Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 5 – 6 (Μαρκοβιανό σύστημα αναμονής M/M/s – Επέκταση των Μαρκοβιανών μοντέλων)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 5 και 6 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση των Μαρκοβιανών συστημάτων αναμονής M/M/1, M/M/s, M/M/s(m) και M(n)/M/s.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 5-6: (Μαρκοβιανό σύστημα αναμονής M/M/s – Επέκταση των Μαρκοβιανών μοντέλων)

Άσκηση 1

Θεωρούμε ένα σύστημα με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, στο οποίο οι κλήσεις εξυπηρετούνται από έναν εξυπηρετητή. Η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την διαδικασία Poisson με σταθερό ρυθμό λ, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μ^{-1}. Αν n ο αριθμός των κλήσεων στην κατάσταση ισορροπίας (n = 0, 1, 2, 3, …) και P_n η αντίστοιχη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση n, τότε:

α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα μετάπτωσης καταστάσεων του συστήματος.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας μεταξύ των καταστάσεων n-1, n, και n+1.

γ) Να αποδείξετε ότι $P_n = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ n \geq 1$, όπου P_0 η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.

δ) Αν η σχέση του ερωτήματος (γ) ισχύει για τις καταστάσεις n-1 και n, τότε να δειχθεί ότι ισχύει και για την κατάσταση n+1.

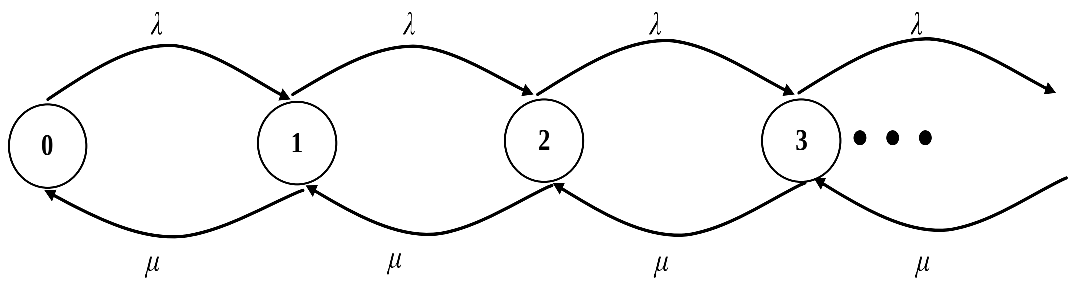
ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο και να δείξετε ότι $P_n = a^n(1-a),\ n \geq 1$, όπου $a=\lambda/\mu$.

στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να υπάρχουν <u>τουλάχιστον</u> n κλήσεις στο σύστημα.

ζ) Να υπολογίσετε: 1) την μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα, N, 2) την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής L, 3) την μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα, T, 4) την μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά, W, 5) την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής L_q' με δεδομένο ότι η ουρά δεν είναι άδεια και 6) την διασπορά (variance) της τυχαίας μεταβλητής X «αριθμός κλήσεων στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας».

Λύση

α)



Σχήμα 1: Διάγραμμα μετάπτωσης των καταστάσεων.

β) Οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας είναι της μορφής:

$$(\lambda+\mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}, \quad n \ge 1$$
$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

γ) Οι προηγούμενες σχέσεις του ερωτήματος (β) μπορούν εναλλακτικά να γραφούν ως εξής:

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}P_n - \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}, \quad n \ge 1$$
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0$$

Οπότε: $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0,\ P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0,\ P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$, κοκ.

Υποθέτουμε στο σημείο αυτό ότι ισχύει η γενική σχέση:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ n \ge 1$$

η οποία πράγματι ικανοποιεί τις εξισώσεις σφαιρικής και τοπικής ισορροπίας του συστήματος.

δ) Η σχέση $P_{n+1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}P_n - \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}$ λόγω της $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ γράφεται:

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}P_n - \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0$$
$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} - 1\right) P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} P_0$$

ε) Προκειμένου να υπολογίσουμε την P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}$$

όπου $a=\lambda/\mu$ το φορτίο κίνησης του συστήματος.

Ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ αποτελεί μια γεωμετρική σειρά όπου $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ η οποία συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{1-a}$ όταν $a<1$ (αφού $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$)[1].

[1] Στην περίπτωση όπου $a \ge 1$ η σειρά απειρίζεται θετικά αφού $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-\infty}{1-a} = +\infty$

Επομένως:

$P_0 = (1-a),\ a<1$ και $P_n = (1-a)a^n$.

Σημείωση: Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι ο υπολογισμός της P_n βασίζεται στο γεγονός ότι $\lambda<\mu$. Πράγματι, αν $\lambda>\mu$ τότε η ουρά του συστήματος μεγαλώνει συνεχώς αφού ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι πάντα μεγαλύτερος από τον ρυθμό εξυπηρέτησης τους. Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου $\lambda=\mu$, εξακολουθεί να είναι δύσκολο για τον εξυπηρετητή να μειώσει το μέγεθος της ουράς αφού η μέση τιμή του ρυθμού εξυπηρέτησης των κλήσεων δεν υπερβαίνει την μέση τιμή του ρυθμού άφιξης τους στο σύστημα.

στ) $\Pr\left\{X \geq n\right\} = \sum_{x=n}^{\infty} P_n = \sum_{x=n}^{\infty}(1-a)a^x = (1-a)a^n \sum_{x=n}^{\infty} a^{x-n} = (1-a)a^n \dfrac{1}{1-a} \Rightarrow \Pr\left\{X \geq n\right\} = a^n$.

ζ)

1) $N = E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-a)\sum_{n=0}^{\infty} na^n$

Το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = a + 2a^2 + 3a^3 + ... = a(1+2a+3a^2+...) = a\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$. Όμως το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ προκύπτει αν παραγωγίσουμε ως προς a, το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Επειδή υποθέτουμε ότι $a<1$, ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$, επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{1}{1-a}\right) = \dfrac{1}{(1-a)^2}$. Άρα:

$$N = \frac{a}{(1-a)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

2) $L = 1P_2 + 2P_3 + 3P_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \Rightarrow L = N-(1-P_0)$ ή

$$L = N - a = \frac{a}{1-a} - a = \frac{a^2}{1-a} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Σημείωση: Η σχέση $L = N-(1-P_0)$ ισχύει για όλα τα συστήματα ουρών αναμονής με έναν εξυπηρετητή, ανεξάρτητα από την διαδικασία άφιξης των κλήσεων στο σύστημα και την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησής τους.

3) Από την επέκταση του νόμου του Little: $T = \dfrac{N}{\lambda} = \dfrac{a}{\lambda(1-\alpha)} = \dfrac{1/\mu}{(1-\alpha)} = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$

όπου ο όρος $\dfrac{1/\mu}{1-a}$ εκφράζει την μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων δια την πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι ελεύθερος.

4) Από τον νόμο του Little: $W = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{a}{\mu(1-a)} = \dfrac{a}{\mu-\lambda}$

5) Η πέμπτη παράμετρος απόδοσης, $L_q^{'}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$L_q^{'} = E\left[X_q \middle| X_q \neq 0\right] = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_n^{'}$$

όπου X_q είναι ο αριθμός κλήσεων στην ουρά αναμονής σε κατάσταση ισορροπίας και $P_n^{'}$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να υπάρχουν *n* κλήσεις στο σύστημα με δεδομένο ότι η ουρά αναμονής δεν είναι άδεια.

Η πιθανότητα $P_n^{'}$ υπολογίζεται από την σχέση:

$$P_n^{'} = \frac{P_n}{\sum_{n=2}^{\infty} P_n} = \frac{P_n}{1-(1-a)-a(1-a)} = \frac{P_n}{a^2}$$

Σημείωση: Ο παρονομαστής στο τελευταίο μέλος μπορεί να προκύψει απευθείας από το ερώτημα (στ), όπου $\Pr\left\{X \geq n\right\} = a^n$, για *n*=2.

Επομένως:

$$L_q^{'} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{P_n}{a^2} = \frac{1}{a^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} nP_n - \sum_{n=2}^{\infty} P_n\right) = \frac{1}{a^2}\left(N - P_1 - (1-P_0-P_1\right) = \frac{1}{a^2}\left(N-a\right)$$

ή

$$L_q^{'} = \frac{1}{1-a} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

6) Για να υπολογίσουμε την διασπορά της μεταβλητής *X*, θεωρούμε αρχικά την ροπή (moment) 2ης τάξης της *X* η οποία δίνεται από την σχέση[2]:

$$E[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = (1-a)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(a+1)}{(1-a)^2}$$

Επίσης: $E^2[X] = T^2 = \dfrac{a^2}{(1-a)^2}$

Επομένως η διασπορά $\sigma^2[X]$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma^2[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{a(a+1)}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

---

[2] Έχουμε ήδη δείξει ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^{n-1} = \frac{d}{da}\left(\frac{a}{(1-a)^2}\right) = \frac{1+a}{(1-a)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}$$

Σημείωση: Η τελευταία σχέση δείχνει ότι αύξηση του a συνεπάγεται και αύξηση της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής X «αριθμός κλήσεων στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας», οπότε μειώνεται η δυνατότητα πρόβλεψης της συμπεριφοράς του συστήματος.

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του χρόνου παραμονής μιας νέας κλήσης σε σύστημα M/M/1 όταν κατά την άφιξη της βρει n-1 κλήσεις στην ουρά αναμονής και μία κλήση στον εξυπηρετητή που μόλις ξεκίνησε την εξυπηρέτηση της.

Λύση

Κατά την άφιξη της κλήσης στο σύστημα, υπάρχουν συνολικά n κλήσεις που πρέπει να εξυπηρετηθούν πριν από εκείνη. Αν η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης κάθε κλήσης είναι $1/\mu$ τότε η μέση τιμή του χρόνου παραμονής, T, της νέας κλήσης στο σύστημα θα δίνεται από την έκφραση $\sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\frac{n+1}{\mu} \right)$ όπου ο όρος $(n+1)/\mu$ εκφράζει τον χρόνο που απαιτείται για να εξυπηρετηθούν οι n κλήσεις συν την νέα κλήση από τον εξυπηρετητή.

Επομένως:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{n+1}{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (1-a) \frac{n+1}{\mu} = \frac{(1-a)}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a^n (n+1) \\
&= \frac{(1-a)}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (na^n + a^n) = \frac{(1-a)}{\mu} \left(a \frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} a^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) \\
&= \frac{(1-a)}{\mu} \left(\frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{1-a} \right) = \frac{1/\mu}{1-a}
\end{aligned}
$$

που είναι η γνωστή σχέση που ισχύει για το μοντέλο M/M/1.

Σημείωση: Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε σύστημα M/M/1, ανεξάρτητα από τον τρόπο εξυπηρέτησης των κλήσεων (π.χ. FIRST COME – FIRST SERVED, LAST COME – FIRST SERVED κτλ). Η μόνη προϋπόθεση είναι ο εξυπηρετητής να μην είναι αδρανής όσο υπάρχουν κλήσεις που πρέπει να εξυπηρετηθούν.

Άσκηση 3

Σε σύστημα αναμονής M/M/1, να υπολογιστεί η πιθανότητα, $W(t)=\Pr\left\{T_q \le t\right\}$, μια συγκεκριμένη κλήση να παραμείνει στην ουρά αναμονής το πολύ για χρόνο ίσο με T_q αν θεωρήσουμε ότι οι κλήσεις που αναμένουν εισέρχονται στον εξυπηρετητή σύμφωνα με τον μηχανισμό First Come – First Served (FCFS).

Λύση

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά, *W*, ή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα, *T*, δεν χρειάστηκε να γίνει κάποια υπόθεση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι κλήσεις αποχωρούν από την ουρά και εισέρχονται στον εξυπηρετητή. Όταν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε π.χ. την πιθανότητα μιας συγκεκριμένης κλήσης να παραμείνει το πολύ δύο λεπτά στην ουρά τότε είναι απαραίτητο να καθορίσουμε τον μηχανισμό με τον οποίο εισέρχονται οι κλήσεις (που αναμένουν) στον εξυπηρετητή. Στην περίπτωση μας ο μηχανισμός είναι ο FCFS.

Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, ορίζουμε ως T_q την τυχαία μεταβλητή «χρόνος αναμονής στην ουρά» και $W(t)$ την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) της T_q. Η κατανομή $W(t)$ εκφράζει την πιθανότητα μια κλήση να χρειαστεί να αναμένει χρόνο μικρότερο ή ίσο του *t* προκειμένου να αρχίσει η εξυπηρέτηση της **και έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα να αποτελείται από ένα διακριτό και ένα συνεχές τμήμα**. Το διακριτό τμήμα εκφράζει την πιθανότητα μια νέα κλήση να βρει το σύστημα άδειο και να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση της αμέσως, χωρίς δηλαδή να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά. Το συνεχές τμήμα εκφράζει την πιθανότητα μια νέα κλήση να βρει τον εξυπηρετητή κατειλημμένο και να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά αναμονής για χρόνο μικρότερο ή ίσο από *t*.

Στα πλαίσια της ανάλυσης μας ορίζουμε ως Q_n την πιθανότητα μια νέα κλήση να βρει κατά την άφιξη της στο σύστημα *n* κλήσεις, δηλαδή 1 κλήση που εξυπηρετείται και *n*-1 κλήσεις που αναμένουν στην ουρά. Τότε το διακριτό τμήμα της $W(t)$ γράφεται ως:

$$W(0)=\Pr\left\{T_q \le 0\right\}=\Pr\left\{T_q = 0\right\}=Q_0$$

και εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο κατά την άφιξη μιας κλήσης.

Η προηγούμενη σχέση λόγω της σχέσης $P_0=(1-a),\ a<1$, γράφεται τελικά ως:

$$W(0)=Q_0=P_0=1-a$$

Κατ' επέκταση η πιθανότητα μια κλήση να περιμένει στην ουρά αναμονής πριν εξυπηρετηθεί ορίζεται από την σχέση:

$$1-W(0)=a$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό πως οι πιθανότητες Q_n δεν είναι ίδιες με τις πιθανότητες P_n (οι οποίες εκφράζουν το ποσοστό του χρόνου όπου υπάρχουν *n* κλήσεις στο σύστημα), παρά μόνο στην περίπτωση που έχουμε αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Στην περίπτωση λοιπόν του συστήματος M/M/1 ισχύει $P_n = Q_n$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το συνεχές τμήμα της $W(t)$ (για *t* > 0) και έχοντας θεωρήσει ότι η κλήση βρίσκει *n* κλήσεις (1 κλήση που εξυπηρετείται και *n*-1 κλήσεις στην ουρά) κατά την άφιξη στο σύστημα, συμπεραίνουμε ότι για να αρχίσει η εξυπηρέτηση της νέας κλήσης θα πρέπει όλες οι *n* κλήσεις να εξυπηρετηθούν πριν το πέρας του χρόνου *t*. Εξαιτίας της ιδιότητας της αμνησίας που έχει η εκθετική κατανομή, ο χρόνος που απομένει μέχρι να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση της πρώτης κλήσης (από τις *n*) ακολουθεί την ίδια εκθετική κατανομή με τον συνολικό χρόνο εξυπηρέτησής της. Επομένως το συνεχές τμήμα της $W(t)$ αποτελείται από το άθροισμα *n* τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή, άρα ακολουθεί την κατανομή Erlang τύπου *n*. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τόσο το διακριτό όσο και το συνεχές τμήμα της $W(t)$ προκύπτει τελικά ότι:

$$
\begin{aligned}
& W(t) = \Pr\left\{T_q \le t\right\} = \\
& = W(0) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left\{ n\, \kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\; \varepsilon\xi\upsilon\pi\eta\rho\varepsilon\tau o\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\iota\; \sigma\varepsilon \le t \,\middle|\, n\, \kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\; \sigma\tau o\; \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\; \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\; \tau\eta\nu\; \acute{\alpha}\varphi\iota\xi\eta \right\} P_n \\
& = 1 - a + (1-a)\sum_{n=1}^{\infty} a^n \int_0^t \frac{\mu(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu u} du \\
& = 1 - a + a\int_0^t \mu(1-a) e^{-\mu u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu u a)^{n-1}}{(n-1)!} du \\
& = 1 - a + a\int_0^t \mu(1-a) e^{-\mu(1-a)u} du \\
& = 1 - a e^{-\mu(1-a)t}
\end{aligned}
$$

Ο προηγούμενος τύπος της πιθανότητας $W(t)$ μπορεί τελικά να απλοποιηθεί στην μορφή:

$$W(t) = 1 - a e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \ge 0$$

Σημείωση: Από την προηγούμενη σχέση, προκύπτει ότι η πιθανότητα $\Pr\left\{T_q > t\right\} = 1 - W(t)$ και η δεσμευμένη πιθανότητα $\Pr\left\{T_q > t \,\middle|\, T_q > 0\right\}$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$\Pr\left\{T_q > t\right\} = a e^{-(\mu-\lambda)t}$, $\Pr\left\{T_q > t \,\middle|\, T_q > 0\right\} = e^{-(\mu-\lambda)t}$ επειδή $\Pr\left\{T_q > 0\right\} = a$.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά, *W*, με βάση την γνώση της CDF, *W*(*t*), που υπολογίστηκε στην άσκηση 3.

Λύση

Υπολογίζουμε αρχικά την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF), ως την παράγωγο της CDF:

$$w(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - ae^{-\mu(1-a)t}\right) = a\mu(1-a)e^{-\mu(1-a)t}.$$

Από τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$W = \int_0^\infty tw(t)dt = \int_0^\infty ta\mu(1-a)e^{-\mu(1-a)t}dt = \int_0^\infty t\frac{\lambda}{\mu}\mu(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}\int_0^\infty t(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}$$

αφού $\int_0^\infty t(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt = \frac{1}{\mu-\lambda}$ είναι η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής.

Τελικά, $W = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}$ που είναι η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 5

Σε σύστημα αναμονής M/M/1, να υπολογιστεί η πιθανότητα, $W_{system}(t) = \Pr\{T \le t\}$, μια συγκεκριμένη κλήση να παραμείνει στο σύστημα το πολύ για χρόνο ίσο με *T* αν θεωρήσουμε ότι οι κλήσεις που αναμένουν εισέρχονται στον εξυπηρετητή σύμφωνα με τον μηχανισμό FCFS.

Λύση

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορεί να υπολογιστεί η CDF του συνολικού χρόνου παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα (sojourn time) με βασική διαφορά ότι τώρα απαιτείται να εξυπηρετηθούν *n*+1 κλήσεις σε χρόνο μικρότερο ή ίσο του *t*. Αν ορίσουμε ως *T* τον συνολικό χρόνο παραμονής μιας νέας κλήσης στο σύστημα και $W_{system}(t)$ την CDF του *T* τότε αποδεικνύεται ότι:

$$W_{system}(t) = \Pr\{T \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{n+1\,\text{κλήσεις εξυπηρετούνται σε} \le t \,|\, n\,\text{κλήσεις στο σύστημα κατά την άφιξη}\} P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \mu \frac{(\mu u)^n}{n!} e^{-\mu u} du \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\lambda/\mu) = \int_0^t (\mu-\lambda) e^{-\mu u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} du = \int_0^t (\mu-\lambda) e^{-\mu u} e^{\lambda u} du = \qquad \text{ή}$$

$$= \int_0^t (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)u} du$$

$$W_{system}(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t},\ t \ge 0$$

δηλαδή η εκθετική κατανομή με μέση τιμή $W = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$.

Άσκηση 6

Εξυπηρετητής έχει περιορισμένη ουρά αναμονής και γι’ αυτό εφαρμόζει πολιτική απόρριψης πακέτων όταν ο αριθμός τους στο σύστημα είναι *m* (ένα πακέτο εξυπηρετείται και *m*-1 βρίσκονται στην ουρά αναμονής). Αν η άφιξη των πακέτων ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ο χρόνος εξυπηρέτησης των πακέτων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μ^{-1} τότε:

α) Να δώσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα μονίμου καταστάσεως το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*.

γ) Να προσδιορίσετε την μέση τιμή του πλήθους των πακέτων στο σύστημα.

δ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή των πακέτων στην ουρά αναμονής.

ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα απόρριψης πακέτων.

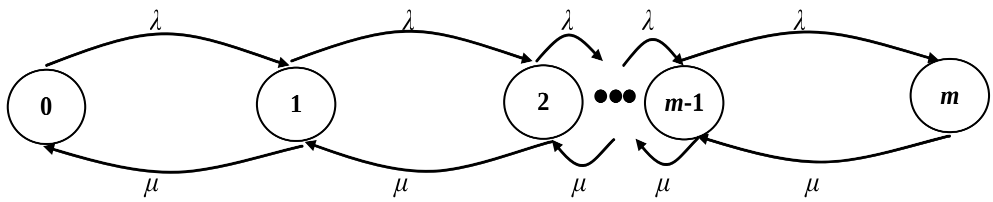
στ) Να προσδιορίσετε την μέση τιμή του χρόνου παραμονής στο σύστημα (αναμονή και εξυπηρέτηση) καθώς και την μέση τιμή του χρόνου αναμονής.

ζ) Να προσδιορίσετε την διεκπεραιωτική ικανότητα (throughput) του συστήματος.

η) Να υπολογίσετε την εκμετάλλευση (utilization) του συστήματος.

Λύση

α) Πρόκειται για το μοντέλο αναμονής M/M/1/m το οποίο διαφέρει από το μοντέλο M/M/1 στο ότι η ουρά αναμονής είναι πεπερασμένη.



Σχήμα 2: Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων για το σύστημα M/M/1/*m*.

β) Οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας για το σύστημα M/M/1/*m* είναι της μορφής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda+\mu)}{\mu} P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}, \quad 1 \le n < m-1$$

$$P_m = \frac{\lambda}{\mu} P_{m-1}$$

Μέσω των προηγούμενων εξισώσεων εκφράζουμε τις πιθανότητες P_2, P_3, P_4… ως συνάρτηση της P_0. Πράγματι, $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0,\ P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0,\ P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$, κοκ. Υποθέτουμε ότι ισχύει η γενική σχέση:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ 1 \le n \le m$$

η οποία πράγματι ικανοποιεί τις εξισώσεις σφαιρικής και τοπικής ισορροπίας του μοντέλου M/M/1/*m*.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα P_0, γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=0}^{m} P_n = 1$. Δεδομένου επίσης ότι $a=\lambda/\mu$, προκύπτει τελικά:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} a^n}$$

Ο όρος $\sum_{n=0}^{m} a^n$ αποτελεί μια γεωμετρική σειρά όπου:

$$\sum_{n=0}^{m} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{m+1}}{1-a}, & a \ne 1 \\ m+1, & a = 1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-a}{1-a^{m+1}}, & a \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+1}, & a = 1 \end{cases}$$

Τελικά:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{a^n(1-a)}{1-a^{m+1}}, & a \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+1}, & a = 1 \end{cases}$$

Σημείωση: Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι ο υπολογισμός της P_n μπορεί να επιτευχθεί για όλες τις θετικές τιμές του α (συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης α=1). Όταν $\lambda > \mu$ τότε ο αριθμός των πακέτων στο σύστημα αυξάνεται, αλλά η αύξηση αυτή περιορίζεται από το γεγονός ότι το σύστημα έχει περιορισμένο αριθμό καταστάσεων m. Σημειώνεται επίσης ότι όταν $a<1,\ m \to \infty$ τότε προκύπτει το μοντέλο M/M/1.

γ) Η μέση τιμή των πακέτων στο σύστημα N, όταν $a \neq 1$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=0}^{m} nP_n = \sum_{n=0}^{m} nP_n = aP_0 \sum_{n=0}^{m} na^{n-1} = aP_0 \sum_{n=0}^{m} \frac{d}{da}\left(a^n\right) = aP_0 \frac{d}{da}\left(\sum_{n=0}^{m} a^n\right) \\ &= aP_0 \frac{d}{da}\left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right) = aP_0 \left(\frac{\left(1-a\right)\left(-(m+1)a^m\right)+1-a^{m+1}}{\left(1-a\right)^2}\right) \\ &= aP_0 \left(\frac{-(m+1)a^m+(m+1)a^{m+1}+1-a^{m+1}}{\left(1-a\right)^2}\right) = aP_0 \left(\frac{1-(m+1)a^m+ma^{m+1}}{\left(1-a\right)^2}\right) \\ &= a\left(\frac{1-a}{1-a^{m+1}}\right)\left(\frac{1-(m+1)a^m+ma^{m+1}}{\left(1-a\right)^2}\right) = a\left(\frac{1-(m+1)a^m+ma^{m+1}}{(1-a^{m+1})\left(1-a\right)}\right) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$N = a\left(\frac{1-(m+1)a^m+ma^{m+1}}{(1-a^{m+1})\left(1-a\right)}\right),\ a \neq 1$$

Όταν α=1, τότε:

$$N = \sum_{n=0}^{m} nP_n = \sum_{n=0}^{m} n\frac{1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} n = \frac{1}{m+1}\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m}{2}$$

Επομένως:

$$N = \frac{m}{2},\ a = 1$$

δ) Η μέση τιμή των πακέτων στην ουρά αναμονής, L, υπολογίζεται από την σχέση:

$$L = 1P_2 + 2P_3 + 3P_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = N - (1 - P(0))$$
$$= N - \left(1 - \frac{1-a}{1-a^{m+1}}\right) = N - \frac{a(1-a^m)}{1-a^{m+1}}$$

Επομένως:

$$L = N - \frac{a(1-a^m)}{1-a^{m+1}}$$

ε) Η πιθανότητα απώλειας πακέτων, δίνεται από την σχέση:

$$P_m = \frac{a^m(1-a)}{1-a^{m+1}}, \quad a \neq 1$$

στ) Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του χρόνου παραμονής στο σύστημα, *T*, εφαρμόζουμε την επέκταση του νόμου του Little, $T = N/\lambda_{eff}$, όπου λ_{eff} είναι ο ενεργός ρυθμός άφιξης των πακέτων ο οποίος εκφράζει τον ρυθμό άφιξης των πακέτων που πραγματικά εισέρχονται στον εξυπηρετητή. Η τιμή του λ_{eff} δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{m} \lambda_n P_n = \lambda \sum_{n=0}^{m-1} P_n = \lambda(1-P_m)$$

όπου $1-P_m$ είναι η πιθανότητα το σύστημα να μην είναι πλήρως κατειλημμένο.

Επομένως:

$$T = \frac{N}{\lambda(1-P_m)}$$

Όμοια, η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά υπολογίζεται, από τον νόμο του Little, ως εξής:

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_m)}$$

Σημείωση 1: Εναλλακτικά, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η σχέση $W = T - \frac{1}{\mu}$.

Σημείωση 2: Για τον υπολογισμό του *L* μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση $L = N - \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$ η οποία θυμίζει την σχέση $L = N - \frac{\lambda}{\mu} = N - a$ που ισχύει στο μοντέλο M/M/1.

ζ) Όσον αφορά στην διεκπεραιωτική ικανότητα (throughput) του συστήματος M/M/1/m, τονίζουμε ότι δεν ισούται με τον ρυθμό άφιξης των πακέτων εφόσον ένα ποσοστό των πακέτων μπλοκάρεται και δεν εισέρχεται στο σύστημα. Η πιθανότητα απώλειας πακέτων ισούται με την πιθανότητα να υπάρχουν *m* πακέτα στο σύστημα, P_m. Αντίθετα, η πιθανότητα το σύστημα να μην είναι πλήρες δίνεται από την σχέση $1-P_m$. Επομένως, η διεκπεραιωτική ικανότητα, *X*, δίνεται από την σχέση:

$X = \lambda_{eff} = \lambda(1 - P_m)$

Η διεκπεραιωτική ικανότητα μπορεί επίσης να εξεταστεί με βάση τον ρυθμό εξυπηρέτησης των πακέτων από τον εξυπηρετητή. Όσο υπάρχουν πακέτα στο σύστημα, η εξυπηρέτηση αυτών γίνεται με ρυθμό *μ*. Η πιθανότητα ο εξυπηρετητής να εξυπηρετεί ένα πακέτο ισούται με $1 - P_0$. Επομένως, η διεκπεραιωτική ικανότητα πρέπει να δίνεται από την σχέση $X = \mu(1 - P_0)$.

Δηλαδή:

$X = \lambda_{eff} = \lambda(1 - P_m) = \mu(1 - P_0)$

Πράγματι, αν εξετάσουμε τον λόγο $(1 - P_0)/(1 - P_m)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{1 - P_0}{1 - P_m} = \frac{1 - \left[\dfrac{1 - a}{1 - a^{m+1}}\right]}{1 - \left[\dfrac{(1 - a)a^m}{1 - a^{m+1}}\right]} = \frac{1 - a^{m+1} - 1 + a}{1 - a^{m+1} - (1 - a)a^m} = \frac{a - a^{m+1}}{1 - a^m} = a = \frac{\lambda}{\mu}$$

η) Η εκμετάλλευση (utilization) του συστήματος, *U*, ισούται με την πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι κατειλημμένος. Επομένως: $U = 1 - P_0 = \dfrac{1}{\mu} X = a(1 - P_m)$

Άσκηση 7

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή και περιορισμένη ουρά αναμονής. Η άφιξη των χρηστών ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό *λ* = 1 χρήστης ανά 4 λεπτά ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή *h* = 3 λεπτά. Να υπολογιστεί το ποσοστό των χρηστών που χάνονται όταν: 1) δεν υπάρχει ουρά αναμονής, 2) η ουρά αναμονής αποτελείται από 2 θέσεις και γ) η ουρά αναμονής αποτελείται από 4 θέσεις.

Λύση

Όλα τα ποσοστά μπορούν να υπολογιστούν με βάση την γενική σχέση (βλ. άσκηση 6):

$$P_m = \frac{a^m(1 - a)}{1 - a^{m+1}}, \quad a \neq 1$$

όπου *α* = *λ*/*μ* = (1/4) / (1/3) = 3/4 = 0.75 erl.

1) Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα μοντέλο απωλειών M/M/1/1 και

$$P_1 = \frac{a(1 - a)}{1 - a^2} = \frac{0.75(1 - 0.75)}{1 - (0.75)^2} = 0.429$$

2) Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε το μοντέλο M/M/1/3 και

$$P_3 = \frac{a^3(1-a)}{1-a^4} = \frac{(0.75)^3(1-0.75)}{1-(0.75)^4} = 0.154\,.$$

3) Στην τρίτη περίπτωση έχουμε το μοντέλο M/M/1/5 και

$$P_5 = \frac{a^5(1-a)}{1-a^6} = \frac{(0.75)^5(1-0.75)}{1-(0.75)^6} = 0.072\,.$$

Άσκηση 8

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή. Η άφιξη των χρηστών ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 15 χρήστες την ώρα, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε χρήστη είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 4 λεπτά. Όταν ο εξυπηρετητής είναι κατειλημμένος τότε οι νέοι χρήστες μπορεί να αρνηθούν, με κάποια πιθανότητα, να μπουν στην ουρά αναμονής. Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχουν n χρήστες στο σύστημα (1 χρήστης εξυπηρετείται και n-1 αναμένουν στην ουρά αναμονής), η πιθανότητα ένας νέος χρήστης να αρνηθεί να μπει στην ουρά αναμονής είναι n/3 για n=1, 2, 3.

α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας.

γ) Μέσω των εξισώσεων του ερωτήματος (β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες μονίμου καταστάσεως όλων των δυνατών καταστάσεων του συστήματος.

δ) Να ελέγξετε αν ισχύει η έννοια της τοπικής ισορροπίας μεταξύ των γειτονικών καταστάσεων.

ε) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα, T.

Λύση

α)

Εφόσον η πιθανότητα ένας νέος χρήστης να αρνηθεί να μπει στην ουρά αναμονής είναι n/3 για n=1, 2, 3, αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη πιθανότητα να αποφασίσει να μπει στην ουρά αναμονής είναι 1-(n/3). Επομένως, ο ρυθμός άφιξης των χρηστών στο σύστημα εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών στην ουρά αναμονής.

Αν λ_n ο ρυθμός αυτός τότε:

$\lambda_0 = \lambda = 15$,

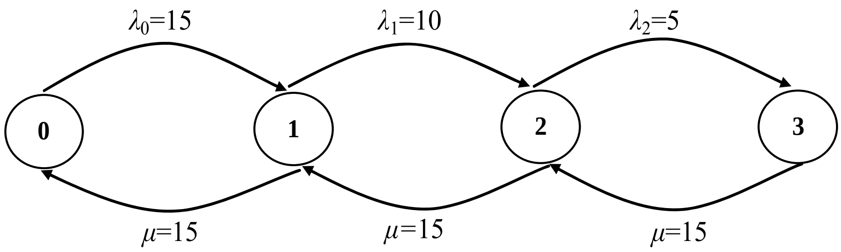
$\lambda_1 = \lambda(1-1/3)=15*(2/3)=10$,

$\lambda_2= \lambda(1-2/3)=15*(1/3)=5$,

$\lambda_3=\lambda(1-3/3)=15*0=0$ και

$\lambda_4 = \lambda_5 = \ldots = 0$.

Άρα το σύστημα αυτό έχει μόνο 4 δυνατές καταστάσεις, που παρουσιάζονται στο διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων που ακολουθεί, όπου $\mu = 1/h = 1/(4/60) = 15$ χρήστες ανά ώρα.



Σχήμα 3: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β)

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \lambda_0 P_0 \Rightarrow 15P_1 = 15P_0 && \Rightarrow \quad P_1 - P_0 = 0 \\
&\lambda_0 P_0 + \mu P_2 = (\lambda_1 + \mu)P_1 \Rightarrow 15P_0 + 15P_2 = 25P_1 && \Rightarrow 15P_0 + 15P_2 - 25P_1 = 0 \\
&\lambda_1 P_1 + \mu P_3 = (\lambda_2 + \mu)P_2 \Rightarrow 10P_1 + 15P_3 = 20P_2 && \Rightarrow 10P_1 + 15P_3 - 20P_2 = 0 \\
&\lambda_2 P_2 = \mu P_3 \Rightarrow 5P_2 = 15P_3 && \Rightarrow \quad 5P_2 - 15P_3 = 0
\end{aligned}
$$

Προκύπτει επομένως ένα γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων (όσες και ο αριθμός των καταστάσεων) με 4 αγνώστους (P_0, P_1, P_2 και P_3).

γ) Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα αυτό αντικαθιστούμε μια από τις τέσσερις εξισώσεις με την $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$. Η επίλυση του συστήματος αυτού οδηγεί στην ακριβή λύση: $P_0 = \frac{9}{26},\ P_1 = \frac{9}{26}, P_2 = \frac{3}{13}, P_3 = \frac{1}{13}$.

δ) Για να ισχύει η έννοια της τοπικής ισορροπίας πρέπει η λύση του ερωτήματος (γ) να ικανοποιεί τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας.

Στο παράδειγμα μας, έχουμε τρία ζευγάρια γειτονικών καταστάσεων: i) την κατάσταση 0 με την 1, ii) την κατάσταση 1 με την 2 και iii) την κατάσταση 2 με την 3. Για τα ζευγάρια αυτά εφαρμόζουμε την έννοια της τοπικής ισορροπίας, «ρυθμός ανόδου» = «ρυθμός καθόδου» και έχουμε:

$$\lambda_0 P_0 = \mu P_1 \Rightarrow 15P_0 = 15P_1 \Rightarrow P_0 = P_1$$

$$\lambda_1 P_1 = \mu P_2 \Rightarrow 10P_1 = 15P_2 \Rightarrow P_1 = 1.5P_2$$
$$\lambda_2 P_2 = \mu P_3 \Rightarrow 5P_2 = 15P_3 \Rightarrow P_2 = 3P_3$$

Πράγματι, οι εξισώσεις αυτές ισχύουν εφόσον ικανοποιείται η λύση του ερωτήματος (γ).

ε) Από την επέκταση του νόμου του Little, ισχύει ότι η μέση τιμή των χρηστών σ' όλο το σύστημα είναι: $N=\lambda T$

Όμως, από τον ορισμό της μέσης τιμής: $N = 0 * P_0 + 1 * P_1 + 2 * P_2 + 3 * P_3 \Rightarrow N = \frac{27}{26}$

Στο σύστημα μας ο ρυθμός άφιξης των χρηστών δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την κατάσταση του συστήματος. Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των χρηστών που τελικά αποφασίζουν να μπουν στο σύστημα (effective arrival rate), εφαρμόζουμε εκ νέου τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$\lambda_{eff} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 15\frac{9}{26} + 10\frac{9}{26} + 5\frac{3}{13} \Rightarrow \lambda_{eff} = \frac{255}{26}$$

Επομένως: $T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{27}{255} = \frac{9}{85}$ ώρες .

Άσκηση 9

Στην πράξη συμβαίνει συχνά οι χρήστες να αρνούνται να εισέλθουν σ' ένα σύστημα αναμονής όταν η ουρά του συστήματος είναι μεγάλη. Ωστόσο δεν είναι λογικό να θεωρούμε ότι όλοι οι νέοι χρήστες έχουν πάντοτε την ίδια άρνηση να εισέλθουν στο σύστημα. Για τον λόγο αυτό, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την άρνηση αυτή μειώνοντας τον ρυθμό άφιξης των χρηστών στο σύστημα σε συνάρτηση με την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος:

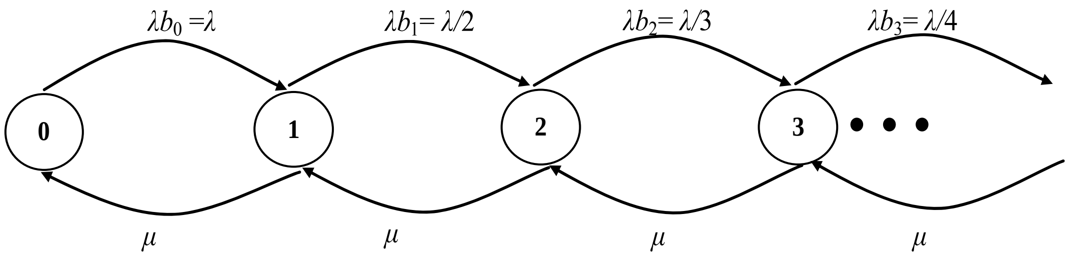
$$\lambda_n = \lambda b_n$$

όπου η συνάρτηση b_n έχει την γενική μορφή $0 \le b_{n+1} \le b_n \le 1,\ (n > 0,\ b_0 \equiv 1)$.

Έστω λοιπόν ένα σύστημα αναμονής με άπειρη ουρά και έναν εξυπηρετητή. Οι χρήστες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 χρήστες την ώρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης των χρηστών είναι εκθετικά κατανεμημένος με ρυθμό 5 χρήστες την ώρα. Στο σύστημα αυτό, οι χρήστες αρνούνται να μπουν στην ουρά αναμονής όταν αυτή είναι μεγάλη. Πιο συγκεκριμένα, όταν υπάρχουν n χρήστες στο σύστημα, τότε ένας νέος χρήστης μπαίνει στην ουρά αναμονής με πιθανότητα $b_n = 1/(1+n)$. Αφού σχεδιάσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος, να υπολογίσετε: α) την πιθανότητα μονίμου καταστάσεως P_n , β) την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο, P_0, γ) την μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των χρηστών που τελικά αποφασίζουν να μπουν στο σύστημα (effective arrival rate), λ_{eff} , δ) την απόδοση του εξυπηρετητή (server utilization-efficiency), p, ε) την μέση τιμή των χρηστών σ' όλο το σύστημα, N, στ) την μέση τιμή του χρόνου παραμονής των χρηστών στο σύστημα, T, ζ) την μέση τιμή του χρόνου αναμονής των χρηστών, W, και η) την μέση τιμή των χρηστών στην ουρά αναμονής, L.

Λύση

Το διάγραμμα μεταπτώσεων καταστάσεων του συστήματος είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 4: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

α) Από τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας ισχύει:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} b_0 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda b_1}{\mu} P_1 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda b_1}{\mu} P_0 \Rightarrow P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 b_0 b_1 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda b_2}{\mu} P_2 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda b_1}{\mu} P_0 \Rightarrow P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 b_0 b_1 b_2 P_0$$

και γενικά:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i-1}\right) P_0$$

Στην περίπτωση μας, όπου b_n = 1/(1+n), προκύπτει ότι: $\prod_{i=1}^{n} b_{i-1} = \frac{1}{n!}$.

Επομένως: $P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} P_0$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} = P_0 e^{\lambda/\mu} = 1$$

Οπότε: $P_0 = e^{-\lambda/\mu}$

Επομένως: $P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} \Rightarrow P_n = \frac{2^n}{n!} e^{-2}$

η οποία είναι η κατανομή Poisson με μέση τιμή 2.

β) $P_0 = e^{-2} = 0.13533$

γ) Η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων που πραγματικά εισέρχονται στον σύστημα (και κατ' επέκταση στον εξυπηρετητή), λ_{eff} , δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} = \frac{\mu}{\lambda} \lambda e^{-\lambda/\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{(n+1)!} = \mu e^{-\lambda/\mu} \left[\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{(n+1)!} - 1 \right] =$$
$$= \mu e^{-\lambda/\mu} \left(e^{\lambda/\mu} - 1 \right) = \mu - \mu P_0 \Rightarrow$$
$$\lambda_{eff} = \mu(1 - P_0)$$

Επομένως: λ_{eff} =0.07205 χρήστες ανά λεπτό.

Σημείωση: Για την απόδειξη του παραπάνω τύπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = e^{\lambda/\mu}$

δ) $p = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = 0.8647$ (που εκφράζει και το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνει ο εξυπηρετητής)

ε) $N = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda}{\mu} P_0 e^{\lambda/\mu} \Rightarrow N = \frac{\lambda}{\mu} = 1.99999$ χρήστες

στ) Από την επέκταση του νόμου του Little: $T = N/\lambda_{eff}$ = 27.756 λεπτά.

ζ) $W = T - h = T - 1/\mu$ = 15.756 λεπτά

η) Από τον νόμο του Little: $L = \lambda_{eff} W$ = 1.135 χρήστες.

Άσκηση 10

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή και άπειρη ουρά αναμονής. Η άφιξη των χρηστών στο σύστημα ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 4 χρήστες την ώρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης των χρηστών είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 1 ώρα. Ένας νέος χρήστης, που βρίσκει n χρήστες στο σύστημα, ενδέχεται να αρνηθεί να μπει στην ουρά αναμονής με τις ακόλουθες πιθανότητες:

$$P\left\{ \text{νέος χρήστης δεν μπαίνει στην ουρά} \,\middle|\, n \text{ χρήστες στο σύστημα} \right\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } n = 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{αν } n = 2 \\ 1, & \text{αν } n = 3 \end{cases} .$$

Επίσης, ένας χρήστης που βρίσκεται στην ουρά αναμονής ενδέχεται να την εγκαταλείψει (οπότε δεν θα εξυπηρετηθεί) αν ο χρόνος αναμονής του υπερβεί κάποιο όριο. Πιο συγκεκριμένα, ο υπολειπόμενος χρόνος που είναι διατεθειμένος να περιμένει ο πρώτος χρήστης στην ουρά αναμονής είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 1 ώρα. Ο αντίστοιχος χρόνος για τον χρήστη που είναι στην δεύτερη θέση της ουράς αναμονής είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 0.5 ώρες.

α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

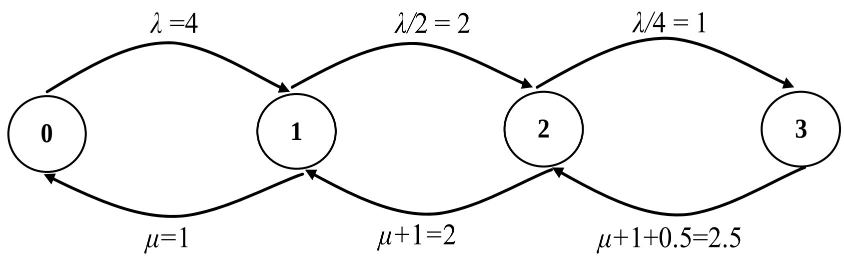
β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μονίμου καταστάσεως P_n, n=0, 1, 2, 3, μέσω των εξισώσεων τοπικής ισορροπίας.

γ) Να υπολογιστεί το ποσοστό των νέων χρηστών που αρνούνται να μπουν στην ουρά αναμονής.

δ) Να υπολογιστούν: 1) η μέση τιμή των χρηστών στην ουρά αναμονής, L και 2) η μέση τιμή των χρηστών στο σύστημα, N.

Λύση

α) Το διάγραμμα μεταπτώσεων καταστάσεων του συστήματος είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 5: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) Από τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας ισχύει:

$$P_1 = 4P_0$$
$$P_2 = P_1 \Rightarrow P_2 = 4P_0$$
$$P_3 = \frac{1}{2.5}P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{4}{2.5}P_0$$

Επίσης: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$

Οπότε:

$$P_0 + 4P_0 + 4P_0 + 1.6P_0 = 1 \Rightarrow$$
$$P_0 = 0.09434 \text{ και } P_1 = P_2 = 0.37736, P_3 = 0.15094$$

γ) Το ποσοστό των νέων χρηστών που αρνούνται να μπουν στην ουρά αναμονής = $\frac{1}{2}P_1 + \frac{3}{4}P_2 + P_3$ = 0.6226.

δ) Από τον ορισμό της μέσης τιμής:

1) $L = P_2 + 2P_3 = 0.67924$
2) $N = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 1.5849$

Άσκηση 11

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή και άπειρη ουρά αναμονής. Η άφιξη των χρηστών στο σύστημα ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 30 χρήστες την ώρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης των χρηστών είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 1.5 λεπτό, όσο στο σύστημα βρίσκεται ένας μόνο χρήστης. Όταν στο σύστημα βρίσκονται παραπάνω από ένας χρήστες, τότε ενεργοποιείται και δεύτερος εξυπηρετητής, διαφορετικής ταχύτητας από τον πρώτο. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος εξυπηρέτησης των χρηστών παραμένει εκθετικά κατανεμημένος αλλά η μέση τιμή μειώνεται σε 1 λεπτό.

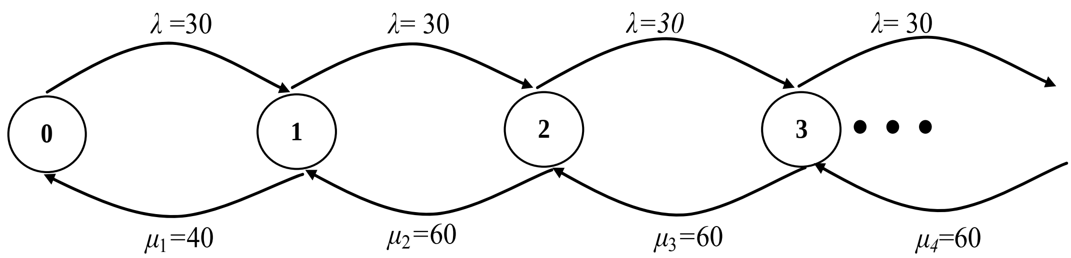
α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μονίμου καταστάσεως P_n, n=0, 1, 2,.., μέσω των εξισώσεων τοπικής ισορροπίας.

γ) Να υπολογιστούν: 1) η μέση τιμή των χρηστών στο σύστημα, *N*, 2) η μέση τιμή των χρηστών στην ουρά αναμονής, *L*, 3) η μέση τιμή του χρόνου παραμονής στο σύστημα, *T* και 4) η μέση τιμή του χρόνου αναμονής στην ουρά, *W*.

Λύση

α) Το διάγραμμα μεταπτώσεων καταστάσεων του συστήματος είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 6: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) Από τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας ισχύει:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}\frac{\lambda}{\mu_1} P_0 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{\lambda^3}{\mu_1 (\mu_2)^2} P_0$$

και γενικά:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1 (\mu_2)^{n-1}} P_0 \,.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1 (\mu_2)^{n-1}} P_0 = P_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1 (\mu_2)^{n-1}} \right) = 1$$

Όμως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1 (\mu_2)^{n-1}} = \frac{\lambda}{\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(\mu_2)^{n-1}} = \frac{\lambda}{\mu_1} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu_2}} \right) = \frac{\lambda}{\mu_1} \frac{\mu_2}{(\mu_2 - \lambda)}$$

Οπότε:

$P_0 = \dfrac{\mu_1 (\mu_2 - \lambda)}{\mu_1 (\mu_2 - \lambda) + \lambda \mu_2} = 0.4$ και $P_n = \dfrac{30^n}{40(60)^{n-1}} 0.4 \Rightarrow P_n = 0.6 \left(\dfrac{1}{2} \right)^n$ για $n \geq 1$.

γ)

1) $N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = 0.6 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\dfrac{1}{2} \right)^n = 0.6 \dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\dfrac{1}{2} \right)^{n-1} = 0.6 \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{2} \right)^2} = 1.2$

Σημείωση: Στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την σχέση: $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} = \dfrac{d}{da} \left(\dfrac{1}{1-a} \right) = \dfrac{1}{(1-a)^2}$, για a<1.

2) $L = N - (1 - P_0) = 1.2 - 0.6 = 0.6$.

3) $T = N/\lambda$ = 0.04 ώρες ή 2.4 λεπτά.

4) $W = L/\lambda$ = 0.02 ώρες ή 1.2 λεπτά.

Άσκηση 12

Θεωρούμε ένα σύστημα με άπειρο αριθμό εξυπηρετητών και άπειρη ουρά αναμονής. Στην πράξη βέβαια δεν υπάρχει σύστημα με άπειρους εξυπηρετητές. Αυτό που εννοούμε είναι ότι οι χρήστες έχουν απ’ ευθείας πρόσβαση στους εξυπηρετητές. Ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη ενός συστήματος αυτοεξυπηρέτησης (self-service). Αν η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ο χρόνος εξυπηρέτησης των χρηστών είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μ^{-1} τότε:

α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των χρηστών στην ουρά αναμονής, *W*, καθώς και η μέση τιμή των χρηστών στην ουρά αναμονής, *L*.

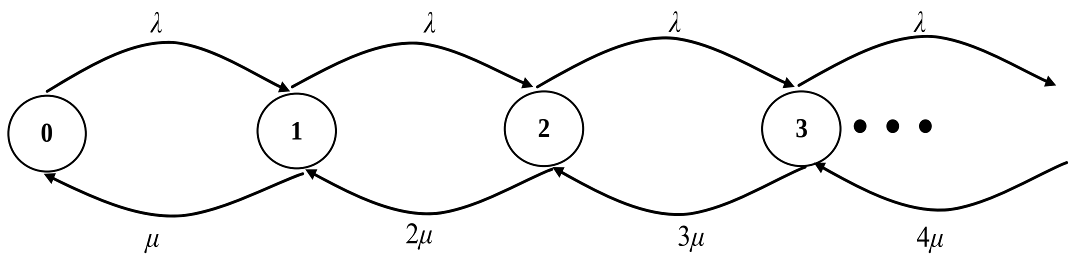
γ) Με την βοήθεια των εξισώσεων τοπικής ισορροπίας να εκφράσετε την πιθανότητα μονίμου καταστάσεως P_n συναρτήσεις της P_0 (πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο).

δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.

γ) Να υπολογιστεί: 1) η μέση τιμή των χρηστών στο σύστημα, *N* και 2) η μέση τιμή του χρόνου παραμονής στο σύστημα, *T*.

Λύση

α) Το διάγραμμα μεταπτώσεων καταστάσεων του συστήματος είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 7: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) $L = W = 0$ εφόσον έχουμε άπειρο αριθμό εξυπηρετητών.

γ) Θέτοντας $a = \lambda / \mu$ έχουμε:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \Rightarrow P_1 = aP_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{a}{2} aP_0 \Rightarrow P_2 = \frac{a^2}{2!} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 \Rightarrow P_3 = \frac{a^3}{3!} P_0$$

και γενικά:

$$P_n = \frac{a^n}{n!} P_0 .$$

δ) Προκειμένου να υπολογίσουμε την P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1:

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = e^{-a}$ οπότε σ' αυτό το σύστημα δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $a \leq 1$.

Άρα $P_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$ που είναι η κατανομή Poisson με μέση τιμή $a = \lambda / \mu$.

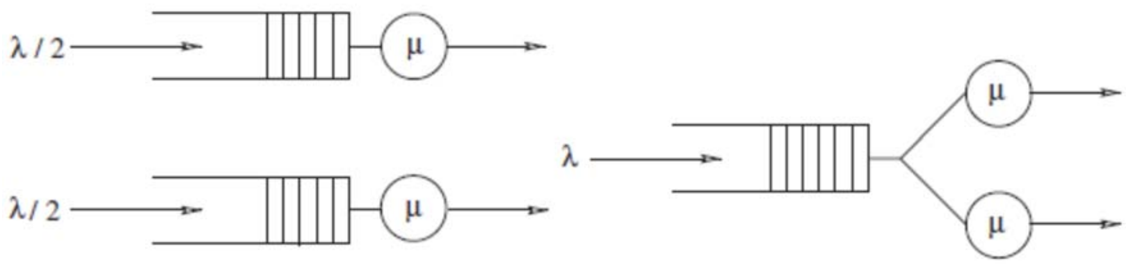
ε) Η μέση τιμή των χρηστών στο σύστημα, N, ισούται με την μέση τιμή της κατανομής Poisson:

$$N = a = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των χρηστών στο σύστημα ισούται με την μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των χρηστών, εφ' όσον στο σύστημα υπάρχουν τόσοι εξυπηρετητές όσοι και οι χρήστες: $T = \frac{1}{\mu}$.

Άσκηση 13

Να συγκρίνετε, ως προς την μέση τιμή του χρόνου παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα, την απόδοση: α) δύο ξεχωριστών M/M/1 συστημάτων, β) ενός M/M/2 συστήματος το οποίο δέχεται την συνολική κίνηση των δύο M/M/1 συστημάτων και γ) ενός συστήματος M/M/1 που δέχεται την συνολική κίνηση της περίπτωσης (α) αλλά διαθέτει εξυπηρετητή ο οποίος λειτουργεί δύο φορές γρηγορότερα. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται τα προς μελέτη συστήματα των περιπτώσεων (α) και (β).



(α) **(β)**

Σχήμα 8: Δύο συστήματα αναμονής M/M/1 – Σύστημα αναμονής M/M/2.

Λύση

<u>Στο πρώτο σενάριο</u> έχουμε δύο ανεξάρτητα συστήματα αναμονής M/M/1 με ρυθμό άφιξης των κλήσεων $\lambda/2$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ σε κάθε σύστημα. Η μέση τιμή των κλήσεων σε κάθε σύστημα M/M/1 δίνεται από την σχέση: $N = a / (1-a)$, όπου $a = \lambda/2\mu < 1$. Επομένως η μέση τιμή των κλήσεων και στα δύο συστήματα M/M/1 δίνεται από την σχέση:

$N_1 = 2N = \frac{2a}{1-a} = \frac{2p}{1-p}$, όπου γενικά $p=a/s$.

Από την επέκταση του νόμου του Little, υπολογίζεται η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στα δύο συστήματα ως:

$$T_1 = \frac{N_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{2a}{1-a} \Rightarrow T_1 = \frac{2}{2\mu-\lambda}.$$

<u>Στο δεύτερο σενάριο</u> έχουμε ένα σύστημα αναμονής M/M/2 με ρυθμό άφιξης των κλήσεων *λ* και ρυθμό εξυπηρέτησης *μ*. Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων T_2 πρέπει αρχικά να βρούμε την μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα N_2. Όμως, η μέση τιμή των κλήσεων *N* σ' ένα σύστημα αναμονής M/M/s δίνεται από την σχέση:

$$N = \lambda T = \frac{pa^s}{s!(1-p)^2}P_0 + a \Rightarrow N = \frac{\frac{\lambda}{s\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow N = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\left(s\mu-\lambda\right)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}.$$

Στην περίπτωση μας όπου *s*=2 έχουμε:

$$N_2 = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(2\mu-\lambda\right)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^2\left(2\mu-\lambda\right)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{\left(2-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow N_2 = \frac{(2p)^3}{(2-2p)^2}P_0 + 2p$$

όπου $p = a/s = \lambda/2\mu < 1$ και $2p = \lambda/\mu$.

Η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο δίνεται από την σχέση:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{s!(1-p)}} \overset{s=2}{\Rightarrow} P_0 = \frac{1}{1+a+\frac{a^2}{2(1-(a/2))}} \Rightarrow P_0 = \frac{2-a}{2+a} \Rightarrow P_0 = \frac{1-p}{1+p}.$$

Επομένως:

$$N_2 = \frac{(2p)^3}{(2-2p)^2}P_0 + 2p \Rightarrow N_2 = \frac{8p^3}{4(1-p)^2}\frac{1-p}{1+p} + 2p = \frac{2p(1-p)(1+p)+2p^3}{(1-p)(1+p)} \Rightarrow N_2 = \frac{2p}{1-p^2}$$

Από την επέκταση του νόμου του Little:

$$T_2 = \frac{\frac{2p}{\lambda}}{1-p^2} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-p^2} \Rightarrow T_2 = \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}.$$

<u>Στο τρίτο σενάριο</u> έχουμε ένα σύστημα αναμονής M/M/1 στο οποίο ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι *λ* ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης αυτών είναι 2*μ*. Η μέση τιμή των κλήσεων δίνεται από την σχέση:

$$N_3 = \frac{a}{1-a} = \frac{p}{1-p},$$

όπου $a=p=\lambda/2\mu < 1$.

Από την επέκταση του νόμου του Little, η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων είναι η εξής:

$$T_3 = \frac{N_3}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{a}{1-a} \Rightarrow T_3 = \frac{1/2\mu}{1-\lambda/2\mu} \Rightarrow T_3 = \frac{1}{2\mu-\lambda}.$$

Συμπερασματικά, για τις τρεις περιπτώσεις έχουμε τα εξής αποτελέσματα (με $p=\lambda/2\mu$):

$$N_1 = \frac{2p}{1-p} \geq N_2 = \frac{2p}{1-p}\frac{1}{1+p} \geq N_3 = \frac{p}{1-p}$$
$$T_1 = \frac{2}{2\mu-\lambda} \geq T_2 = \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2} \geq T_3 = \frac{1}{2\mu-\lambda}$$

Αν μάλιστα θέσουμε όπου $x = 2p/(1-p)$ και $\beta=2/(2\mu-\lambda)$, οπότε $x=\lambda\beta$, τότε:

$$N_1 = x \geq N_2 = x\frac{1}{1+p} \geq N_3 = \frac{x}{2}$$
$$T_1 = \beta \geq T_2 = \beta\frac{1}{1+p} \geq T_3 = \frac{\beta}{2}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι το 1ο σενάριο (τα δύο ανεξάρτητα συστήματα M/M/1) είναι το χειρότερο όλων και μάλιστα οι παράμετροι *N*, *T* είναι διπλάσιοι απ' ότι στην περίπτωση του 3ου σεναρίου (ένα σύστημα M/M/1 με εξυπηρετητή διπλάσιας ταχύτητας). Η απόδοση του 2ου σεναρίου (σύστημα M/M/2) βρίσκεται μεταξύ της απόδοσης του 1ου και του 3ου σεναρίου. Επειδή, $0 \leq p \leq 1$ θα πρέπει να ισχύει $1 \leq 1+p \leq 2$, οπότε: α) όταν $p \to 0$ τότε η απόδοση του 2ου σεναρίου χειροτερεύει και πλησιάζει την απόδοση του 1ου σεναρίου και β) όταν $p \to 1$ τότε η απόδοση του 2ου σεναρίου βελτιώνεται και πλησιάζει την απόδοση του 3ου σεναρίου.

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν αν ο αριθμός των ανεξάρτητων συστημάτων M/M/1 αυξηθεί σε *s*, το σύστημα M/M/2 αντικατασταθεί από ένα σύστημα M/M/s και το σύστημα M/M/1 αποκτήσει εξυπηρετητή που λειτουργεί με ρυθμό *sμ*.

Άσκηση 14

Θεωρούμε ένα σύστημα με *m* θέσεις στην ουρά αναμονής, στο οποίο οι κλήσεις εξυπηρετούνται από *s* εξυπηρετητές. Η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την διαδικασία Poisson με σταθερό ρυθμό *λ*, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μ^{-1}. Αν *n* ο αριθμός των κλήσεων στην κατάσταση ισορροπίας (*n* = 0, 1, 2, 3, …,*m*) και P_n η αντίστοιχη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, τότε:

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, P_n.

β) Να υπολογίσετε: 1) την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής *L*, 2) την μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα, *N*, 3) την μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα, *T* και

4) την μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά, *W*.

Λύση

Η διαφορά του μοντέλου M/M/s/m από το μοντέλο M/M/s είναι ότι πλέον η ουρά αναμονής δεν είναι άπειρη αλλά περιορισμένη ενώ ο συνολικός αριθμός των κλήσεων στο σύστημα δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή *m* με $m \geq s$. Ο περιορισμός αυτός εισάγει την έννοια της απώλειας κλήσεως. Πράγματι, αν μια νέα κλήση βρει *m* κλήσεις στο σύστημα (*s* να εξυπηρετούνται και *m-s* στην ουρά αναμονής) τότε η κλήση μπλοκάρεται και χάνεται.

Ακολουθώντας την ανάλυση του μοντέλου M/M/s και θεωρώντας ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, προκύπτει ότι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, P_n, υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!} P_0, & (0 \leq n \leq s-1) \\ \dfrac{a^n}{s! s^{n-s}} P_0, & (s \leq n \leq m) \end{cases}$$

όπου $a = \lambda / \mu$.

Από την γνωστή σχέση ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1, υπολογίζεται η πιθανότητα P_0 ως :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{a^n}{n!} + \sum_{n=s}^{m} \dfrac{a^n}{s! s^{n-s}}}$$

Το δεύτερο άθροισμα στον παρονομαστή της προηγούμενης σχέσης γράφεται ως:

$$\sum_{n=s}^{m} \frac{a^n}{s! s^{n-s}} = \frac{a^s}{s!} \sum_{n=s}^{m} \left(\frac{a}{s}\right)^{n-s} = \begin{cases} \dfrac{a^s}{s!}\left(\dfrac{1-p^{m-s+1}}{1-p}\right), & p = \dfrac{a}{s} \neq 1 \\ \dfrac{a^s}{s!}(m-s+1), & p = \dfrac{a}{s} = 1 \end{cases}$$

όπου ο όρος $p = a/s$ εκφράζει το προσφερόμενο φορτίο κίνησης ανά εξυπηρετητή.

Επομένως: $$P_0 = \begin{cases} \left[\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{s!} \left(\frac{1-p^{m-s+1}}{1-p} \right) \right] \right]^{-1}, & p = \frac{a}{s} \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{s!}(m-s+1) \right]^{-1}, & p = \frac{a}{s} = 1 \end{cases}$$

β)

1) Έχοντας καθορίσει τις πιθανότητες P_n και P_0 προχωράμε στον υπολογισμό των παραμέτρων απόδοσης της ουράς αναμονής M/M/s/m ξεκινώντας από την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής *L*. Ισχύει ότι:

$$L = \sum_{n=s+1}^{m} (n-s)P_n = \sum_{n=s+1}^{m} (n-s)\frac{a^n}{s!s^{n-s}} P_0 = \frac{a^s}{s!} P_0 \sum_{n=s+1}^{m} (n-s)p^{n-s} = \frac{pa^s}{s!} P_0 \sum_{n=s+1}^{m} (n-s)p^{n-s-1} = \frac{pa^s}{s!} P_0 \sum_{i=1}^{m-s} ip^{i-1} =$$

ή

$$= \frac{pa^s}{s!} P_0 \frac{d}{dp} \sum_{i=0}^{m-s} p^i = \frac{pa^s}{s!} P_0 \frac{d}{dp} \frac{1-p^{m-s+1}}{1-p}$$

$$L = \frac{pa^s}{s!(1-p)^2} P_0 \left[1 - p^{m-c+1} - (1-p)(m-c+1)p^{m-c} \right], \quad p \neq 1$$

όπου *p*=*a*/*s*.

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου *p*=1, θα πρέπει να εφαρμοστεί δύο φορές ο κανόνας του L' Hospital. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω σχέση για μια τιμή του *p* που προσεγγίζει την μονάδα (π.χ. 0.995).

2) Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα, *N*, υπενθυμίζουμε την σχέση που ισχύει στο μοντέλο M/M/s, $N = L + a$ με *α*=*λ*/*μ*. Στην περίπτωση του μοντέλου M/M/s/m ο ρυθμός άφιξης *λ* πρέπει να τροποποιηθεί αφού υπάρχει η πιθανότητα κάποιες νέες κλήσεις να μπλοκαριστούν και να χαθούν όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *m*. Επειδή η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την διαδικασία Poisson και ισχύει η ιδιότητα PASTA προκύπτει τελικά ότι οι κλήσεις που φθάνουν στους εξυπηρετητές έχουν ενεργό ρυθμό άφιξης (effective arrival rate) που δίνεται από την σχέση $\lambda_{eff} = \lambda(1-P_m)$. Οπότε:

$$N = L + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L + a(1-P_m)$$

όπου η τιμή της πιθανότητας P_m υπολογίζεται από το ερώτημα (α).

3) Από τον νόμο του Little, η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα, *T*, υπολογίζεται από την σχέση:

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{N}{\lambda(1-P_m)}$$

4) Τέλος, η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά, *W*, υπολογίζεται ως:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda(1-P_m)} \ .$$

Άσκηση 15

Σε σύστημα αναμονής M/M/s/m, να υπολογιστεί η πιθανότητα, $W(t) = \Pr\{T_q \le t\}$, μια συγκεκριμένη κλήση να παραμείνει στην ουρά αναμονής το πολύ για χρόνο ίσο με T_q αν θεωρήσουμε ότι οι κλήσεις που αναμένουν εισέρχονται στους εξυπηρετητές σύμφωνα με τον μηχανισμό FCFS.

Λύση

Ο υπολογισμός της πιθανότητας $W_q(t)$ είναι πολύπλοκος δεδομένου ότι οι σειρές που προκύπτουν έχουν πεπερασμένους όρους. Επίσης, απαιτείται ο ενδιάμεσος υπολογισμός των πιθανοτήτων Q_n (μια νέα κλήση να βρει κατά την άφιξη της στο σύστημα n κλήσεις). Στο μοντέλο M/M/s/m, οι πιθανότητες Q_n δεν είναι ίδιες με τις πιθανότητες P_n (αν και οι αφίξεις των κλήσεων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson) λόγω του πεπερασμένου μεγέθους της ουράς που προκαλεί απώλειες κλήσεων. Στην περίπτωση λοιπόν του συστήματος M/M/s/m ισχύει $P_n \neq Q_n$.

Από το θεώρημα Bayes προκύπτει, για τον υπολογισμό των Q_n, ότι:

$$Q_n \equiv \Pr\{n\, κλήσεις\, στο\, σύστημα \,|\, άφιξη\, κλήσης\}$$
$$= \frac{\Pr\{άφιξη\, κλήσης \,|\, n\, κλήσεις\, στο\, σύστημα|\}P_n}{\sum_{n=0}^{m}\Pr\{άφιξη\, κλήσης \,|\, n\, κλήσεις\, στο\, σύστημα|\}P_n}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]P_n}{\sum_{n=0}^{m-1}[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]P_n}\right\} = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{[\lambda + o(\Delta t)/\Delta t]P_n}{\sum_{n=0}^{m-1}[\lambda + o(\Delta t)/\Delta t]P_n}\right\} = \frac{\lambda P_n}{\lambda\sum_{n=0}^{m-1}P_n} = \frac{P_n}{1-P_m}, \quad n \le m-1$$

ή

$$Q_n = \frac{P_n}{1-P_m}, \quad n \le m-1$$

Σημειώνεται ότι όταν $m \to \infty$ (μοντέλο M/M/s), τότε $P_m \to 0$ και $P_n = Q_n$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα $W(t)$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&W(t) = \Pr\left\{T_q \leq t\right\} \\
&= W(0) \\
&+ \sum_{n=s}^{m-1} \Pr\left\{n - s + 1 \text{ κλήσεις εξυπηρετούνται σε} \leq t \,\middle|\, n \text{ κλήσεις στο σύστημα κατά την άφιξη}\right\} Q_n \text{ ή} \\
&= W(0) + \sum_{n=s}^{m-1} Q_n \int_0^t \frac{s\mu (s\mu u)^{n-s}}{(n-s)!} e^{-s\mu u} du = W(0) + \sum_{n=s}^{m-1} Q_n \left(1 - \int_t^{\infty} \frac{s\mu (s\mu u)^{n-s}}{(n-s)!} e^{-s\mu u} du \right) = \\
&= W(0) + \sum_{n=s}^{m-1} Q_n - \sum_{n=s}^{m-1} Q_n \sum_{i=0}^{n-s} \frac{(s\mu t)^i e^{-s\mu t}}{i!}
\end{aligned}
$$

και:

$$
W(t) = 1 - \sum_{n=s}^{m-1} Q_n \sum_{i=0}^{n-s} \frac{(s\mu t)^i e^{-s\mu t}}{i!}
$$

όπου:

$$
W(0) = \sum_{n=0}^{s-1} Q_n = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{P_n}{1 - P_m}
$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει και η πιθανότητα μια νέα κλήση να περιμένει στην ουρά αναμονής ως $1 - W(0) = \sum_{n=s}^{m-1} Q_n$.[3]

Άσκηση 16

Ένα τηλεφωνικό κέντρο έχει 4 τηλεφωνικές γραμμές (phone lines) και 3 τηλεφωνήτριες. Οι κλήσεις φτάνουν στο κέντρο αυτό ακολουθώντας μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 15 κλήσεις την ώρα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 10 λεπτά. Όταν όλες οι τηλεφωνήτριες είναι κατειλημμένες τότε κάθε νέα κλήση αναμένει να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνοντας μια από τις τηλεφωνικές γραμμές. Διαφορετικά, αν κατά την άφιξη μιας κλήσης δεν υπάρχει ελεύθερη τηλεφωνική γραμμή, η κλήση μπλοκάρεται και χάνεται. Να υπολογιστούν:

α) Η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.

β) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως.

γ) Η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής.

δ) Η μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα.

---

[3] Σημειώνουμε τέλος, ότι ο υπολογισμός του $W_{system}(t)$ που εκφράζει την CDF του συνολικού χρόνου παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα είναι πολύπλοκος και ξεφεύγει από τα όρια αυτών των ασκήσεων. Ο αναγνώστης μπορεί ωστόσο να ανατρέξει στην εργασία: H. Takagi, “*Explicit Delay Distribution in First-Come First-Served M/M/m/K and M/M/m/K/n Queues and a Mixed Loss-Delay System*”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 40, No. 2, 2007, pp. 185-200.

.

ε) Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα σε λεπτά.

στ) Η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων σε λεπτά.

Υποθέτουμε ότι το κόστος του τηλεφωνικού κέντρου για κάθε κλήση που γίνεται δεκτή στο κέντρο είναι 0.03 euro ανά λεπτό (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου αναμονής). Επίσης, υπολογίζεται ότι το κόστος για κάθε κλήση που μπλοκάρεται είναι 20 euro. Αν ο αριθμός των τηλεφωνητριών δεν αλλάξει να υπολογιστεί: ζ) ο βέλτιστος αριθμός τηλεφωνικών γραμμών.

Λύση

Το παραπάνω τηλεφωνικό κέντρο μοντελοποιείται ως M/M/3/7 με *s*=3 εξυπηρετητές και 4 θέσεις στην ουρά αναμονής. Βάσει της άσκησης 14 μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραμέτρους που ζητούνται.

α) Η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο υπολογίζεται από την σχέση:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{s!} \left(\frac{1-p^{m-s+1}}{1-p} \right) \right]^{-1}, \quad p = \frac{a}{s} \neq 1$$

όπου $\alpha = \lambda/\mu$ = 150/60 = 2.5 erl και $p=\alpha/s$ = 2.5/3 = 0.8333.

Επομένως:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{a^n}{n!} + \frac{(2.5)^3}{3!} \left(\frac{1-(0.83333)^5}{1-0.83333} \right) \right]^{-1} \Rightarrow P_0 = 0.06261$$

β) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως υπολογίζεται από την σχέση:

$$P_m = \frac{a^m}{s!s^{m-s}} P_0 \Rightarrow P_7 = \frac{(2.5)^7}{3!3^4} 0.06261 \Rightarrow P_7 = 0.07863$$

γ) Η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής υπολογίζεται ως εξής:

$$L = \frac{pa^s}{s!(1-p)^2} P_0 \left[1 - p^{m-c+1} - (1-p)(m-c+1)p^{m-c} \right] \Rightarrow$$
$$L = \frac{0.8333(2.5)^3}{3!(1-0.8333)^2} 0.06261 \left[1 - 0.8333^5 - (1-0.8333) * 5 * 0.8333^4 \right] \Rightarrow$$
$$L = 0.95998$$

δ) Η μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα καθορίζεται από την σχέση:

$$N = L + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L + a(1-P_m) \Rightarrow N = 0.95998 + 2.5(1-0.07863) \Rightarrow N = 3.2634\,.$$

ε) Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής στο σύστημα υπολογίζεται ως εξής:

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{N}{\lambda(1-P_m)} \Rightarrow T = \frac{3.2634}{\frac{15}{60}(1-0.07863)} \Rightarrow T = 14.1676 \text{ λεπτά.}$$

στ) Η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής ισούται με:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = 14.1676 - 10 = 4.1676 \text{ λεπτά.}$$

ζ) Το ωριαίο κόστος λειτουργίας του κέντρου είναι:

$N * 60$ λεπτά$*0.03$ euro/λεπτό $+ \lambda P_m * 20$ ευρώ, όπου λ = 15 κλήσεις / ώρα.

Ο πρώτος όρος δίνει το ωριαίο κόστος για κάθε κλήση που συνδέεται στο τηλεφωνικό κέντρο ενώ ο δεύτερος όρος δίνει το ωριαίο κόστος για κάθε κλήση που μπλοκάρεται. Μεταβάλλοντας τον αριθμό των τηλεφωνικών γραμμών, μεταβάλλεται η τιμή των N, P_m. Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει τις τιμές των N, P_m καθώς και του κόστους για διάφορες τιμές των τηλεφωνικών γραμμών. Ο βέλτιστος αριθμός τηλεφωνικών γραμμών είναι 36.

Τηλεφωνικές γραμμές	**N**	**P_m**	**Κόστος ανά ώρα**
0	1.7946	0.282167	87.8804
1	2.2144	0.190375	61.0984
2	2.5958	0.13692	45.7495
3	2.9445	0.10242	36.0251
4	3.2634	0.07863	29.4688
5	3.5547	0.06149	24.8484
9	4.4775	0.02558	15.7352
17	5.4697	0.00542	11.4709
27	5.8829	0.00086	10.8459
36	5.9790	0.00016	10.8118
37	5.9837	0.00014	10.8119
42	5.9988	0.000055	10.8144
47	6.0057	0.000022	10.8169

Άσκηση 17

Θεωρούμε ένα σύστημα με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, στο οποίο οι κλήσεις εξυπηρετούνται από *s* εξυπηρετητές. Το σύστημα εξυπηρετεί κλήσεις που προέρχονται από πεπερασμένο (finite) πληθυσμό πηγών κίνησης, N. Αν v, μ είναι η μέση τιμή (σταθερή) του ρυθμού άφιξης κλήσεων ανά «ελεύθερη» πηγή κίνησης και η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης (εκθετικά κατανεμημένος) των κλήσεων, αντίστοιχα, τότε:

1) Να υπολογιστεί το προσφερόμενο φορτίο κίνησης ανά «ελεύθερη» πηγή (πηγή που δεν εξυπηρετείται).

2) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων όταν στο σύστημα υπάρχουν n κλήσεις που εξυπηρετούνται.

3) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του ρυθμού εξυπηρέτησης των κλήσεων.

4) Να δοθεί το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων.

5) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, P_n.

6) Να υπολογιστούν οι παράμετροι N_{system} , *L*, *W* και *T*.

Λύση

1) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης ανά «ελεύθερη» πηγή δίνεται από την σχέση:

$$a_{fin} = v / \mu$$

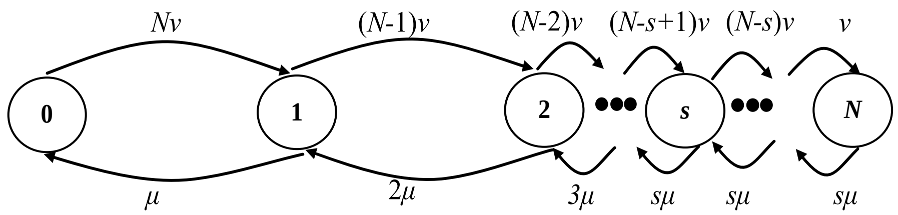
2) Όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *n*, τότε η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης («γέννησης») των κλήσεων που προέρχονται από όλες τις «ελεύθερες» πηγές κίνησης δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)v, & (0 \le n < N) \\ 0, & (n \ge N) \end{cases}.$$

3) Η μέση τιμή του ρυθμού εξυπηρέτησης («θανάτου») των κλήσεων δίνεται από την σχέση:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & (1 \le n \le s-1) \\ s\mu, & (n \ge s) \end{cases}.$$

4)



Σχήμα 9: Διάγραμμα μετάπτωσης καταστάσεων για το μοντέλο M(N)/M/s.

Σημείωση: Η παραπάνω διαδικασία άφιξης των κλήσεων ονομάζεται ψευδοτυχαία (quasi-random).

5) Η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, P_n, υπολογίζεται ως εξής:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!/(N-n)!}{n!} a_{fin}^n P_0 & (1 \le n \le s-1) \\ \dfrac{N!/(N-n)!}{s!s^{n-s}} a_{fin}^n P_0 & (s \le n \le N) \end{cases} = \begin{cases} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} a_{fin}^n P_0 & (1 \le n \le s-1) \\ \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} \dfrac{n!}{s!s^{n-s}} a_{fin}^n P_0 & (s \le n \le N) \end{cases}$$

όπου $a_{fin} = v/\mu$.

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα P_0 ως:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{N}{n} a_{fin}^n + \sum_{n=s}^{N} \binom{N}{n} \frac{n!}{s! s^{n-s}} a_{fin}^n \right]^{-1}.$$

6)

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής των κλήσεων στο σύστημα N_{system}, έχουμε:

$$N_{system} = \sum_{n=1}^{N} n P_n = N P_0 \left[\sum_{n=1}^{s-1} \binom{N-1}{n-1} a_{fin}^n + \sum_{n=s}^{N} \binom{N-1}{n-1} \frac{n!}{s! s^{n-s}} a_{fin}^n \right]$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής, *L*, καθώς και τους χρόνους αναμονής στην ουρά, *W* και παραμονής στο σύστημα *T*, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την μέση τιμή του συνολικού ρυθμού άφιξης των κλήσεων στο σύστημα. Νωρίτερα είδαμε ότι η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων, όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *n* δίνεται από την $\lambda_n = (N-n)\nu$. Η μέση τιμή του ενεργού ρυθμού άφιξης των κλήσεων στο σύστημα, λ_{eff} δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N} (N-n)\nu P_n$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\lambda_{eff} = \left(N - N_{system}\right)\nu$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει και διαισθητικά, αφού όταν έχουμε N_{system} κλήσεις κατά μέσο όρο στο σύστημα, τότε *N*- N_{system} είναι οι «ελεύθερες» πηγές, κάθε μια από τις οποίες έχει ρυθμό άφιξης κλήσεων *ν*.

Η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής υπολογίζεται από τον νόμο του Little:

$$L = N_{system} - \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = N_{system} - a_{fin}(N - N_{system})$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να καταλήξει κανείς και μέσω της σχέσης $L = \sum_{n=s+1}^{N} (n-s) P_n$.

Όμοια, με εφαρμογή του νόμου του Little προκύπτει ότι:

$$W = \frac{L}{\nu(N - N_{system})}$$

και

$$T = \frac{N_{system}}{\nu(N - N_{system})}.$$

Άσκηση 18

Σε σύστημα αναμονής M(N)/M/s, να υπολογιστεί η πιθανότητα, $W(t)=\Pr\left\{T_q \le t\right\}$, μια συγκεκριμένη κλήση να παραμείνει στην ουρά αναμονής το πολύ για χρόνο ίσο με T_q αν θεωρήσουμε ότι οι κλήσεις που αναμένουν εισέρχονται στον εξυπηρετητή σύμφωνα με τον μηχανισμό FCFS.

Λύση

Ο υπολογισμός της πιθανότητας $W(t)$ απαιτεί τον καθορισμό των πιθανοτήτων Q_n (μια νέα κλήση να βρει κατά την άφιξη της στο σύστημα n κλήσεις). Στο μοντέλο M(N)/M/s, οι πιθανότητες Q_n δεν είναι ίδιες με τις πιθανότητες P_n λόγω του ότι οι αφίξεις των κλήσεων δεν ακολουθούν την διαδικασία Poisson.

Από το θεώρημα Bayes προκύπτει, για τον υπολογισμό των Q_n, ότι:

$$
\begin{aligned}
&Q_n \equiv \Pr\left\{n\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\,\sigma\tau o\,\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha \,\middle|\, \acute{\alpha}\varphi\iota\xi\eta\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma\right\}\\
&=\frac{\Pr\left\{\acute{\alpha}\varphi\iota\xi\eta\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma \,\middle|\, n\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\,\sigma\tau o\,\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\right|\right\}P_n}{\sum_n \Pr\left\{\acute{\alpha}\varphi\iota\xi\eta\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma \,\middle|\, n\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\,\sigma\tau o\,\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\right|\right\}P_n}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left[(N-n)v\Delta t+o(\Delta t)\right]P_n}{\sum_n\left[(N-n)v\Delta t+o(\Delta t)\right]}\right\}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left[(N-n)v+o(\Delta t)/\Delta t\right]P_n}{\sum_n\left[(N-n)v+o(\Delta t)/\Delta t\right]P_n}\right\}=\frac{(N-n)P_n}{\sum_n\left[(N-n)v\right]P_n}.
\end{aligned}
$$

ή

$$Q_n=\frac{(N-n)P_n}{N-N_{system}}$$

Σημείωση: Εδώ, το N_{system} εκφράζει την μέση τιμή των κλήσεων σε όλο το σύστημα (πρόκειται για το N που έχουμε χρησιμοποιήσει σε αντίστοιχες περιπτώσεις).

Παράλληλα μπορεί να αποδειχθεί [π.χ. Λογοθέτης, σελ. 40-41[4]], ότι η πιθανότητα Q_n για ένα σύστημα M(N)/M/s με N πηγές κίνησης, ισούται με την πιθανότητα P_n για το ίδιο σύστημα αλλά με N-1 πηγές κίνησης:

$$Q_n(N)=P_n(N-1)$$

Οι πιθανότητες Q_n εκφράζουν το πως «αντιλαμβάνεται» ένας εσωτερικός παρατηρητής το σύστημα (ως εσωτερικό παρατηρητή εννοούμε την κλήση που μόλις έγινε δεκτή στο σύστημα) ενώ οι πιθανότητες P_n, εκφράζουν το πως «αντιλαμβάνεται» ένας εξωτερικός παρατηρητής το σύστημα. Οι πιθανότητες Q_n συμπίπτουν στο M(N)/M/s με τις πιθανότητες P_n αν αφαιρέσουμε μια πηγή (τον ίδιο τον εσωτερικό παρατηρητή) από τις N. Στην βιβλιογραφία, οι πιθανότητες Q_n, P_n απαντώνται με τον όρο “inside observer probabilities” και “outside observer probabilities”, αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός της πιθανότητας $W(t)$ γίνεται ως εξής:

[4] Μ. Δ. Λογοθέτης, «*ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ*», 2η Έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2012.

$$W(t)=\Pr\left\{T_q \le t\right\}$$
$$=W(0)$$
$$+\sum_{n=s}^{N-1}\Pr\left\{n-s+1 \text{ κλήσεις εξυπηρετούνται σε} \le t \,\middle|\, n \text{ κλήσεις στο σύστημα κατά την άφιξη}\right\}Q_n$$ ή
$$=W(0)+\sum_{n=s}^{N-1}Q_n\int_0^t \frac{s\mu(s\mu u)^{n-s}}{(n-s)!}e^{-s\mu u}du = W(0)+\sum_{n=s}^{N-1}Q_n\left(1-\int_t^\infty \frac{s\mu(s\mu u)^{n-s}}{(n-s)!}e^{-s\mu u}du\right)$$
$$=W(0)+\sum_{n=s}^{N-1}Q_n-\sum_{n=s}^{N-1}Q_n\sum_{i=0}^{n-s}\frac{(s\mu t)^i e^{-s\mu t}}{i!}$$

και

$$W(t)=1-\sum_{n=s}^{N-1}Q_n\sum_{i=0}^{n-s}\frac{(s\mu t)^i e^{-s\mu t}}{i!}$$

όπου:

$$W(0)=\sum_{n=0}^{s-1}Q_n$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει και η πιθανότητα μια νέα κλήση να περιμένει στην ουρά αναμονής ως $1-W(0)$.

Για τον υπολογισμό του $W_{system}(t)$ που εκφράζει την CDF του συνολικού χρόνου παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην εργασία [H. Takagi, “Explicit Delay Distribution in First-Come First-Served M/M/m/K and M/M/m/K/n Queues and a Mixed Loss-Delay System”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 40, No. 2, 2007, pp. 185-200].

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 5 – 6: Μαρκοβιανό σύστημα αναμονής M/M/s – Επέκταση των Μαρκοβιανών μοντέλων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «***Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα* Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.