Performance Evaluation, Vol. 7, Issue 4, pp. 267-284, November 1987.

Λύση

Σύμφωνα με την (2), έχουμε $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (b_{11}, b_{12}) = (1, 1)$ και $\boldsymbol{b}_2 = (b_{21}, b_{22}) = (0, 2)$. Ξεκινώντας με την υπόθεση $q(0,0)$=1 και θεωρώντας μόνο την δεύτερη ζεύξη (υποθέτουμε p = 2 στην (2)) υπολογίζουμε αναδρομικά τις τιμές των $q(0, j_2)$ για j_2 = 1,…,5:

$$q(0,1) = a_2 b_{22} q\left(0,1-b_{22}\right) = 2q(0,-1) = 0.0 \quad \Rightarrow q(0,1) = 0.0$$

$$2q(0,2) = a_2 b_{22} q\left(0,2-b_{22}\right) = 2q(0,0) = 2.0 \;\Rightarrow q(0,2) = 1.0$$

$$3q(0,3) = a_2 b_{22} q\left(0,3-b_{22}\right) = 2q(0,1) = 0.0 \quad \Rightarrow q(0,3) = 0.0$$

$$4q(0,4) = a_2 b_{22} q\left(0,4-b_{22}\right) = 2q(0,2) = 2.0 \;\Rightarrow q(0,4) = 0.5$$

$$5q(0,5) = a_2 b_{22} q\left(0,5-b_{22}\right) = 2q(0,3) = 0.0 \;\Rightarrow q(0,5) = 0.0$$

Επειδή b_2 = 2 b.u., είναι αναμενόμενο ότι $q(0,1)=q(0,3)=q(0,5) = 0.0$. Παράλληλα, τονίζουμε ότι στους προηγούμενους υπολογισμούς δεν λάβαμε υπόψιν τις κλήσεις της 1ης κατηγορίας, αφού αυτές καταλαμβάνουν εύρος ζώνης και στις δύο ζεύξεις. Αυτό σημαίνει ότι $q(1,0) = q(2,0) = q(3,0) = q(4,0) = 0.0$ (γιατί?).

Θεωρούμε τώρα την πρώτη ζεύξη (υποθέτουμε δηλαδή p=1 στην (2)) και υπολογίζουμε αναδρομικά τις τιμές των $q(j_1, j_2)$ για j_1 = 1,…,4 και j_2 = 1,…,5 ως ακολούθως:

$$q(1,1) = a_1 b_{11} q\left(j_1 - b_{11}, j_2 - b_{12}\right) + a_2 b_{21} q\left(j_1 - b_{21}, j_2 - b_{22}\right) = q(0,0) + 0q(1,-1) = 1.0$$
$$\Rightarrow q(1,1) = 1.0$$

Στους επόμενους υπολογισμούς δεν λαμβάνουμε υπόψιν τον όρο $a_2 b_{21} q\left(j_1 - b_{21}, j_2 - b_{22}\right)$ καθώς b_{21} = 0.

$$q(1,2) = a_1 b_{11} q(0,1) = 0.0 \Rightarrow q(1,2) = 0.0$$

$$q(1,3) = a_1 b_{11} q(0,2) = 1.0 \Rightarrow q(1,3) = 1.0$$

$$q(1,4) = a_1 b_{11} q(0,3) = 0.0 \Rightarrow q(1,4) = 0.0$$

$$q(1,5) = a_1 b_{11} q(0,4) = 0.5 \Rightarrow q(1,5) = 0.5$$

$$2q(2,1) = a_1 b_{11} q(1,0) = 0.0 \Rightarrow q(2,1) = 0.0$$

$$2q(2,2) = a_1 b_{11} q(1,1) = 1.0 \Rightarrow q(2,2) = 0.5$$

$$2q(2,3) = a_1 b_{11} q(1,2) = 0.0 \Rightarrow q(2,3) = 0.0$$

$$2q(2,4) = a_1 b_{11} q(1,3) = 1.0 \Rightarrow q(2,4) = 0.5$$

$$2q(2,5) = a_1 b_{11} q(1,4) = 0.0 \Rightarrow q(2,5) = 0.0$$

$$3q(3,1) = a_1 b_{11} q(2,0) = 0.0 \Rightarrow q(3,1) = 0.0$$

$$3q(3,2) = a_1 b_{11} q(2,1) = 0.0 \Rightarrow q(3,2) = 0.0$$

$$3q(3,3) = a_1 b_{11} q(2,2) = 0.5 \Rightarrow q(3,3) = 0.16667$$

$$3q(3,4) = a_1 b_{11} q(2,3) = 0.0 \Rightarrow q(3,4) = 0.0$$

$$3q(3,5) = a_1 b_{11} q(2,4) = 0.5 \Rightarrow q(3,5) = 0.16667$$

$$4q(4,1) = a_1 b_{11} q(3,0) = 0.0 \Rightarrow q(4,1) = 0.0$$

$$4q(4,2) = a_1 b_{11} q(3,1) = 0.0 \Rightarrow q(4,2) = 0.0$$

$$4q(4,3) = a_1 b_{11} q(3,2) = 0.0 \Rightarrow q(4,3) = 0.0$$

$$4q(4,4) = a_1 b_{11} q(3,3) = 0.1667 \Rightarrow q(4,4) = 0.04168$$

$$4q(4,5) = a_1 b_{11} q(3,4) = 0.0 \Rightarrow q(4,5) = 0.0$$

Η σταθερά κανονικοποίησης ισούται με (όπως και στην Άσκηση 3): $G = \sum_{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{\Omega}} q(\boldsymbol{j}) = 6.375$.

Επομένως:

$$P_{b_1} = \sum_{\left\{ \boldsymbol{j} \middle| \bigcup_{p=1}^{P} \left[\left(b_{1p} + j_p \right) > C_p \right] \right\}} G^{-1} q(\boldsymbol{j}) = \frac{q(1,5) + q(3,5) + q(4,4)}{G} \Rightarrow P_{b_1} = 0.11111$$

$$P_{b_2} = \sum_{\left\{ \boldsymbol{j} \middle| \bigcup_{p=1}^{P} \left[\left(b_{2p} + j_p \right) > C_p \right] \right\}} G^{-1} q(\boldsymbol{j}) = \frac{q(0,4) + q(1,5) + q(2,4) + q(3,5) + q(4,4)}{G}$$
$$\Rightarrow P_{b_2} = 0.26797$$

$$U_1 = \sum_{\tau=1}^{C_1} G^{-1} \tau q_1(\tau) = \sum_{\tau=1}^{4} G^{-1} \tau q_1(\tau) = 0.8888$$

$$U_2 = \sum_{\tau=1}^{C_2} G^{-1} \tau q_2(\tau) = \sum_{\tau=1}^{5} G^{-1} \tau q_2(\tau) = 2.3529$$

όπου:

$$q_1(1) = q(1,0) + q(1,1) + q(1,2) + q(1,3) + q(1,4) + q(1,5) = 2.5$$
$$q_1(2) = q(2,0) + q(2,1) + q(2,2) + q(2,3) + q(2,4) + q(2,5) = 1.0$$
$$q_1(3) = q(3,0) + q(3,1) + q(3,2) + q(3,3) + q(3,4) + q(3,5) = 1/3$$
$$q_1(4) = q(4,0) + q(4,1) + q(4,2) + q(4,3) + q(4,4) + q(4,5) = 1/24$$

$$q_2(1) = q(0,1) + q(1,1) + q(2,1) + q(3,1) + q(4,1) = 1.0$$
$$q_2(2) = q(0,2) + q(1,2) + q(2,2) + q(3,2) + q(4,2) = 1.5$$
$$q_2(3) = q(0,3) + q(1,3) + q(2,3) + q(3,3) + q(4,3) = 7/6$$
$$q_2(4) = q(0,4) + q(1,4) + q(2,4) + q(3,4) + q(4,4) = 25/24$$
$$q_2(5) = q(0,5) + q(1,5) + q(2,5) + q(3,5) + q(4,5) = 2/3$$

Σημείωση: Μολονότι η (2) δίνει ακριβή αποτελέσματα ωστόσο παρουσιάζει υψηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα της τάξης O($K\prod_{p=1}^{P} C_p$). Για τον λόγο αυτό, προτιμάμε την προσεγγιστική μέθοδο του μειωμένου φορτίου ιδιαίτερα στην περίπτωση μεγάλων δικτύων.

Άσκηση 5

Θεωρείστε το δίκτυο της Άσκησης 3. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης όταν εφαρμόσουμε την προσεγγιστική μέθοδο του μειωμένου φορτίου.

Λύση

Ορίζουμε ως $Q_{pk} \equiv Q_{11}$ την πιθανότητα απώλειας κλήσεως της κατηγορίας *k*=1 στην ζεύξη *p*=1. Ισχύει ότι:

$$Q_{11}\left[C_1; a_l, l \in K_1\right] = \sum_{c=C_1-b_1+1}^{C_1} q(c) \tag{3}$$

όπου: a_l το προσφερόμενο φορτίο κίνησης της κατηγορίας κίνησης $l \in K_1$ στην ζεύξη *p* = 1, K_1 το σύνολο των κατηγοριών κίνησης που χρησιμοποιούν την πρώτη ζεύξη και *q*(*c*) η κανονικοποιημένη πιθανότητα να έχουμε *c* κατειλημμένες μονάδες εύρους ζώνης στην ζεύξη.

Η ζεύξη *p*=2 χωρητικότητας C_2 = 5 μονάδων εύρους ζώνης εξυπηρετεί και τις δύο κατηγορίες κίνησης. Επομένως, ορίζουμε ως Q_{21} και Q_{22} την πιθανότητα απώλειας κλήσεως της κατηγορίας 1 και της κατηγορίας 2 στην δεύτερη ζεύξη, αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$$Q_{21}\left[C_2; a_l, l \in K_2\right] = \sum_{c=C_2-b_1+1}^{C_2} q(c) \tag{4}$$

$$Q_{22}\left[C_2; a_l, l \in K_2\right] = \sum_{c=C_2-b_2+1}^{C_2} q(c) \tag{5}$$

Στις σχέσεις (3)-(5) οι τιμές των *q*(*c*) υπολογίζονται μέσω του αναδρομικού τύπου των Kaufman-Roberts.

Ορίζουμε στην συνέχεια ως $L_{pk} \equiv L_{11}$ την προσεγγιστική πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από b_1 μονάδες εύρους ζώνης στην ζεύξη p=1, L_{21} την προσεγγιστική πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από b_1 μονάδες εύρους ζώνης στην ζεύξη p=2 και L_{22} την προσεγγιστική πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από b_2 μονάδες εύρους ζώνης στην ζεύξη p=2. Είναι φανερό ότι L_{12} = 0.

Οι τιμές των L_{pk} δίνονται από την σχέση:

$$L_{pk} = Q_{pk}\left[C_p; a_l \prod_{x \in R_l - \{p\}} \left(1 - L_{xl}\right), l \in K_p\right],\ k \in K_p,\ p = 1,...,P \tag{6}$$

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης της κατηγορίας l=1 στην πρώτη ζεύξη δίνεται από την σχέση:

$$a_l \prod_{x \in R_l - \{p\}} \left(1 - L_{xl}\right) \overset{l=1,\,p=1}{=} a_1 \prod_{x \in R_1 - \{1\}} \left(1 - L_{x1}\right) = a_1\left(1 - L_{21}\right) \tag{7}$$

Ομοίως, το προσφερόμενο φορτίο κίνησης της πρώτης κατηγορίας στην δεύτερη ζεύξη υπολογίζεται ως εξής:

$$a_l \prod_{x \in R_l - \{p\}} \left(1 - L_{xl}\right) \overset{l=1,\,p=2}{=} a_1 \prod_{x \in R_1 - \{2\}} \left(1 - L_{x1}\right) = a_1\left(1 - L_{11}\right) \tag{8}$$

Τέλος, το προσφερόμενο φορτίο κίνησης της δεύτερης κατηγορίας στην δεύτερη ζεύξη είναι:

$$a_l \prod_{x \in R_l - \{p\}} \left(1 - L_{xl}\right) \overset{l=2,\,p=2}{=} a_2 \prod_{x \in R_2 - \{2\}} \left(1 - L_{x1}\right) = a_2 \tag{9}$$

αφού οι κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας χρησιμοποιούν μόνο την δεύτερη ζεύξη.

Βασιζόμενοι στις (6)-(9), υπολογίζουμε τις πιθανότητες L_{11}, L_{21} και L_{22} ως εξής:

$$L_{11} = Q_{11}\left[C_1; a_1\left(1 - L_{21}\right)\right] \tag{10}$$

$$L_{21} = Q_{21}\left[C_2; a_1\left(1 - L_{11}\right), a_2\right] \tag{11}$$

$$L_{22} = Q_{22}\left[C_2; a_1\left(1 - L_{11}\right), a_2\right] \tag{12}$$

Στο σημείο αυτό ξεκινάμε τον υπολογισμό των L_{11}, L_{21} και L_{22} μέσω της τεχνικής των επαναλαμβανομένων αντικαταστάσεων:

Αρχικά, L_{11} = 1.0, L_{21} = 1.0 και L_{22} = 1.0.

Βήμα 1: Με βάση τις (10)-(12), έχουμε:

$$L_{11} = Q_{11}\left[C_1; 0\right] = 0.0$$

$L_{21} = Q_{21}\left[C_2; 0, a_2\right] = 0.0$ (αφού $a_1\left(1 - L_{11}\right)$= 0.0 erl, δεν υπάρχουν κλήσεις της 1ης κατηγορίας στο σύστημα)

$$L_{22}=Q_{22}\left[C_2;0,a_2\right]=\sum_{c=C_2-b_2+1}^{C_2}G^{-1}q(c)=\frac{q(4)+q(5)}{G}=\frac{0.5}{2.5}=0.20\Rightarrow L_{22}=0.20\,.$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό του L_{22} χρειάστηκε να υπολογίσουμε τα $q(c)$ για την δεύτερη ζεύξη, με βάση τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts, ο οποίος παίρνει την μορφή:

$cq(c) = a_2b_2q(c\text{-}b_2)$, $c = 1, \ldots, 5$

$q(0) = 1$

$q(1) = 0$

$2q(2) = a_2b_2q(2\text{-}2)=2\ q(0) \Rightarrow q(2)=1.0$

$3q(3) = a_2b_2q(3\text{-}2)=2\ q(1) \Rightarrow q(3)=0.0$

$4q(4) = a_2b_2q(4\text{-}2)=2\ q(2) \Rightarrow q(4)=0.5$

$5q(5) = a_2b_2q(5\text{-}2)=2\ q(3) \Rightarrow q(5)=0.0$

Άρα $G=\sum_{j=1}^{5}q(j)=2.5$.

Βήμα 2: Βασιζόμενοι στις νέες τιμές των L_{11} = 0.0, L_{21} = 0.0 και L_{22} = 0.2 έχουμε:

$$L_{11}=Q_{11}\left[C_1;a_1\right]=\sum_{c=C_1-b_1+1}^{C_1}G^{-1}q(c)=\frac{q(4)}{G}=\frac{0.041667}{2.70833}=0.01538\Rightarrow L_{11}=0.01538$$

$$L_{21}=Q_{21}\left[C_2;a_1,a_2\right]=\sum_{c=C_2-b_1+1}^{C_2}G^{-1}q(c)=\frac{q(5)}{G}=\frac{0.675}{6.38333}=0.10574\Rightarrow L_{21}=0.10574$$

$$L_{22}=Q_{22}\left[C_2;a_1,a_2\right]=\sum_{c=C_2-b_2+1}^{C_2}G^{-1}q(c)=\frac{q(4)+q(5)}{G}=\frac{1.71667}{6.38333}=0.20\Rightarrow L_{22}=0.26893$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό του L_{11} χρειάστηκε να υπολογίσουμε τα $q(c)$ για την πρώτη ζεύξη, με βάση τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts, ο οποίος παίρνει την μορφή:

$cq(c) = a_1b_1q(c\text{-}b_1)$, $c = 1, \ldots, 4$

$q(0) = 1$

$q(1) = 0$

$2q(2) = a_1b_1q(2\text{-}1)=q(0) \Rightarrow q(2)=0.5$

$3q(3) = a_1b_1q(3\text{-}1)= q(2) \Rightarrow q(3)=1/6$

$4q(4) = a_1b_1q(4\text{-}1)= q(3) \Rightarrow q(4)=1/24$

Άρα $G=\sum_{j=1}^{4}q(j)=2.70833$.

Επίσης, για τον υπολογισμό των L_{21}, L_{22} χρειάστηκε να υπολογίσουμε τα $q(c)$ για την δεύτερη ζεύξη, με βάση τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts, ο οποίος παίρνει την μορφή:

$cq(c) = a_1b_1q(c\text{-}b_1) + a_2b_2q(c\text{-}b_2)$, c = 1, …, 5

$q(0) = 1$

$q(1) = 0$

$2q(2) = a_1b_1q(2\text{-}1) + a_2b_2q(2\text{-}2)=3 \Rightarrow q(2)=1.5$

$3q(3) = a_1b_1q(3\text{-}1) + a_2b_2q(3\text{-}2)=3.5 \Rightarrow q(3)=1.16666$

$4q(4) = a_1b_1q(4\text{-}1) + a_2b_2q(4\text{-}2)=4.16666 \Rightarrow q(4)=1.04166$

$5q(5) = a_1b_1q(5\text{-}1) + a_2b_2q(5\text{-}2)=3.375 \Rightarrow q(5)=0.675$

Άρα $G = \sum_{j=1}^{5} q(j) = 6.38333$.

Βήμα 3: Βασιζόμενοι στις νέες τιμές των L_{11} = 0.01538, L_{21} = 0.10574 και L_{22} = 0.26893 έχουμε:

$$L_{11} = Q_{11}\left[C_1; a_1(1-0.10574)\right] \Rightarrow L_{11} = 0.01092$$

$$L_{21} = Q_{21}\left[C_2; a_1(1-0.01538), a_2\right] \Rightarrow L_{21} = 0.10469$$

$$L_{22} = Q_{22}\left[C_2; a_1, a_2(1-0.01538)\right] \Rightarrow L_{22} = 0.26731$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό των L_{11}, L_{21} και L_{22} χρειάζεται να υπολογιστούν τα αντίστοιχα $q(c)$, όπως έγινε στα προηγούμενα βήματα.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, σταματάμε στο βήμα 6 (καθώς οι τιμές των L_{11}, L_{21} και L_{22} είναι πολύ κοντά σε εκείνες του βήματος 5):

L_{11} = 0.01095, L_{21} = 0.10499 και L_{22} = 0.26777.

Πλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απώλειας κλήσεως μέσω της σχέσης:

$$P_{b_k} \approx 1 - \prod_{p \in R_k} \left(1 - L_{pk}\right), \; k = 1, ..., K \qquad (13)$$

$$P_{b_1} \approx 1 - \left(1 - L_{11}\right)\left(1 - L_{21}\right) = 1 - (1 - 0.010945)(1 - 0.10499) = 0.11479$$

$$P_{b_2} \approx 1 - \left(1 - L_{22}\right) = L_{22} = 0.26777$$

Οι τιμές αυτές είναι πολύ κοντά στις ακριβείς τιμές των Ασκήσεων 3, 4 (P_{b_1} = 0.11111 και P_{b_2} =0.26797) .

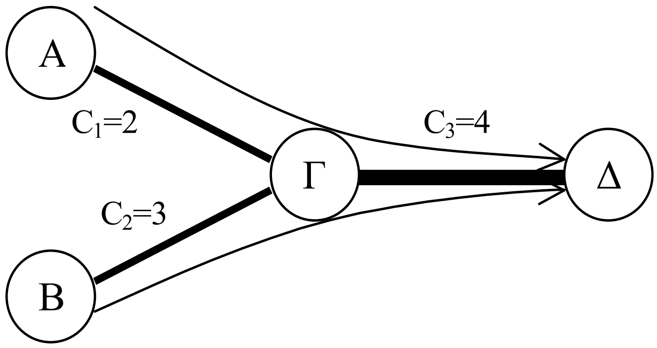
Άσκηση 6

Δίνεται το τηλεφωνικό δίκτυο του σχήματος 3 με χωρητικότητες C_1=2, C_2=3 και C_3=4. Η κίνηση από το Α στο Δ είναι α_1=1 erl και από το Β στο Δ είναι α_2 = 0.5 erl. Να βρεθούν:

1) Ο χώρος καταστάσεων και οι καταστάσεις απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης (ροή ΑΔ και ροή ΒΔ).

2) Οι πιθανότητες απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης.

3) Οι πιθανότητες απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης, με την προσεγγιστική μέθοδο του μειωμένου φορτίου (RLA).



Σχήμα 3: Τηλεφωνικό δίκτυο τριών ζεύξεων.

Λύση

1) Αν x_1, x_2 είναι ο αριθμός των κλήσεων της ροής ΑΔ και ΒΔ αντιστοίχως, τότε, δεδομένου ότι κάθε τηλεφωνική κλήση καταλαμβάνει 1 μονάδα χωρητικότητας (1 trunk), πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ανισώσεις στο δίκτυο:

$x_1 \le C_1 \quad \rightarrow \quad x_1 \le 2$

$x_2 \le C_2 \quad \rightarrow \quad x_2 \le 3$

$x_1 + x_2 \le C_3 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 4$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει το σύνολο S των καταστάσεων:

S={(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2)}

Οι καταστάσεις απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης έχουν ως εξής.

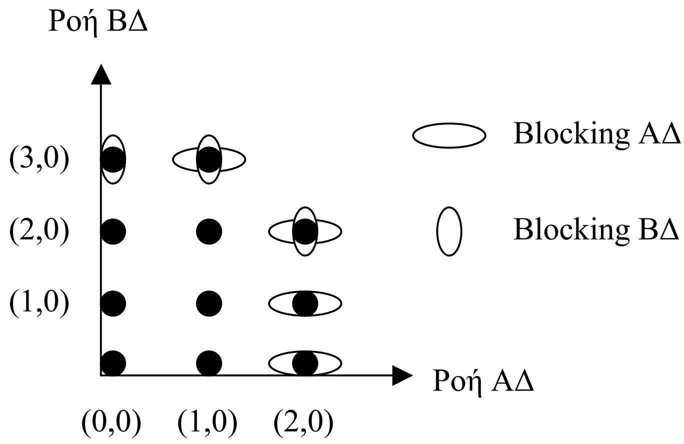
Για την ροή ΑΔ: $S_{ΑΔ}$={(2,0), (2,1), (1,3), (2,2)}

Οι καταστάσεις (2,0), (2,1) είναι καταστάσεις απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζει ο κλάδος ΑΓ. Η κατάσταση (1,3) είναι κατάσταση απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζει ο κλάδος ΓΔ, και η κατάσταση (2,2) είναι κατάσταση απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζουν και οι δύο κλάδοι της διαδρομής ΑΔ (ΑΓ, ΓΔ).

Για την ροή ΒΔ: $S_{ΑΔ}$={(0,3), (1,3), (2,2)}

Οι καταστάσεις (0,3) είναι κατάσταση απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζει ο κλάδος ΒΓ. Η κατάσταση (2,2) είναι κατάσταση απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζει ο κλάδος ΓΔ και η κατάσταση (1,3) είναι κατάσταση απωλείας κλήσεως επειδή γεμίζουν και οι δύο κλάδοι της διαδρομής ΒΔ (ΒΓ, ΒΔ).

Το σχήμα 4 δείχνει παραστατικά τις καταστάσεις του συστήματος (δικτύου) και τις καταστάσεις απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης.



Σχήμα 4: Σύνολο καταστάσεων του τηλεφωνικό δικτύου τριών ζεύξεων.

(β) Οι πιθανότητες απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης θα υπολογισθούν από τις καταστάσεις απωλείας κλήσεως.

Για την ροή ΑΔ, $B_{ΑΔ}$ = P(2,0) + P(2,1) + P(1,3) + P(2,2)

Για την ροή ΒΔ, $B_{ΒΔ}$ = P(3,0) + P(1,3) + P(2,2)

Από τις σχέσεις $B_{ΑΔ}$ και $B_{ΒΔ}$ είναι φανερό ότι $B_{ΑΔ} > B_{ΒΔ}$ (όπως αναμενόταν, αφού η διαθέσιμη χωρητικότητα στην ροή ΑΔ είναι μικρότερη απ' αυτήν της ροής ΒΔ).

Το διάγραμμα των καταστάσεων δείχνει ότι έχουμε μοντέλο μορφής γινομένου διότι μπορούμε πάντα να γυρίσουμε στην κατάσταση απ' όπου ξεκινήσαμε.

Άρα για το σύνολο όλων των καταστάσεων S υπολογίζουμε:

$G = 1 + α_2 + α_2^2/2 + α_2^3/6 + α_1 + α_1\, α_2 + α_1(α_2^2/2) + α_1(α_2^3/6) + α_1^2/2 + (α_1^2/2)α_2 + (α_1^2/2)(α_2^2/2) \rightarrow$

$G = 1 + 1/2 + 1/8 + 1/48 + 1 + 1/2 + 1/8 + 1/48 + 1/2 + 1/4 + 1/16 =$

$=197/48 = 4.1$

$B_{ΑΔ}$ = (1/2+1/4+1/48+1/16)/G = (40/48)/(197/48) = 40/197 = 20.304 %

$B_{ΒΔ}$ = (1/48+1/48+1/16)/G = (5/48)/(197/48) = 5/197 = 2.538 %

Γενικά, η πιθανότητα μια ζεύξη (κλάδος) του δικτύου να είναι πλήρως κατειλημμένη έχει ως άνω όριο την τιμή $E_{C_j}(Σα_k)$ (Erlang B-Formula), όπου C_j είναι η χωρητικότητα της ζεύξης j και $Σα_k$ είναι η συνολική κίνηση (αθροιστικά) που προσφέρεται στην ζεύξη από k ροές κίνησης που περνούν απ' αυτή. Αφού λοιπόν στο δίκτυο η ζεύξη ΑΓ έχει χωρητικότητα C_1 = 2 και δέχεται κίνηση $α_1$= 1 erl από την ροή ΑΔ, βρίσκουμε ότι $E_{C_1}(α_1)$ = 20 %. Η ζεύξη ΒΔ έχει χωρητικότητα C_2 = 3 και από την ροή ΒΔ δέχεται κίνηση $α_2$= 0.5 erl, βρίσκουμε ότι $E_{C_2}(α_2)$ = 1.266 %. Η ζεύξη ΓΔ έχει χωρητικότητα C_3 = 4 και από τις ροές ΑΔ και ΒΔ δέχεται κίνηση $α_1 + α_2$= 1.5 erl, βρίσκουμε ότι $E_{C_3}(α_1+α_2)$ = 4.796 %.

Για να προσεγγίσουμε ακριβέστερα τις απώλειες σε μια ζεύξη j πρέπει να μειώσουμε τα $α_k$ στην σχέση $E_{C_j}(Σα_k)$, έτσι ώστε να λάβουμε υπ' όψιν τις απώλειες της κίνησης στις υπόλοιπες ζεύξεις (εκτός της j) από τις οποίες περνά μια ροή κίνησης. Αντικαθιστούμε λοιπόν τον όρο $α_k$ με το γινόμενο $α_k t_k(j)$, όπου $t_k(j)$ είναι η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμη τουλάχιστον μια μονάδα εύρους ζώνης σε κάθε ζεύξη της ροής της κίνησης, πλην της ζεύξης j. Αν λοιπόν L_j είναι η προσεγγιστική πιθανότητα η ζεύξη j να είναι πλήρως κατειλημμένη, έχουμε: $L_j = E_{C_j}(Σα_k\, t_k(j))$

Υποθέτοντας ότι οι απώλειες είναι ανεξάρτητες από ζεύξη σε ζεύξη: $t_k(j) = \prod_{i \in R_k - \{j\}} (1 - L_i)$, όπου R_k είναι το σύνολο των κλάδων (ζεύξεων) του δικτύου από τους οποίους περνά η κίνηση της ροής k.

Άρα: $L_j = E_{C_j}\left(\sum_{\kappa \in K_j} \alpha_\kappa \prod_{i \in R_\kappa - \{j\}} (1 - L_i) \right) \quad j = 1,...,J$

Επικαλούμενοι ξανά την υπόθεση της ανεξαρτησίας των ζεύξεων, έχουμε την ακόλουθη προσέγγιση για τις απώλειες των κλήσεων της ροής k:

$$B_k \approx 1 - \prod_{j \in R_k} (1 - L_j), \quad k = 1,...,\mathrm{K}$$

Η προσεγγιστική αυτή μέθοδος καλείται μέθοδος του μειωμένου φορτίου (RLA - Reduce Load Approximation). Αν την εφαρμόσουμε στο δίκτυο θα έχουμε:

$L_1 = E_{C_1}(α_1\, t_{ΑΔ}(1))$, $\quad t_{ΑΔ}(1) = 1-L_3$

$L_2 = E_{C_2}(α_2\, t_{ΒΔ}(2))$, $\quad t_{ΒΔ}(2) = 1-L_3$

$L_3 = E_{C_3}(α_1\, t_{ΑΔ}(3) + α_2\, t_{ΒΔ}(3))$, $\quad t_{ΑΔ}(3) = 1-L_1$, $\quad t_{ΒΔ}(3) = 1-L_2$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} &L_1=E_2(1(1-L_3)),\\ &L_2=E_3(0.5(1-L_3)),\\ &L_3=E_4(1(1-L_1)+0.5(1-L_2)) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Και για να βρούμε τις απώλειες (την πιθανότητα απωλείας κλήσεως για κάθε ροή κίνησης)

$B_1 = 1 – (1 – L_1)(1 – L_3)$

$B_2 = 1 – (1 – L_2)(1 – L_3)$

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα των ανωτέρω εξισώσεων, εφαρμόζουμε την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο.

Θέτουμε κατ' αρχάς $L_1=L_2=L_3=1$, με άλλα λόγια υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να είναι σε κάθε ζεύξη είναι 100%.

Οπότε από τις (14) προκύπτει:

$L_1 = E_2(0) = 0.0$

$L_2 = E_3(0) = 0.0$

$L_3 = E_4(0) = 0.0$

(Και $B_1 = B_2 = 1$)

Αντικαθιστούμε πάλι τις τιμές L_1, L_2, L_3 στις σχέσεις (14) και παίρνουμε:

$L_1 = E_2(1) = 0.20$

$L_2 = E_3(0.5) = 0.013$

$L_3 = E_4(1.5) = 0.048$

($B_1=1–(1-0.20)(1-0.048)=0.2384$ $B_2 = 1–(1-0.013)(1-0.048) = 0.06$)

Αντικαθιστούμε πάλι τις τιμές L_1, L_2, L_3 στις σχέσεις (14) και παίρνουμε:

$L_1 = E_2(0.952) = 0.18841$

$L_2 = E_3(0.476) = 0.01118$

$L_3= E_4(0.8+0.4935) = E_4(1.2936) = 0.03234$

Αντικαθιστούμε πάλι τις τιμές L_1, L_2, L_3 στις σχέσεις (14), θέτοντας ως κριτήριο τερματισμού αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας: οι επόμενες από τις προηγούμενες τιμές των L_1, L_2, L_3 να διαφέρουν λιγότερο από e=0.0001. Καταχωρούμε όλες τις τιμές στον πίνακα 2.

Πίνακας 2: Τιμές των L_1, L_2, L_3 της Άσκησης 6

L_1	L_2	L_3	Κίνηση στην 1	Κίνηση στην 2	Κίνηση στην 3
1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0.5	1.5
0.20	0.013	0.048	0.952	0.476	1.2936
0.18841	0.01118	0.03234	0.9676	0.4838	1.3059
0.19220	0.01165	0.03319	0.9668	0.4834	1.3019
0.19199	0.01163	0.03292	0.967	0.4835	1.3021
0.19206	0.01163	0.03293			

Τελικά:

B_1=1-(1-L_1)(1-L_3)=1-(1-0.19206)(1-0.01163)=1-0.80794*0.98837=

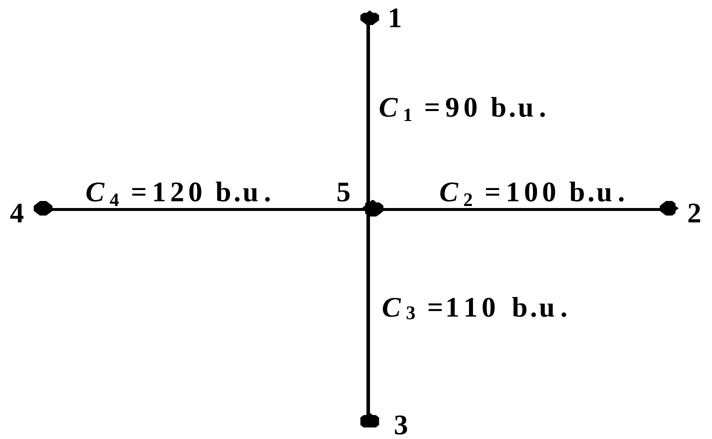
=0.2186=21.86 % (αντί 20.304 %)

B_2=1-(1-L_2)(1-L_3)=1-(1-0.01163)(1-0.03293)=1-0.98837*0.96707=

=0.044177=4.42% (αντί 2.538 %)

Άσκηση 7

Θεωρείστε το δίκτυο τοπολογίας αστέρα του σχήματος 5, το οποίο εξυπηρετεί κλήσεις δύο κατηγοριών κίνησης με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά $(\lambda_1, \mu_1^{-1}, b_1) = (15,1,1)$ και $(\lambda_2, \mu_2^{-1}, b_2) = (3,1,5)$, αντίστοιχα. Οι κλήσεις των δύο κατηγοριών κίνησης εισέρχονται στο δίκτυο από τους κόμβους 1, 2 και 3 και ακολουθούν τις σταθερές διαδρομές 1-5-2, 1-5-3, 1-5-4, 2-5-3, 2-5-4 και 3-5-4 (βλ. σχήμα 3). Αν η πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης του δικτύου είναι η πολιτική πλήρους διάθεσης να υπολογιστούν οι πιθανότητες απώλειας κλήσης των δύο κατηγοριών κίνησης σε όλες τις διαδρομές χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μέθοδο του μειωμένου φορτίου και να συγκριθούν τα αναλυτικά αποτελέσματα με αποτελέσματα προσομοίωσης.



Σχήμα 5: Δίκτυο τοπολογίας αστέρα.

Λύση

Στον πίνακα 2 παρουσιάζουμε τις πιθανότητες απώλειας κλήσης των δύο κατηγοριών κίνησης για τις διαφορετικές διαδρομές. Παρατηρούμε ότι τα αναλυτικά αποτελέσματα είναι πολύ κοντά στα αποτελέσματα της προσομοίωσης (μέσες τιμές 12 μετρήσεων με 95% διάστημα εμπιστοσύνης). Η γλώσσα προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκε είναι η SIMSCRIPT III [2].

Πίνακας 2: Πιθανότητες απώλειας κλήσεως (%) για το δίκτυο τοπολογίας αστέρα.

Διαδρομή	Προσφερόμενο φορτίο κίνησης (erl)	Πιθανότητες απώλειας κλήσεως (%)	
		Αναλυτικά αποτελέσματα	Προσομοίωση
1-5-2	15.0	5.74	5.65 ± 0.11
1-5-3	15.0	4.65	4.63 ± 0.10
1-5-4	15.0	4.20	4.19 ± 0.09
2-5-3	15.0	2.49	2.36 ± 0.07
2-5-4	15.0	2.02	1.91 ± 0.07
3-5-4	15.0	0.89	0.73 ± 0.03
1-5-2	3.0	28.56	28.27 ± 0.27
1-5-3	3.0	23.76	23.49 ± 0.34
1-5-4	3.0	21.57	21.41 ± 0.28
2-5-3	3.0	13.83	13.20 ± 0.21
2-5-4	3.0	11.37	10.84 ± 0.24
3-5-4	3	5.40	4.63 ± 0.12

[2] SIMSCRIPT III, http://www.simscript.com/

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 9 – 10: Δίκτυα απωλειών μορφής γινομένου – Προσέγγιση μειωμένου φορτίου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης