Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 3 – 4 (Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών – Εφαρμογή των τύπων Erlang και Engset)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 3 και 4 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) των Μαρκοβιανών συστημάτων απωλειών και 2) των τύπων Erlang B, Engset και του τρόπου εφαρμογής τους.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 3-4: (Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών – Εφαρμογή των τύπων Erlang και Engset)

Άσκηση 1

Μια ζεύξη μεταξύ δύο τηλεφωνικών κέντρων έχει 5 παράλληλα trunks (γραμμές – κανάλια). Κάθε τηλεφωνική κλήση καταλαμβάνει ένα trunk. Οι τηλεφωνικές κλήσεις καταφθάνουν στην ζεύξη με κατανομή Poisson με ρυθμό 2 κλήσεις/min. Η μέση διάρκεια των κλήσεων είναι 3 min. Να υπολογισθεί:

1) Η προσφερομένη κίνηση.

2) Η διεκπεραιουμένη κίνηση

3) Η κίνηση που χάνεται.

Λύση

1) Η προσφερομένη κίνηση $\alpha = \lambda h$ = 2 κλήσεις/min * 3 min = 6 erl

2) Η διεκπεραιουμένη κίνηση $\alpha_c = \alpha\,(1\text{-}B)$

όπου η τιμή του B θα υπολογιστεί από την Erlang B formula,

δηλαδή: $B = E_5(6) = (6^5/5!)/(1+ 6/1! + 6^2/2! + 6^3/3! + 6^4/4! + 6^5/5!) =$

$= 64.8/(1+6+18+36+54+64.8) = 64.8/179.8 = 0.36 = 36\ \%$

Άρα $\alpha_c = \alpha\,(1\text{-}B) = 6\,(1 – 0.36) = 3.84$ erl

3) Η κίνηση που χάνεται $\alpha' = \alpha - \alpha_c = 6 - 3.84 = 2.16$ erl

ή $\alpha' = \alpha\, B = 6 * 0.36 = 2.16$ erl.

Άσκηση 2

Σε μια κυψέλη, ενός κυψελωτού συστήματος κινητής τηλεφωνίας, διατίθενται 4 κανάλια. Οι χρήστες του συστήματος είναι 100, καθένας από τους οποίους επιχειρεί κατά μέσο 1 κλήση την ώρα με μέση διάρκεια 1.8 λεπτά ανά κλήση. Οι αφίξεις των κλήσεων είναι τυχαίες ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος. Αν μοντελοποιήσουμε την κυψέλη ως σύστημα απωλειών, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως χρησιμοποιώντας την Erlang B formula. Πόσο θα αυξηθεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως αν οι χρήστες της κυψέλης διπλασιαστούν;

Λύση

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην κυψέλη είναι:

$$a = \frac{100\,\text{χρήστες} * 1\,\text{κλήση/χρήστη} * 1.8\ \text{λεπτά/κλήση}}{60\ \text{λεπτά}} = 3\,erl$$

Οπότε η πιθανότητα απώλειας κλήσεως δίνεται από την σχέση:

$$E_s(a) \equiv B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{a^i}{i!}} \overset{s=4,\ a=3}{\Rightarrow} B_4 = \frac{\frac{3^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{3^i}{i!}} = \frac{3.375}{\frac{3^0}{0!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}} = 0.206$$

Όταν οι χρήστες γίνουν 200, τότε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην κυψέλη γίνεται:

$$a = \frac{200\,\text{χρήστες} * 1\,\text{κλήση/χρήστη} * 1.8\ \text{λεπτά/κλήση}}{60\ \text{λεπτά}} = 6\,erl$$

Οπότε η πιθανότητα απώλειας κλήσεως υπολογίζεται ως εξής:

$$B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{a^i}{i!}} \overset{s=4,\ a=6}{\Rightarrow} B_4 = \frac{\frac{6^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{6^i}{i!}} = \frac{54}{\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}} \approx 0.47\,.$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απώλειας κλήσεως υπερδιπλασιάζεται.

Άσκηση 3

Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών το οποίο αποτελείται από 4 εξυπηρετητές και δέχεται κλήσεις που ακολουθούν μια διαδικασία Poisson. Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 3 erl ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 1.

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα καταστάσεων.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να έχει τουλάχιστον 2 κατειλημμένους εξυπηρετητές.

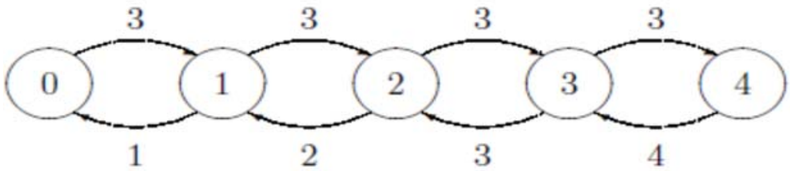
δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο και η πιθανότητα απώλειας των κλήσεων.

ε) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των κατειλημμένων εξυπηρετητών στο σύστημα.

στ) Αν μια κλήση έχει μπλοκαριστεί, ποια η πιθανότητα να μπλοκαριστεί και η ακριβώς επόμενη κλήση.

Λύση

α)



Σχήμα 1: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων

β) Από την Erlang B-Formula έχουμε:

$E_s(a) = \dfrac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s} \frac{a^i}{i!}}$ για s = 0, προκύπτει ότι E_0(α) = P_0 = 8/131 = 0.061068 ή περίπου **6.11%**

γ) Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η 1- P_0- P_1

όπου P_1 = 24/131 = 0.183206 (από τον τύπο Erlang B, για s=1)

Άρα 1- P_0- P_1 = 0.7557 ή **75.57%**

δ) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεων είναι $E_4(a) \equiv B_4 = \dfrac{\frac{a^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{a^i}{i!}} = 27/131 = 0.2061$ ή **20.61%**

ε) Από τις ιδιότητες του φορτίου κίνησης, το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται (carried traffic) ισούται με την μέση τιμή των κατειλημμένων εξυπηρετητών στο σύστημα.

Άρα $a_{carried} = a(1 - B_4) = 3(1 - 0.2061) = 2.38$

Στην ίδια απάντηση καταλήγουμε και αν πάρουμε τον τύπο της μέσης τιμής:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{s} iP_i = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4$$

όπου οι πιθανότητες $P_{1,2,3,4}$ δίνονται από την Erlang B formula.

στ) Αν μια κλήση έχει μπλοκαριστεί τότε σημαίνει πως το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση 4. Η επόμενη ακριβώς κλήση θα μπλοκαριστεί αν φτάσει στο σύστημα πριν εξυπηρετηθεί οποιαδήποτε από τις κλήσεις που βρίσκονται σε αυτό. Επειδή ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι λ=3 και ο ρυθμός εξυπηρέτησης στην κατάσταση 4 είναι 4μ, η πιθανότητα που ψάχνουμε ισούται με $\dfrac{\lambda}{\lambda + 4\mu} P_4 = \dfrac{3}{7} P_4$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα απωλειών Erlang με *s* εξυπηρετητές στο οποίο προσφέρεται φορτίο κίνησης ίσο με *α* erl. Κάποια τυχαία χρονική στιγμή ένας μηχανικός αρχίζει να παρατηρεί το σύστημα και περιμένει μέχρι την επόμενη άφιξη κλήσης. Να δείξετε ότι η πιθανότητα να μπλοκαριστεί αυτή η κλήση ισούται με:

$$P = \frac{a}{a+s} E_s(a)$$

όπου $E_s(a)$ η πιθανότητα το σύστημα να είναι πλήρως κατειλημμένο.

Γιατί δεν ισχύει $P = E_s(a)$;

Λύση

Στο παραπάνω σύστημα μια νέα κλήση θα μπλοκαριστεί αν και μόνο αν: α) ο παρατηρητής βρει όλους τους εξυπηρετητές κατειλημμένους και β) η νέα κλήση φτάσει στο σύστημα πριν να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση κάποιας από τις *s* κλήσεις. Το γεγονός (α) εμφανίζεται με πιθανότητα $E_s(a)$. Με δεδομένο το (α), το γεγονός (β) εμφανίζεται με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda + s\mu}$ αφού ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη και ο χρόνος μέχρι τον επόμενο τερματισμό μιας κλήσης είναι τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανεμημένες με παραμέτρους *λ* και *sμ*, αντίστοιχα. Επομένως:

$$P = \frac{\lambda}{\lambda + s\mu} E_s(a) = \frac{a}{a+s} E_s(a) .$$

Ο λόγος που η παραπάνω πιθανότητα δεν ισούται με $E_s(a)$ όπως ίσως αναμενόταν οφείλεται στο γεγονός ότι η «επόμενη άφιξη» στο σύστημα δεν είναι μια αυθαίρετη (arbitrary) άφιξη.

Άσκηση 5

Μια επιχείρηση προσφέρει υπηρεσίες στους πελάτες της οι οποίες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ένα σύστημα απωλειών Erlang με *s* εξυπηρετητές. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός άφιξης των πελατών είναι 4 πελάτες την ώρα ενώ η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης είναι 1 ώρα. Για κάθε πελάτη που εξυπηρετεί, η επιχείρηση κερδίζει 2.5 euro. Το λειτουργικό κόστος της επιχείρησης είναι 1 euro ανά εξυπηρετητή και ανά ώρα, ανεξάρτητα από το αν ο εξυπηρετητής είναι κατειλημμένος ή όχι. Να υπολογιστεί: α) ο βέλτιστος αριθμός εξυπηρετητών καθώς και το αντίστοιχο ωριαίο κέρδος, β) η μέγιστη τιμή του *s* πέρα από την οποία είναι ασύμφορη η λειτουργία της επιχείρησης και γ) η τιμή του λειτουργικού κόστους ανά εξυπηρετητή και ανά ώρα με την οποία η επιχείρηση πρέπει να πάψει να λειτουργεί.

Λύση

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην επιχείρηση είναι $a = \lambda h$ = 4 erl. Το ωριαίο κέρδος της επιχείρησης, συναρτήσει του λειτουργικού κόστους (ΛΚ) και του αριθμού των εξυπηρετητών, υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Κέρδος} = \lambda(1 - E_s(a))\,2.5 - \text{ΛΚ}$$

όπου $E_s(a)$ η πιθανότητα απώλειας πελάτη υπολογισμένη βάσει της Erlang B formula.

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις τιμές της πιθανότητας απώλειας πελάτη και του Κέρδους για διάφορες τιμές του *s*.

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_s(4.0)$	0.800	0.615	0.451	0.311	0.199	0.117	0.063	0.030	0.013	0.005
Κέρδος	1.00	1.85	2.49	2.89	3.01	2.83	2.37	1.70	0.87	-0.05

α) Επομένως, η βέλτιστη τιμή του κέρδους είναι 3.01 euro ανά ώρα και επιτυγχάνεται με 5 εξυπηρετητές.

β) Η λειτουργία της επιχείρησης είναι ασύμφορη όταν ο αριθμός των εξυπηρετητών υπερβεί την τιμή 9.

γ) Με βάση την δεύτερη στήλη του πίνακα, προκύπτει ότι για *s*=1 η ποσότητα $\lambda(1 - E_s(a))\,2.5$ = 2. Επομένως όταν ΛΚ = 2 και *s*=1 τότε η επιχείρηση λειτουργεί με μηδενικό κέρδος. Άρα για $s \geq 1$, η επιχείρηση πρέπει να πάψει να λειτουργεί.

Άσκηση 6

Θεωρείστε ένα σύστημα κινητών επικοινωνιών με ένα σταθμό βάσης όπου κάθε χρήστης κάνει κατά μέσο όρο δύο κλήσεις την ώρα και κάθε κλήση έχει μέση διάρκεια 180 δευτερόλεπτα. Αν οι αφίξεις των κλήσεων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικά κατανεμημένοι, να υπολογιστούν:

α) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη.

β) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως όταν το σύστημα εξυπηρετεί δύο χρήστες και είναι διαθέσιμο μόνο ένα κανάλι συχνοτήτων.

γ) Ο αριθμός των χρηστών που μπορεί να εξυπηρετήσει το σύστημα με πιθανότητα απώλειας 2%, εάν είναι διαθέσιμα πέντε κανάλια συχνοτήτων.

δ) Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως αν ο αριθμός των χρηστών που βρέθηκε στο ερώτημα (γ) τριπλασιαστεί.

Όπου χρειαστεί μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω πίνακα.

Προσφερόμενο Φορτίο Κίνησης (erlang)					
Αριθμός Καναλιών	Πιθανότητα απώλειας (%)				
	1	2	5	10	20
1	0.0101	0.0204	0.0526	0.1111	0.2500
2	0.1526	0.2235	0.3813	0.5954	1.000
4	0.8694	1.092	1.525	2.045	2.945
5	1.361	1.657	2.219	2.881	4.010
8	3.128	3.627	4.543	5.597	7.369
10	4.461	5.084	6.216	7.511	9.6

Λύση

α) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη ισούται με:

$$a = \lambda h = \frac{2\,\text{κλήσεις/χρήστη} \times 3\,\text{λεπτά/κλήση}}{60\ \text{λεπτά}} = 0.10\,\text{erl}$$

β) Όταν το σύστημα εξυπηρετεί δύο χρήστες, τότε το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 0.10*2=0.2 erl. Οπότε, η πιθανότητα απώλειας κλήσεως δίνεται από την Erlang B formula:

$$B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s}\frac{a^i}{i!}} \overset{s=1}{\Rightarrow} B_1 = \frac{\frac{a^1}{1!}}{\sum_{i=0}^{1}\frac{a^i}{i!}} = \frac{a}{1+a} \Rightarrow B_1 = \frac{0.20}{1.20} = 0.1667$$

γ) Σύμφωνα με την 4η γραμμή του Πίνακα Erlang B, βλέπουμε ότι όταν είναι διαθέσιμα 5 κανάλια επικοινωνίας και η πιθανότητα απώλειας κλήσεως είναι 2% τότε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 1.657 erl. Αν θεωρήσουμε στο σύστημα x χρήστες, καθένας εκ των οποίων προσφέρει 0.10 erl τότε:

$0.10x = 1.657 \Rightarrow x = 16.57$ χρήστες.

Επομένως το σύστημα μπορεί να εξυπηρετήσει 16 χρήστες.

δ) Αν οι χρήστες του ερωτήματος (γ) τριπλασιαστούν, γίνουν δηλαδή 48, τότε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης θα γίνει 48*0.10 = 4.8 erl. Σ' αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα απώλειας κλήσεως γίνεται:

$$B_s = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{s}\frac{a^i}{i!}} \overset{s=5}{\Rightarrow} B_5 = \frac{\frac{a^5}{5!}}{\sum_{i=0}^{5}\frac{a^i}{i!}} = \frac{\frac{(4.8)^5}{120}}{1+4.8+\frac{(4.8)^2}{2!}+\frac{(4.8)^3}{3!}+\frac{(4.8)^4}{4!}+\frac{(4.8)^5}{5!}} \Rightarrow B_5 = 0.2684\,.$$

Άσκηση 7

Θεωρείστε μια αστική περιοχή έκτασης 260 km^2 η οποία εξυπηρετείται από κυψελωτό σύστημα που χρησιμοποιεί ομάδες κυψελών με μέγεθος (cluster size) N = 4. Κάθε κυψέλη έχει ακτίνα 2 km και το σύστημα διαθέτει φάσμα 30 MHz ενώ κάθε αμφίδρομο κανάλι έχει εύρος 60 kHz. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι σύστημα απωλειών Erlang με πιθανότητα απώλειας κλήσεως 1% ενώ κάθε χρήστης κάνει κατά μέσο όρο 2 κλήσεις την ώρα με μέση διάρκεια κλήσεων 3 λεπτά. Να υπολογίσετε:

α) Τον αριθμό των κυψελών στην περιοχή εξυπηρέτησης (εμβαδόν εξαγωνικής κυψέλης $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$, όπου R η ακτίνα της κυψέλης) και τον αριθμό των καναλιών ανά κυψέλη.

β) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης κάθε κυψέλης και τη μέγιστη προσφερόμενη κίνηση σε ολόκληρο το σύστημα.

γ) Το συνολικό αριθμό χρηστών που μπορούν να εξυπηρετηθούν με Grade of Service (GoS) = 1%.

Όπου χρειαστεί μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας Erlang B Προσφερόμενο Φορτίο Κίνησης (erl)			
Αριθμός Καναλιών	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως (%)		
	1	2	5
100	84.050	87.950	95.200
120	102.950	107.400	115.750
125	107.700	112.300	120.900
130	112.450	117.150	126.050
150	131.550	136.800	146.700

Λύση

α) Σύμφωνα με τη σχέση που μας δίνεται, κάθε εξαγωνική κυψέλη έχει εμβαδό $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$=10.4 km^2, επομένως η περιοχή θα καλυφθεί με 260 / 10.4 = 25 κυψέλες.

Ο συνολικός αριθμός καναλιών που είναι διαθέσιμος στο σύστημα είναι 30 MHz / 60 kHz = 500 κανάλια. Κάθε κυψελωτή δομή χρησιμοποιεί το σύνολο των διαθέσιμων καναλιών συχνοτήτων, επομένως κάθε κυψέλη διαθέτει 500/4=125 κανάλια.

β) Ανατρέχοντας στον Πίνακα που μας δίνεται, για 125 κανάλια και GoS = 0,01 βρίσκουμε ότι το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 107.7 erl/κυψέλη.

Η μέγιστη προσφερόμενη κίνηση υπολογίζεται στο σύνολο των κυψελών του συστήματος, δηλ. 25 x 107.7 = 2.692,5 erl.

γ) Κάθε χρήστης παράγει φορτίο κίνησης α = (2/60) x 3 = 0.1 erlang ενώ από το προηγούμενο ερώτημα, η μέγιστη κίνηση στο σύστημα για GOS = 1% είναι 2.692,5 erlang. Επομένως, ο συνολικός αριθμός χρηστών που μπορούν να εξυπηρετηθούν με το συγκεκριμένο GOS είναι 2.692,5 / 0.1 = 26.925 χρήστες.

Άσκηση 8

Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών Engset, όπου έχουμε *s* εξυπηρετητές, πεπερασμένο πληθυσμό πηγών κίνησης μεγέθους *N*, ρυθμό αφίξεων των κλήσεων *λ* και εξυπηρέτησης *μ*. Ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος. Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης ανά «ελεύθερη» πηγή (πηγή που δεν εξυπηρετείται) δίνεται από την σχέση $a_{fin} = v / \mu$ όπου *v* είναι η μέση τιμή (σταθερή) του ρυθμού άφιξης των κλήσεων ανά «ελεύθερη» πηγή κίνησης. Όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *n*, τότε η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης («γέννησης») των κλήσεων που προέρχονται από όλες τις «ελεύθερες» πηγές κίνησης δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)v, & (0 \le n < N) \\ 0, & (n \ge N) \end{cases}$$

όπου *n* είναι ο αριθμός των πηγών κίνησης που εξυπηρετούνται από το σύστημα.

Όμοια, η μέση τιμή του ρυθμού εξυπηρέτησης των κλήσεων δίνεται από την σχέση:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & (1 \le n \le s-1) \\ s\mu, & (n \ge s) \end{cases}$$

α) Να δώσετε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων, όπου κάθε κατάσταση θα δηλώνει τον αριθμό των κλήσεων στο σύστημα.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μονίμου καταστάσεως το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*.

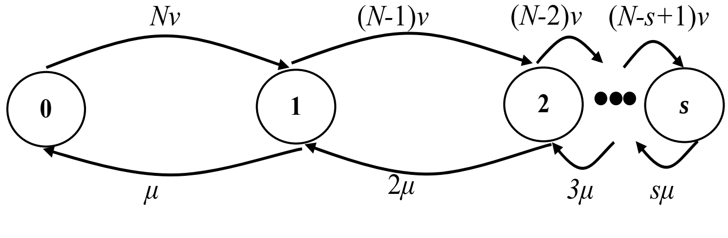
γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως.

δ) Έστω ότι σε έναν υπολογιστή τρέχουμε 6 εφαρμογές που επιτρέπουμε να χρησιμοποιούν μόνο 3 πόρτες για να ξεκινήσουν μια σύνδεση TCP. Αν τα σχετικά αιτήματα χρήσης κάποιας πόρτας για σύνδεση από κάθε εφαρμογή έρχονται με συχνότητα 12 ανά ώρα και η διάρκεια χρήσης της πόρτας είναι 150 δευτερόλεπτα υπολογίστε την πιθανότητα να είναι όλες οι πόρτες σε χρήση όταν έρθει κάποιο αίτημα.

ε) Δεδομένου ότι κάποιο αίτημα μπλοκάρεται, ποια είναι η πιθανότητα να μπλοκαριστεί και το επόμενο αίτημα;

Λύση

α)



Σχήμα 2: Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων για το σύστημα απωλειών Engset.

β) Η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, *P*(*n*), υπολογίζεται βάσει των εξισώσεων τοπικής ισορροπίας:

$$N\nu P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{N\nu}{\mu} P_0 \Rightarrow P_1 = N a_{fin} P_0$$

$$(N-1)\nu P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{(N-1)\nu}{2\mu} P_1 \Rightarrow P_2 = N(N-1)\frac{a_{fin}^2}{2!} P_0$$

$$(N-2)\nu P_2 = 3\mu P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{(N-2)\nu}{3\mu} P_2 \Rightarrow P_3 = N(N-1)(N-2)\frac{a_{fin}^3}{3!} P_0$$

και γενικά:

$$P_n = \binom{N}{n} a_{fin}^n P_0 \qquad (1 \le n \le s)$$

με $\alpha_{fin}=\nu/\mu$ και

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s} \binom{N}{n} a_{fin}^n\right]^{-1}$$

Σημείωση: Στην περίπτωση που ο αριθμός των πηγών κίνησης $N \to \infty$ και θεωρώντας ότι διατηρείται σταθερό το φορτίο κίνησης $N\frac{\nu}{\mu} = a$, προκύπτει ότι:

$$\binom{N}{n}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^n = \frac{N(N-1)(N-2)...(N-n+1)}{n!N^n}\left(N\frac{\nu}{\mu}\right)^n \to \frac{a^n}{n!}$$

οπότε οδηγούμαστε στο μοντέλο απωλειών του Erlang.

γ) Προκειμένου να υπολογίσουμε τον τύπο της πιθανότητας απώλειας κλήσεως γνωστό και ως Engset loss formula, θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα όλοι οι εξυπηρετητές να είναι κατειλημμένοι κατά την άφιξη μιας κλήσης. Η πιθανότητα αυτή είναι η Q_s και μπορεί να εκφραστεί ως:

$$B(s,N,a) \equiv Q_s = \frac{\binom{N-1}{s} a_{fin}^s}{\left[\sum_{n=0}^{s} \binom{N-1}{n} a_{fin}^n\right]}$$

με $\alpha_{fin}=\nu/\mu$ και

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s} \binom{N-1}{n} a_{fin}^n\right]^{-1}$$

δ) N = 6, ν = 12/60 = 0.2 αιτήσεις/min, μ = 60/150 = 1/2.5=0.4 αιτήσεις/min και $a_{fin} = \frac{\nu}{\mu} = 0.5$. Άρα:

$$P_n = \frac{\binom{N}{n} a_{fin}^n}{\sum_{n=0}^{s} \binom{N}{n} a_{fin}^n} \Rightarrow \quad P_3 = \frac{\binom{6}{3} a_{fin}^3}{\sum_{n=0}^{3} \binom{6}{n} a_{fin}^3} = \frac{20 \times (0.5)^3}{\sum_{n=0}^{3} \binom{6}{n} (0.5)^3} = \frac{20 \times (0.5)^3}{(1+6+15+20) \times (0.5)^3} = 0.47619$$

ε) Αν το αίτημα έχει μπλοκαριστεί, τότε γνωρίζουμε ότι όλες οι πόρτες χρησιμοποιούνται. Επομένως το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση s = 3 ενώ ο ρυθμός άφιξης αιτήσεων προς την κατάσταση αυτή είναι (N-s+1)v = 4v. Για να μπλοκαριστεί η επόμενη αίτηση θα πρέπει να αφιχθεί στο σύστημα πριν ελευθερωθεί κάποια πόρτα (αυτό συμβαίνει με ρυθμό 3μ). Άρα η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει δίνεται από την σχέση:

$$p = \frac{4v}{4v + 3\mu} = \frac{4 \times 0.2}{4 \times 0.2 + 3 \times 0.4} = 0.4$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 3–4: Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών – Εφαρμογή των τύπων Erlang και Engset». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.