



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Δυναμική Ηλεκτρικών Μηχανών

## Ενότητα 2: Τριφασική Ασύγχρονη Μηχανή

Επ. Καθηγήτρια Τζόγια Χ. Καππάτου

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



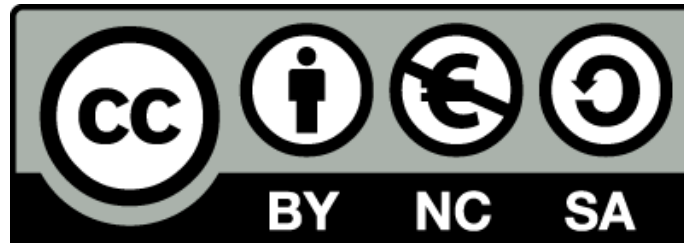
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Περιεχόμενα

## Τριφασική Ασύγχρονη Μηχανή (Α.Μ.)

# Τριφασική Ασύγχρονη Μηχανή (Α.Μ.)

Για τη μελέτη των **μεταβατικών** φαινομένων όλων γενικά των ηλεκτρικών μηχανών δεν αρκούν τα ισοδύναμα κυκλώματα, ούτε ο μιγαδικός λογισμός, διότι αυτά μας χρησιμεύουν μόνο για τη μελέτη της λειτουργίας στη μόνιμη κατάσταση.

✓ Θα αναπτύξουμε μία γενική ανάλυση που επιτρέπει την μελέτη όλων γενικά των καταστάσεων λειτουργίας.

# Συνθήκες

1. Η μελέτη πραγματοποιείται σε μια *Ασύγχρονη μηχανή δακτυλιοφόρου δρομέα* με *1 ζεύγος πόλων*.
2. Ο στάτης και ο δρομέας έχουν ο καθένας από ένα συμμετρικό τριφασικό τύλιγμα, δηλαδή τρεις όμοιες φάσεις, των οποίων οι άξονες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες  $2\pi/3$ .
3. Οι ωμικές αντιστάσεις, οι αυτεπαγωγές και οι αμοιβαίες επαγωγές θεωρούνται σταθερές, δηλαδή ανεξάρτητες της τιμής των διαφόρων ρευμάτων τα οποία διαρρέουν τα τυλίγματα.



Παραλείπουμε την μεταβολή των αντιστάσεων λόγω θερμοκρασίας και θεωρούμε την μαγνητική χαρακτηριστική γραμμική.

# Συνθήκες (1)

4. Το μαγνητικό πεδίο μεταξύ στάτη και δρομέα δηλαδή η μαγνητική επαγωγή  $B$  στο διάκενο θεωρείται ημιτονοειδώς κατανεμημένη, δηλαδή λαμβάνεται υπ' όψη μόνο η θεμελιώδης αρμονική κύμανση. Το μήκος αυτής είναι  $\lambda=2\tau$  ( $\tau$  = απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πόλων).
- ➡ Εδώ παραλείπουμε τις ανώτερες αρμονικές του πεδίου λόγω των αυλακώσεων στάτη και δρομέα.
5. Οι απώλειες τριβών, σιδήρου, εξαερισμού κ.λ.π. θεωρούνται αμελητέες.

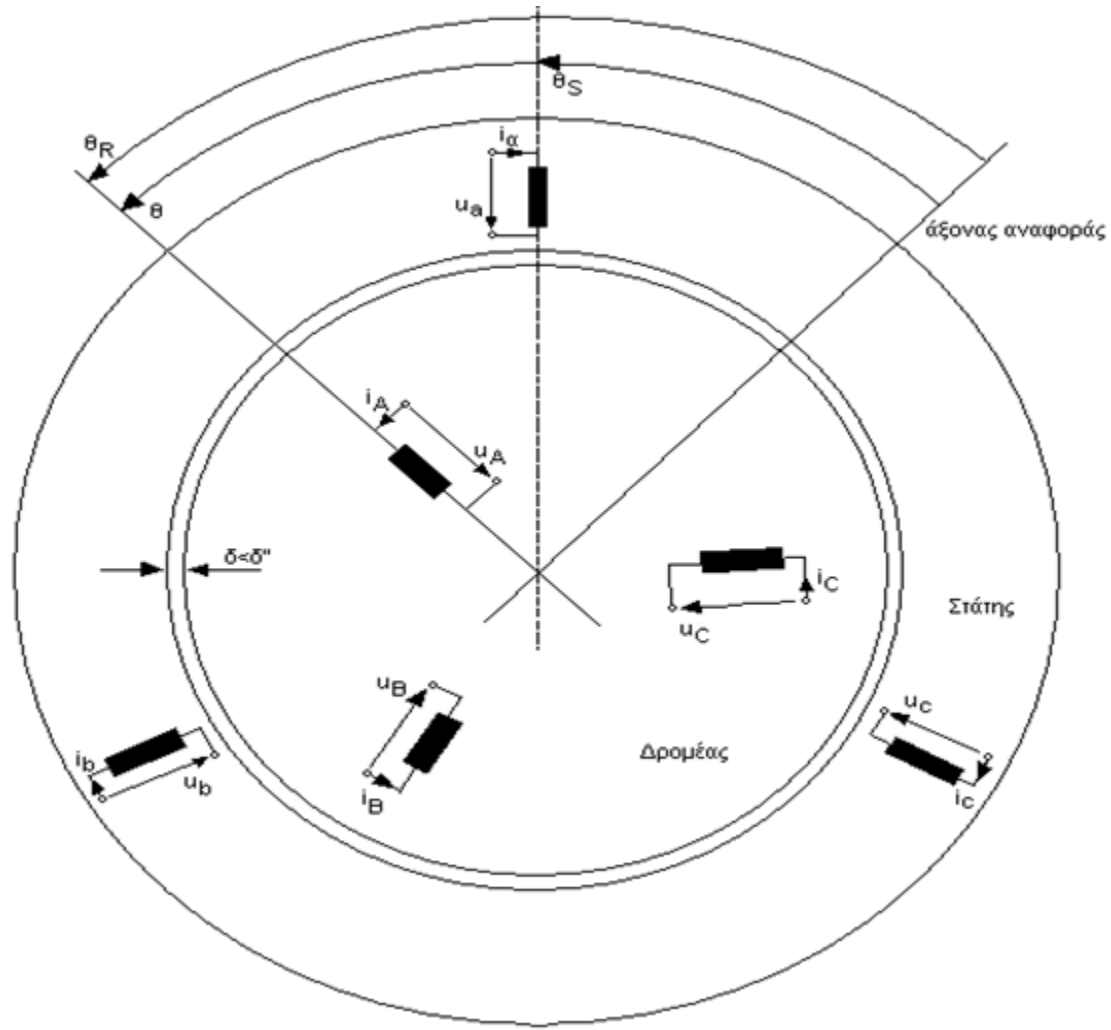
## Συνθήκες (2)

6. Θεωρούμε την μηχανή διπολική. Έτσι επιτυγχάνεται ευδιακρισία, ενώ η θεωρητική ανάλυση δεν παύει να ισχύει για μηχανές με οποιοδήποτε αριθμό πόλων.

➔ Η συνθήκη 1. δεν στερεί την ισχύ της αναλύσεως και για μηχανές με βραχυκυκλωμένο δρομέα. Αυτός έχει στο δρομέα τόσες φάσεις όσες είναι και οι βραχυκυκλωμένες μπάρες που τοποθετούνται μέσα στις αυλακώσεις.



# Διπολικό Μοντέλο Ασύγχρονης Μηχανής



Σχ.1.6.1. Διπολικό Μοντέλο Ασύγχρονης Μηχανής

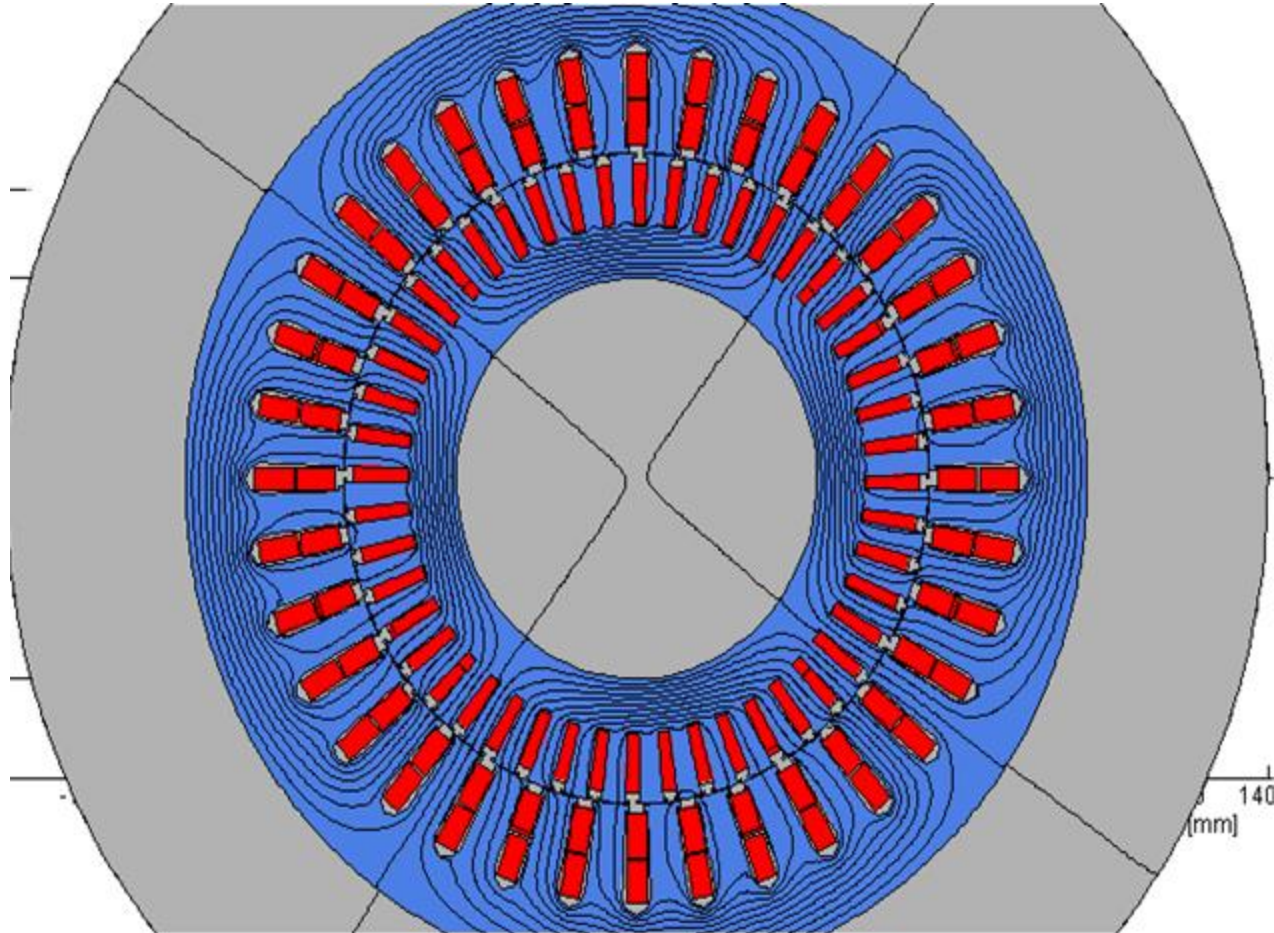
# Διπολικό Μοντέλο Ασύγχρονης Μηχανής (1)

Η θέση των φάσεων του στάτη και του δρομέα καθορίζεται από τη σχέση τους ως προς ένα άξονα αναφοράς, ο οποίος επιλέγεται κατά βούληση.

Προς τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις τρεις ακόλουθες γωνίες :

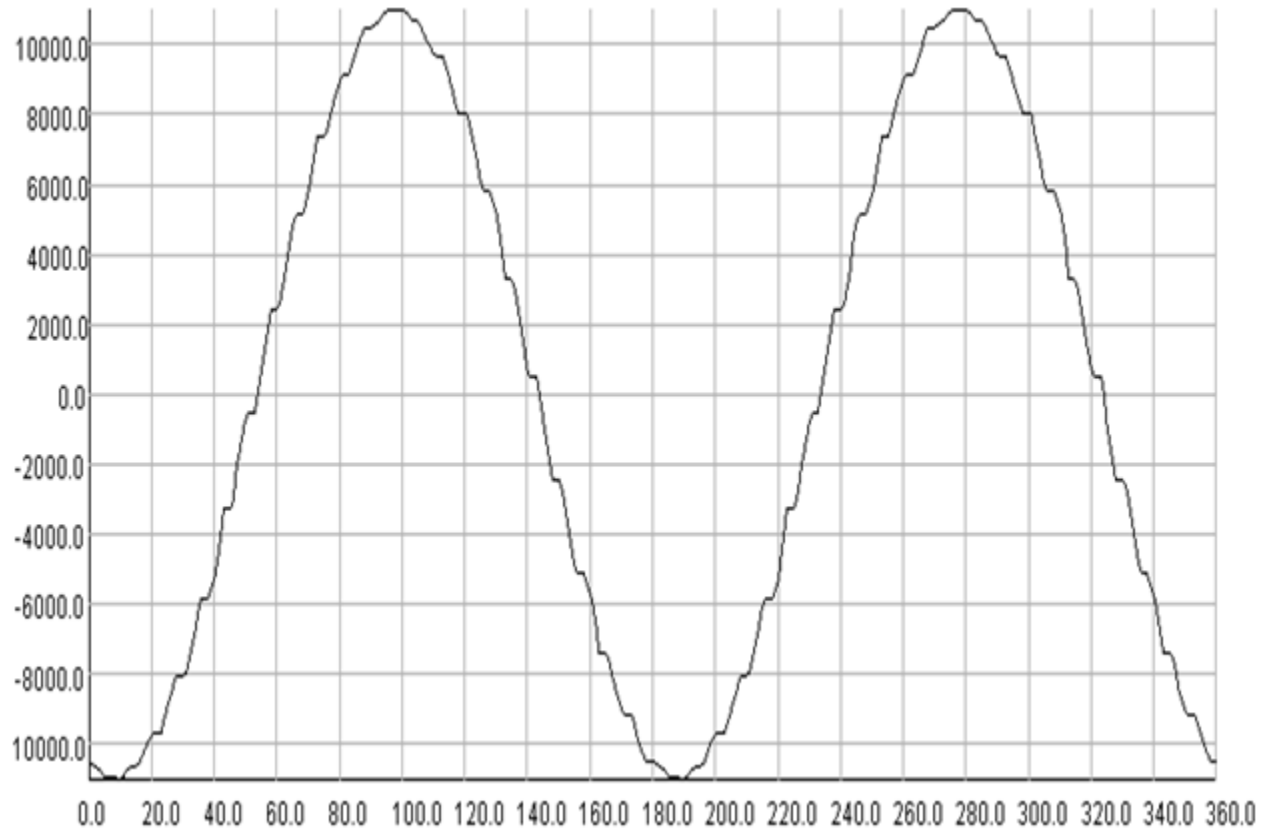
- **Γωνία  $\theta_S$ :** γωνία μεταξύ της φάσης  $a$  του στάτη και του άξονα αναφοράς.
- **Γωνία  $\theta_R$ :** γωνία μεταξύ της φάσης  $A$  του δρομέα και του άξονα αναφοράς.
- **Γωνία  $\theta$ :** γωνία μεταξύ της φάσης  $a$  του στάτη και  $A$  του δρομέα.

# Μοντέλο Ασύγχρονης Μηχανής



*Σχ.1.6.2. Τομή 3-φασικής Ασύγχρονης Μηχανής Κλωβού*

# Μαγνητικό πεδίο στο μέσο του διακένου



Σχ.1.6.3. Διανυσματικό Δυναμικό  $\vec{A}$  στο μέσο του διακένου

# Ηλεκτρικές και Γεωμετρικές Γωνίες

Οι γωνίες αυτές είναι συναρτήσεις του χρόνου λόγω της περιστροφής του δρομέα. Στην ανάλυση που ακολουθεί οι γεωμετρικές γωνίες μετατρέπονται σε ηλεκτρικές γωνίες.

Μια ηλεκτρική γωνία ισούται με  $2\pi$  όταν συμπληρωθεί μια περίοδος του μαγνητικού πεδίου στο διάκενο, ενώ γεωμετρική γωνία  $2\pi$  σημαίνει μία πλήρη περιφορά.

# Ηλεκτρικές και Γεωμετρικές Γωνίες (1)

Μεταξύ ηλεκτρικής και γεωμετρικής γωνίας ισχύει:

$$\theta_{el} = p \theta_{\text{γεωμετρική}} \quad \boxed{\text{A.4.1}}$$

Όπου  $p$  ο αριθμός των ζευγών πόλων

- Για τον αριθμό στροφών:

$$n = \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}_{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p} \frac{d\theta_{el}}{dt} \quad \boxed{\text{A.4.2}}$$

# Συμβολισμοί

Οι συμβολισμοί των δεικτών των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν για την περαιτέρω ανάλυση της ασύγχρονης μηχανής μέσω των εξισώσεων τάσεων είναι:

Συμβολισμοί (δείκτες)	Επεξήγηση
$\alpha, b, c$	Τρεις φάσεις του Στάτη
$S, R$	Το μέγεθος αναφέρεται στο Στάτη, Δρομέα
$A, B, C$	Τρεις φάσεις του Δρομέα
Τονούμενα μεγέθη (')	Ανοιγμένα στο Στάτη

# Εξισώσεις Τάσεων Στάτη

Σύμφωνα με την ανάλυση στην ενότητα για τα *μαγνητικά συζευγμένα κυκλώματα* προκύπτουν οι ακόλουθες *εξισώσεις τάσεων*.

- Φασικές τάσεις στους ακροδέκτες του στάτη δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} \quad \text{A.4.3}$$

- $R_S$  η ωμική αντίσταση μιας φάσης του στάτη.



# Εξισώσεις Τάσεων Δρομέα

- Φασικές τάσεις στους ακροδέκτες του δρομέα:

$$\begin{bmatrix} u'_A \\ u'_B \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_R & 0 & 0 \\ 0 & R'_R & 0 \\ 0 & 0 & R'_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_A \\ i'_B \\ i'_C \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi'_A \\ \Psi'_B \\ \Psi'_C \end{bmatrix} \quad \text{A.4.4}$$

- $R'_R$  η ωμική αντίσταση μιας φάσης του δρομέα ανηγμένη στο στάτη.
- ✓ Τα μεγέθη στο δρομέα είναι ανοιγμένα στο στάτη (τονούμενα) για να προκύψει το ηλεκτρικό ισοδύναμο των μαγνητικά συζευγμένων κυκλωμάτων Στάτη-Δρομέα

# Εξισώσεις Μαγνητικών Ροών

Για το στήλη:

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_A \\ i'_B \\ i'_C \end{bmatrix} \quad \text{A.4.5}$$

Για το δρομέα:

$$\begin{bmatrix} \Psi'_A \\ \Psi'_B \\ \Psi'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_A \\ i'_B \\ i'_C \end{bmatrix} \quad \text{A.4.6}$$

- ✓ Οι επαγωγιμότητες είναι συντελεστές αυτεπαγωγών των διαφόρων φάσεων ή αλληλεπαγωγών.

# Εξισώσεις τάσεων και ροών σε Μορφή Μητρώων

$$(u_S) = (R_S)(i_S) + \frac{d}{dt}(\Psi_S) \quad \text{A.4.7}$$

$$(u'_R) = (R'_R)(i'_R) + \frac{d}{dt}(\Psi'_R) \quad \text{A.4.8}$$

$$(\Psi_S) = (L_{SS})(i_S) + (L'_{SR})(i'_R) \quad \text{A.4.9}$$

$$(\Psi'_R) = (L'_{RS})(i_S) + (L'_{RR})(i'_R) \quad \text{A.4.10}$$

# Εξισώσεις τάσεων και ρών σε Μορφή Υπερμητρών

$$\begin{pmatrix} (u_S) \\ (u'_R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_S) & 0 \\ 0 & (R'_R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i_S) \\ (i'_R) \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} (\Psi_S) \\ (\Psi'_R) \end{pmatrix}$$

A.4.11

$$\begin{pmatrix} (\Psi_S) \\ (\Psi'_R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_{SS}) & (L'_{RS}) \\ (L'_{RS}) & (L'_{RR}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i_S) \\ (i'_R) \end{pmatrix}$$

A.4.12

Πιο συνοπτικά:

$$(u) = (R)(i) + \frac{d}{dt} (\Psi)$$

A.4.13

$$(\Psi) = (L)(i)$$

A.4.14

# Παρατηρήσεις

- Συνήθως ο δρομέας βραχυκυκλωμένος:  $u'_A = u'_B = u'_C = 0$
- Για τους συντελεστές αλληλεπαγωγής:  $L_{ik} = L_{ki}$
- Οι αυτεπαγωγές  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}, L_{AA}, L_{BB}, L_{CC}$  και οι αλληλεπαγωγές μεταξύ των φάσεων του στάτη  $L_{ab}, L_{ac}, L_{bc}$  και του δρομέα  $L_{AB}, L_{AC}, L_{BC}$  είναι σταθερές.
- Οι αλληλεπαγωγές μεταξύ στάτη και δρομέα  $L_{aA}, L_{aB}, \dots$  είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$ , συνεπώς συναρτήσεις του χρόνου.
- Η μαγνητική ροή κάθε φάσης ( $\Psi_a, \Psi'_A, \dots$ ) είναι συνάρτηση όλων των ρευμάτων που ρέουν στα τυλίγματα του στάτη και του δρομέα.
- Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν για *A.M.* με οποιονδήποτε αριθμό πόλων.
- Ίδιες εξισώσεις τάσεων ισχύουν και για *A.M. Βραχυκυκλωμένου Κλωβού*, αλλά στο δρομέα *ο αριθμός των εξισώσεων θα είναι τόσος, όσος ο αριθμός των φάσεων* του δρομέα, δηλαδή όσος ο αριθμός μπαρών του κλωβού.

# Επαγωγιμότητες

- Οι επαγωγιμότητες που εμφανίζονται κατά την ανάλυση μιας ασύγχρονης μηχανής εκφράζουν τη σχέση των μαγνητικών ροών με τα ρεύματα των τυλιγμάτων.
- Υπολογίζονται ή από το νόμο διαρρέυματος ή από τη μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο χώρο της μηχανής όπου επικρατεί ένα μαγνητικό πεδίο (όχι στο σιδηρομαγνητικό υλικό).

Υπολογισμός από τη μαγνητική ενέργεια:

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV \quad \text{A.4.15}$$

$$W_m = \frac{1}{2} (i)'(\Psi) = \frac{1}{2} (i)'(L)(i) \quad \text{A.4.16}$$

# Αλληλεπαγωγή Μεταξύ Στάτη και Δρομέα

Οι αμοιβαίες επαγωγιμότητες, που προκύπτουν από τις αναλυτικές εξισώσεις αλλά και σύμφωνα με την θεωρία της ενότητας **“Στοιχεία Ηλεκτρομηχανικών Συστημάτων”**, είναι οι ακόλουθες:

$$L_{aA} = L_{Aa} = L_{bB} = L_{Bb} = L_{cC} = L_{Cc} = M \cos \theta \quad \text{A.4.17}$$

$$L_{aB} = L_{Ba} = L_{bC} = L_{Cb} = L_{cA} = L_{Ac} = M \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{A.4.18}$$

$$L_{aC} = L_{Ca} = L_{bA} = L_{Ab} = L_{cB} = L_{Bc} = M \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{A.4.19}$$

Η **κύρια αυτεπαγωγή  $M$**  ορίζεται ως εξής:

$$M = \mu_0 \frac{4}{\pi^2} (w_s \xi_s)^2 \frac{l\tau}{p\delta''} \quad \text{A.4.20}$$

$w_s$ : ο αριθμός σπειρών στάτη

$\xi_s$ : συντελεστής μορφής του τυλίγματος στάτη

$l$ : ενεργό μήκος δρομέα και στάτη

$\tau$ : απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πόλων

$\delta''$ : αυξημένο πλάτος διακένου

$p$ : ζεύγη πόλων

# Αλληλεπαγωγή Μεταξύ Στάτη και Δρομέα

Η σχέση που δίνει την κύρια αυτεπεπαγωγή  $M$  ισχύει υπό την προϋπόθεση, ότι ο δρομέας είναι ανηγμένος στο στάτη.

Η μήτρα αλληλεπαγωγών ( $L'_{SR}$ ):

$$(L'_{SR}) = M \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{A.4.21}$$

**Ισχύει:**

$$(L'_{RS}) = (L'_{SR})^T$$



# Αυτεπαγωγιμότητες

Επειδή οι φάσεις του δρομέα και του στάτη συμμετρικές:

$$\begin{array}{l} \text{Σταθερές} \\ \text{(Αμελώντας κορεσμό} \\ \text{και τις αυλακώσεις)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = S_S + M \\ L_{AA} = L_{BB} = L_{CC} = S'_R + M \end{array} \right. \begin{array}{l} \boxed{\text{A.4.22}} \\ \boxed{\text{A.4.23}} \end{array}$$

Όπου:

$S_S$ : Επαγωγή σκέδασης του στάτη

$S'_R$ : Επαγωγή σκέδασης του δρομέα

$M$ : η κύρια αυτεπαγωγή

- Οι **επαγωγές σκεδάσεως** εκφράζουν τη σχέση της ροής σκεδάσεως όλων των αυλακώσεων και της ροής σκεδάσεως των κεφαλών των τυλιγμάτων, με τα ρεύματα που την προκαλούν.

# Αυτεπαγωγιμότητες

- Η κύρια αυτεπαγωγή  $M$  εκφράζει τη μαγνητική ροή που προέρχεται από το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο μιας φάσης του στάτη και διέρχεται από αυτό, το διάκενο και το δρομέα. Δημιουργεί τη μαγνητική ζεύξη μεταξύ στάτη και δρομέα.
- Το μέρος  $S_S$  αντιστοιχεί στη ροή σκεδάσεως, η οποία αναπτύσσεται στις αυλακώσεις και στις κεφαλές των τυλιγμάτων, είναι δε πεπλεγμένη μόνο με ένα πηνίο, δηλαδή δεν δημιουργεί ζεύξη στάτη και δρομέα

# Αλληλεπαγωγές Μεταξύ Φάσεων

## Στάτη και Μεταξύ Φάσεων Δρομέα

- Εκφράζονται με ανάλογες σχέσεις με τις αλληλεπαγωγές μεταξύ στάτη και δρομέα, όπου τώρα η γωνία  $\theta$  αντικαθίσταται με  $2\pi/3$  και  $4\pi/3$ . Έτσι αυτές οι αλληλεπαγωγιμότητες είναι σταθερές.
- Για το στάτη:

$$\begin{aligned}L_{ab} &= L_{ba} = L_{bc} = L_{cb} = L_{ac} = L_{ca} = M_{S\sigma} + M \cos \frac{2\pi}{3} = \\ &= M_{S\sigma} + M \cos \frac{4\pi}{3} = M_{S\sigma} - \frac{M}{2}\end{aligned}\quad \boxed{\text{A.4.24}}$$

- Για το δρομέα:

$$\begin{aligned}L_{AB} &= L_{BA} = L_{BC} = L_{CB} = L_{AC} = L_{CA} = M'_{R\sigma} + M \cos \frac{2\pi}{3} = \\ M'_{R\sigma} + M \cos \frac{4\pi}{3} &= M'_{R\sigma} - \frac{M}{2}\end{aligned}\quad \boxed{\text{A.4.25}}$$

# Αλληλεπαγωγές Μεταξύ Φάσεων Στάτη και Δρομέα (1)

- Τα στοιχεία  $M_{S\sigma}$  και  $M'_{R\sigma}$  είναι επαγωγές αμοιβαίας σκέδασης, αντιστοιχούν δηλαδή σε ροή σκέδασης που δημιουργεί ζεύξη μεταξύ αγωγών που ανήκουν σε διαφορετικά τυλίγματα. Αυτή υπάρχει όταν η μηχανή φέρει τυλίγματα με δύο στρώσεις. Όταν έχουμε τυλίγματα με μια στρώση  $M_{S\sigma} = M'_{R\sigma} = 0$ , διότι απουσιάζει η παραπάνω μαγνητική ζεύξη.

# Μήτρες επαγωγιμοτήτων στο τριφασικό σύστημα

$$[L_{SS}] = \begin{bmatrix} S_S + M & M_{S\sigma} - \frac{M}{2} & M_{S\sigma} - \frac{M}{2} \\ M_{S\sigma} - \frac{M}{2} & S_S + M & M_{S\sigma} - \frac{M}{2} \\ M_{S\sigma} - \frac{M}{2} & M_{S\sigma} - \frac{M}{2} & S_S + M \end{bmatrix} \quad \text{A.4.26}$$

$$[L'_{SR}] = \begin{bmatrix} M \cos \vartheta & M \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) & M \cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ M \cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) & M \cos \vartheta & M \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) & M \cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) & M \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \text{A.4.27}$$

✓ Η Μήτρα  $L_{RR}$  είναι της ίδιας μορφής με την  $L_{SS}$

# Εξισώσεις τάσεων Ασύγχρονης Μηχανής στο dq0 σύστημα

- Οι σχέσεις **A.4.7** και **A.4.8** μετασχηματίζονται στο dq0 σύστημα σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην ενότητα για τον μετασχηματισμό ωμικών και επαγωγικών στοιχείων, καθώς γίνονται με *την ίδια μήτρα μετασχηματισμού* (σχέση **A.3.5**) και με την προϋπόθεση ότι *η ισχύς, όπως υπολογίζεται στα 2 συστήματα, να είναι ίση*:

$$\begin{bmatrix} u_{Sdq0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sdq0} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_s \begin{bmatrix} \Psi_{sqd0} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{sdq0} \end{bmatrix} \quad \text{A.4.28}$$

$$\begin{bmatrix} u'_{Rdq0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{Rdq0} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_R \begin{bmatrix} \Psi'_{Rdq0} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi'_{Rdq0} \end{bmatrix} \quad \text{A.4.29}$$

# Εξισώσεις τάσεων Ασύγχρονης Μηχανής στο dq0 σύστημα (1)

$$\left[ \Psi_{Sqd0} \right]^T = \left[ \Psi_{sq} \quad -\Psi_{sd} \quad 0 \right] \quad \text{A.4.30}$$

Όπου:

$$\left[ \Psi'_{Rdq0} \right]^T = \left[ \Psi'_{Rq} \quad -\Psi'_{Rd} \quad 0 \right] \quad \text{A.4.31}$$

Οι 3 όροι του β' μέλους των **A.4.28**, **A.4.29** εκφράζουν:

- Πτώσεις τάσης στις ωμικές αντιστάσεις.
- Τάσεις εξ επαγωγής λόγω κίνησης.
- Τάσεις εξ επαγωγής λόγω χρονικής μεταβολής μαγνητικής ροής.

# Μετασχηματισμός μαγνητικών ρών στο dq0

Προπολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις **A.4.12** με την  $[\mathbf{M}_S]^{-1}$  και  $[\mathbf{M}_R]^{-1}$ , αντίστοιχα για τον στάτη και το δρομέα, για να τις μετασχηματίσουμε στο dq0 σύστημα, προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S]^{-1} [\Psi_S] \\ [\mathbf{M}_R]^{-1} [\Psi'_R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S]^{-1} [\mathbf{L}_{SS}] & [\mathbf{M}_S]^{-1} [\mathbf{L}'_{SR}] \\ [\mathbf{M}_R]^{-1} [\mathbf{L}'_{SR}]^T & [\mathbf{M}_R]^{-1} [\mathbf{L}'_{RR}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_S] \\ [i'_R] \end{bmatrix} \quad \text{A.4.32}$$

Τα ρεύματα στο β' μέρος των εξισώσεων τα μετασχηματίζουμε στο dq0 σύστημα προπολλαπλασιάζοντας τα με την  $[\mathbf{M}_S]$  και  $[\mathbf{M}_R]$ , αντίστοιχα για τον στάτη και το δρομέα. Έτσι προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} [\Psi_{Sdq0}] \\ [\Psi'_{Rdq0}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_S]^{-1} [\mathbf{L}_{SS}] [\mathbf{M}_S] & [\mathbf{M}_S]^{-1} [\mathbf{L}'_{SR}] [\mathbf{M}_R] \\ [\mathbf{M}_R]^{-1} [\mathbf{L}'_{SR}]^T [\mathbf{M}_S] & [\mathbf{M}_R]^{-1} [\mathbf{L}'_{RR}] [\mathbf{M}_R] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [i_{Sdq0}] \\ [i'_{Rdq0}] \end{bmatrix} \quad \text{A.4.33}$$



# Μετασχηματισμός μαγνητικών ροών στο dq0 (1)

**Σχέσεις επαγωγιμοτήτων** στο διφασικό σύστημα, dq0, με αυτές του τριφασικού συστήματος, abc:

*Επαγωγιμότητα σκεδάσεως στάτη:*

*Ανηγμ. επαγωγιμότητα σκεδάσεως δρομέα:*

*Μηδενική επαγωγιμότητα στάτη:*

*Ανηγμένη μηδενική επαγωγιμότητα δρομέα:*

*Κύρια αυτεπαγωγιμότητα:*

**Ολικές επαγωγιμότητες** στο dq0 σύστημα:

*Ολική επαγωγιμότητα στάτη:*

*Ολική ανηγμένη επαγωγιμότητα δρομέα:*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{S\sigma} = S_S - M_{S\sigma} \\ L'_{R\sigma} = S'_R - M'_{R\sigma} \\ L_{S0} = S_S + 2M_{S\sigma} \\ L'_{R0} = S'_R + 2M'_{R\sigma} \\ L_h = \frac{3}{2} M = \mu_0 \frac{6}{\pi^2} (w_s \xi_s)^2 \frac{l\tau}{p\delta''} \end{array} \right. \quad \text{A.4.34}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_S = L_{S\sigma} + L_h \\ L'_R = L'_{R\sigma} + L_h \end{array} \right\} \quad \text{A.4.35}$$

# Μετασχηματισμός μαγνητικών ροών στο dq0 (2)

Κάνοντας πράξεις στις σχέσεις A.4.33:

$$[M_S]^{-1}[L_{SS}][M_S] = \begin{bmatrix} L_{S\sigma} + L_h & 0 & 0 \\ 0 & L_{S\sigma} + L_h & 0 \\ 0 & 0 & L_{S0} \end{bmatrix} \quad \text{A.4.36}$$

$$[M_S]^{-1}[L'_{SR}][M_R] = [M_R]^{-1}[L'_{SR}]^T[M_S] = \begin{bmatrix} L_h & 0 & 0 \\ 0 & L_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{A.4.37}$$

# Τελικό Σύστημα Εξισώσεων Α.Μ. στο dq0

$$\left. \begin{aligned}
 u_{Sd} &= R_S i_{Sd} + \dot{\theta}_S \Psi_{Sq} + \frac{d\Psi_{Sd}}{dt} \\
 u_{Sq} &= R_S i_{Sq} - \dot{\theta}_S \Psi_{Sd} + \frac{d\Psi_{Sq}}{dt} \\
 u_{S0} &= R_S i_{S0} + \frac{d\Psi_{S0}}{dt}
 \end{aligned} \right\}, \quad \text{A.4.38}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u'_{Rd} &= R'_R i'_{Rd} + \dot{\theta}_R \Psi'_{Rq} + \frac{d\Psi'_{Rd}}{dt} \\
 u'_{Rq} &= R'_R i'_{Rq} - \dot{\theta}_R \Psi'_{Rd} + \frac{d\Psi'_{Rq}}{dt} \\
 u'_{R0} &= R'_R i'_{R0} + \frac{d\Psi'_{R0}}{dt}
 \end{aligned} \right\}, \quad \text{A.4.39}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Psi_{Sd} &= L_S i_{Sd} + L_h i'_{Rd} \\
 \Psi_{Sq} &= L_S i_{Sq} + L_h i'_{Rq} \\
 \Psi_{S0} &= L_{S0} i_{S0}
 \end{aligned} \right\}, \quad \text{A.4.40}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Psi'_{Rd} &= L'_R i'_{Rd} + L_h i_{Sd} \\
 \Psi'_{Rq} &= L'_R i'_{Rq} + L_h i_{Sq} \\
 \Psi'_{R0} &= L'_{R0} i'_{R0}
 \end{aligned} \right\} \quad \text{A.4.41}$$

# Τελικό Σύστημα Εξισώσεων Α.Μ. στο dq0 (1)

Υπό συνοπτική μορφή μπορούν να γραφούν οι παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_{dq0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dq0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dq0} \end{bmatrix} + \frac{d[\theta]}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{dq0} \end{bmatrix} + \frac{d[\Psi_{dq0}]}{dt} \quad \text{A.4.42}$$

όπου 
$$[\theta] = \begin{pmatrix} \theta_S & 0 & 0 \\ 0 & \theta_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Υπολογισμός Ηλεκτρομαγνητικής Ισχύος και Ροπής

- Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τον ισολογισμό ισχύος *(κατά τους μετασχηματισμούς ισχύς αμετάβλητη)*:

$$P = (i_{abc})^T (u_{abc}) \equiv (i_{dq0})^T (u_{dq0}) \quad \text{A.4.43}$$

Εσωτερικό γινόμενο διανύσματος σειράς του ρεύματος με διάνυσμα στήλης της τάσης:

$$P = i_a u_a + i_b u_b + i_c u_c = [i_a, i_b, i_c] \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad \text{A.4.44}$$
$$= i_d u_d + i_q u_q + i_o u_o = [i_d, i_q, i_o] \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_o \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην **A.4.43** τον συνεπτυγμένο τύπο **A.4.42** η συνολική ισχύς εισόδου γίνεται:

# Ισχύς

- Συνολική ισχύς εισόδου:

$$P = (i_{dq0})^T (R_{dq0})(i_{dq0}) + (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) + (i_{dq0})^T \frac{d}{dt} (\Psi_{dq0}) \quad \text{A.4.45}$$

- Απώλεια ισχύος σε θερμότητα ( $P_{FE} = 0$ ):

$$P_l = (i_{dq0})^T (R_{dq0})(i_{dq0}) = R_S (i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) + R'_R (i_A'^2 + i_B'^2 + i_C'^2) \quad \text{A.4.46}$$

- Χρονική μεταβολή μαγνητικής και μηχανικής ενέργειας:

$$P - P_l = \frac{dW_m}{dt} + \frac{dA}{dt} = (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) + (i_{dq0})^T \frac{d}{dt} (\Psi_{dq0}) \quad \text{A.4.47}$$

- Συνολική μαγνητική ενέργεια στη μηχανή:

$$W_m = \frac{1}{2} (i_{dq0})^T (\Psi_{dq0}) = \frac{1}{2} (i_{dq0})^T (L)(i_{dq0}) \quad \text{A.4.48}$$

- Χρονική μεταβολή μαγνητικής ενέργειας:

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d(i_{dq0})^T}{dt} (\Psi_{dq0}) + (i_{dq0})^T \frac{d(\Psi_{dq0})}{dt} \right] \quad \text{A.4.49}$$

Από την σχέση **A.4.47** μεταφέροντας την μαγνητική ισχύ στο άλλο μέλος προκύπτει:

- Μηχανική ισχύς:

$$\begin{aligned} P_{mech} &= \frac{dA}{dt} = -\frac{dW_m}{dt} + (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) + (i_{dq0})^T \frac{d}{dt} (\Psi_{dq0}) = \\ \text{A.4.48} \longrightarrow &= (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) + (i_{dq0})^T \frac{d(\Psi_{dq0})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(i_{dq0})^T}{dt} (\Psi_{dq0}) - \frac{1}{2} (i_{dq0})^T \frac{d(\Psi_{dq0})}{dt} = \\ &= (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) + \frac{1}{2} (i_{dq0})^T \frac{d(\Psi_{dq0})}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(i_{dq0})^T}{dt} (\Psi_{dq0}) \\ P_{mech} &= \frac{dA}{dt} = (i_{dq0})^T \left( \frac{d(\theta)}{dt} \right) (\Psi_{dq0}) \quad \text{A.4.50} \end{aligned}$$

# Ηλεκτρομαγνητική Ροπή

Όπου:  $(i_{dq0})' = ((i_{dq0S}), (i'_{dq0R})) = ((i_{Sd}, i_{Sq}), (i'_{Rd}, i'_{Rq}))$  A.4.51

Από την μηχανική ισχύ προκύπτει η ηλεκτρομαγνητική ροπή  $M$  :

$$M = \frac{P_{mech}}{\Omega} = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$$
 A.4.52

Από τις σχέσεις A.4.50, A.4.52 και  $\Omega = \frac{\dot{\theta}}{p}$  προκύπτει η εξίσωση της ροπής:

- Εξίσωση Ηλεκτρομαγνητικής ροπής:

$$M = \frac{p}{\theta} \left[ \dot{\theta}_S (i_{Sd} \Psi_{Sq} - i_{Sq} \Psi_{Sd}) + \dot{\theta}_R (i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) \right]$$
 A.4.53

ΚΑΙ  $\Omega = \frac{1}{p} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{p} = \frac{\omega_{el}}{p}$  A.4.54

## Εξίσωση κίνησης:

(Οι τριβές αμελούνται)

$$M = M_L + J \frac{d\Omega}{dt}$$

A.4.55

Άθροισμα ροπής φορτίου και ροπής επιταχύνσεως.

# Τελικό Σύστημα Εξισώσεων Α.Μ. στο dq0 σύστημα αναφοράς

## Εξισώσεις Τάσεων

$$\left. \begin{aligned} u_{sd} &= R_S i_{sd} + \dot{\theta}_S \Psi_{sq} + \frac{d\Psi_{sd}}{dt} \\ u_{sq} &= R_S i_{sq} - \dot{\theta}_S \Psi_{sd} + \frac{d\Psi_{sq}}{dt} \\ u_{s0} &= R_S i_{s0} + \frac{d\Psi_{s0}}{dt} \end{aligned} \right\} \text{A.4.56}$$

$$\left. \begin{aligned} u'_{rd} &= R'_R i'_{rd} + \dot{\theta}_R \Psi'_{rq} + \frac{d\Psi'_{rd}}{dt} \\ u'_{rq} &= R'_R i'_{rq} - \dot{\theta}_R \Psi'_{rd} + \frac{d\Psi'_{rq}}{dt} \\ u'_{r0} &= R'_R i'_{r0} + \frac{d\Psi'_{r0}}{dt} \end{aligned} \right\} \text{A.4.57}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{sd} &= L_S i_{sd} + L_h i'_{rd} \\ \Psi_{sq} &= L_S i_{sq} + L_h i'_{rq} \\ \Psi_{s0} &= L_{S0} i_{s0} \end{aligned} \right\} \text{A.4.58}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{rd} &= L'_R i'_{rd} + L_h i_{sd} \\ \Psi'_{rq} &= L'_R i'_{rq} + L_h i_{sq} \\ \Psi'_{r0} &= L'_{R0} i'_{r0} \end{aligned} \right\} \text{A.4.59}$$

## Εξισώσεις Ροπής και Κίνησης

$$M = \frac{p}{\theta} \left[ \dot{\theta}_S (i_{sd} \Psi_{sq} - i_{sq} \Psi_{sd}) + \dot{\theta}_R (i'_{rd} \Psi'_{rq} - i'_{rq} \Psi'_{rd}) \right] \text{A.4.60}$$

$$M = M_L + J \frac{d\Omega}{dt} \text{A.4.61}$$

$$\Omega = \frac{1}{p} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{p} = \frac{\omega_{el}}{p} \text{A.4.62}$$



# Επιλογή Συστήματος Αναφοράς (d-q)

Εμφανίζονται γωνίες  $\theta_S, \theta_R$

$$\theta_R = \theta + \theta_S$$

A.4.63

**Τρεις σημαντικές θέσεις του ορθογωνίου 2-φασικού συστήματος (d-q)**

**1) Σταθερά συνδεδεμένο με το στάτη:**

$$\theta_S = 0, \dot{\theta}_S = \frac{d\theta_S}{dt} = 0, \theta_R = \theta, \dot{\theta}_R = \dot{\theta}$$

A.4.64

✓ Ο άξονας  $d$  συμπίπτει με την φάση  $\alpha$ !

# Επιλογή Συστήματος Αναφοράς (d-q) (1)

- Διάφορες εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ροπής:

$$\begin{aligned} M &= p(i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) = pL_h (i'_{Rd} i_{Sq} - i'_{Rq} i_{Sd}) = \\ &= p \frac{L_h}{L_S L'_R - L_h^2} (\Psi'_{Rd} \Psi_{Sq} - \Psi'_{Rq} \Psi_{Sd}) = \\ &= p(i_{Sq} \Psi_{Sd} - i_{Sd} \Psi_{Sq}) = \\ &= p \frac{L_h}{L'_R} (i_{Sq} \Psi'_{Rd} - i_{Sd} \Psi'_{Rq}) = p \frac{L_h}{L_S} (i'_{Rd} \Psi_{Sq} - i'_{Rd} \Psi_{Sd}) \quad \boxed{\text{A.4.65}} \end{aligned}$$

- ✓ Η Ηλεκτρομαγνητική Ροπή είναι αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων των ρευμάτων και μαγνητικών ροών του στάτη και δρομέα!

# Επιλογή Συστήματος Αναφοράς (d-q) (2)

## 2) Σταθερά συνδεδεμένο με δρομέα:

$$\theta_R = 0, \theta_S = -\theta, \dot{\theta}_R = 0, \dot{\theta}_S = -\dot{\theta} \quad \text{A.4.66}$$

Έκφραση για τη ροπή:

$$M = p(\Psi_{sd}i_{sq} - \Psi_{sq}i_{sd}) \quad \text{A.4.67}$$

# Επιλογή Συστήματος Αναφοράς (d-q) (3)

## 3) Σταθερά συνδεδεμένο με στρεφόμενο μαγνητικό πεδίο:

Ορίζουμε:

$$\theta_S = -\omega_S t + \theta_{S0}, \theta = p\Omega t$$

$$\dot{\theta}_S = -\omega_S, \quad \dot{\theta} = p\Omega = p2\pi n$$

$$\theta_R = -\omega_S t + \theta_{S0} + p\Omega t$$

$$\dot{\theta}_R = -\omega_S + p\Omega$$

$$\dot{\theta}_R = -\omega_R \Rightarrow$$

$$\omega_S = \omega_R + p\Omega$$

A.4.68

$$n_s = \frac{f_s}{p}$$

✓ Το d-q σύστημα περιστρέφεται με την **σύγχρονη ταχύτητα!**

# Ολίσθηση και Ροπή

Οι γωνίες εκφράζονται σε ηλεκτρικές. Τα ηλεκτρικά μεγέθη του δρομέα έχουν συχνότητα  $\omega_R$ .

• Ολίσθηση: 
$$s = \frac{\omega_R}{\omega_S} = 1 - \frac{p\Omega}{\omega_S} = 1 - \frac{n}{n_S}, (\omega_S = 2\pi n_S p) \quad \text{A.4.69}$$

• **Ροπή:**

Ανεξάρτητη της θέσης και της ταχύτητας του συστήματος αναφοράς (d-q).

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\Omega} \left( -\omega_S (i_{Sd} \Psi_{Sq} - i_{Sq} \Psi_{Sd}) + (p\Omega - \omega_S) (i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) \right) = \\ &= \frac{\omega_S}{\Omega} (i_{Sd} \Psi_{Sq} - i_{Sq} \Psi_{Sd} + i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) + p (i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) = \\ &= p (i'_{Rd} \Psi'_{Rq} - i'_{Rq} \Psi'_{Rd}) \quad \text{A.4.70} \end{aligned}$$

# Σχέση Διανυσμάτων χώρου με Συνιστώσες του dq0 Συστήματος

Οι παραπάνω σχέσεις της ροπής είναι ανεξάρτητες της θέσεως και της ταχύτητας του  $dq$  συστήματος και μπορούν να εκφραστούν συντομότερα χρησιμοποιώντας διανυσματικά μεγέθη. Εξ ορισμού αν ο  $d$  θεωρηθεί *πραγματικός* άξονας και ο  $q$  *φανταστικός* τότε κάθε ηλεκτρικό ή μαγνητικό μέγεθος εμφανίζεται ως μιγαδικό διάνυσμα στο  $dq$  επίπεδο:

$$\underline{\dot{i}}_S = \dot{i}_{Sd} + j\dot{i}_{Sq}, \quad \text{A.4.71}$$

$$\underline{\Psi}_S = \Psi_{Sd} + j\Psi_{Sq}$$

$$\underline{\dot{i}}_R = \dot{i}_{Rd} + j\dot{i}_{Rq}, \quad \text{A.4.72}$$

$$\underline{\Psi}_R = \Psi_{Rd} + j\Psi_{Rq}$$

$$\underline{\Psi}_S^* = \Psi_{Sd} - j\Psi_{Sq} \quad \text{A.4.73}$$

$$\underline{\dot{i}}_R^* = \dot{i}_{Rd} - j\dot{i}_{Rq},$$

$$\underline{\Psi}_R^* = \Psi_{Rd} - j\Psi_{Rq} \quad \text{A.4.74}$$

# Ηλεκτρομαγνητική Ροπή και Διανύσματα χώρου

- Συνεπάγεται ότι η ροπή μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} M &= p \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_S \underline{\Psi}_S^* \right] = p L_h \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_S^* \underline{i}_R \right] = p \frac{L_h}{L'_R} \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_S \underline{\Psi}_R^* \right] = p \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_R^* \underline{\Psi}_R \right] = \\ &= p \frac{L_h}{L_S} \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_R^* \underline{\Psi}_S \right] = p \frac{L_h}{L_S L'_R - L_h^2} \operatorname{Im} \left[ \underline{\Psi}_S \underline{\Psi}_R^* \right] \quad \boxed{\text{A.4.75}} \end{aligned}$$

- ✓ Κάθε μέγεθος (ηλεκτρικό ή μαγνητικό) εμφανίζεται στο  $dq$  επίπεδο ως ένα μιγαδικό διάνυσμα, ακίνητο ή στρεφόμενο ανάλογα με την εκλογή του συστήματος αναφοράς.

# Εξισώσεις Α.Μ. με Διανύσματα Χώρου

- Η ασύγχρονη μηχανή περιγράφεται ως εξής με τη χρήση διανυσμάτων χώρου, όπως προκύπτει από τα όσα αναφέρθηκαν στον μετασχηματισμό από το abc στο dq και επίσης την A.4.75 :

$$\underline{u}_S = R_S \underline{i}_S - j\dot{\theta}_S \underline{\Psi}_S + \frac{d\underline{\Psi}_S}{dt} \quad \text{A.4.76}$$

$$\underline{u}'_R = R'_R \underline{i}'_R - j\dot{\theta}_R \underline{\Psi}_R + \frac{d\underline{\Psi}_R}{dt} \quad \text{A.4.77}$$

$$\underline{\Psi}_S = L_S \underline{i}_S + L_h \underline{i}'_R \quad \text{A.4.78}$$

$$\underline{\Psi}_R = L_h \underline{i}_S + L'_R \underline{i}'_R \quad \text{A.4.79}$$

$$M = p \operatorname{Im} \left[ \underline{i}_S \underline{\Psi}_S^* \right] = p \frac{L_h}{L_S L'_R - L_h^2} \operatorname{Im} \left[ \underline{\Psi}_S \underline{\Psi}_R^* \right] \quad \text{A.4.80}$$

$$M = M_L + J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad \text{A.4.81}$$

$$\theta_R = \theta_S + \theta \quad \text{A.4.82}$$



# Παρατηρήσεις

- Οι εξισώσεις τάσεων και ροών **A.4.76-79** ισχύουν **υπό την προϋπόθεση** πως οι μηδενικές συνιστώσες  $u_0$ ,  $i_0$ ,  $\Psi_0$  για το στάτη και το δρομέα είναι μηδέν.

Αυτό συμβαίνει όταν:

- Η συνδεσμολογία των 3 φάσεων του στάτη ή του δρομέα είναι *αστέρας* και *δεν υπάρχει επιστροφή* από τον κοινό κόμβο.
- Η συνδεσμολογία των 3 φάσεων του στάτη ή του δρομέα είναι *τρίγωνο* και *η μηχανή* καθώς και η *τροφοδοσία* της είναι *συμμετρικές*.

# Παρατηρήσεις (1)

- Από όλα τα μιγαδικά διανύσματα χώρου, μόνο το διάνυσμα του ρεύματος μαγνήτισης και το στρεφόμενο μαγνητικό πεδίο έχουν φυσική σημασία.

$$\underline{\dot{i}}_{-\mu} = \underline{\dot{i}}_S + \underline{\dot{i}}'_R \quad \boxed{\text{A.4.83}}$$

$$\underline{B} = L_h \underline{\dot{i}}_{-\mu} \quad \boxed{\text{A.4.84}}$$

- Τα ρεύματα και οι τάσεις σαν διανύσματα χώρου έχουν μόνο υπολογιστική σημασία.

# Εξισώσεις Α.Μ. στην Μόνιμη Κατάσταση

## Συνδεδεμένη σε δίκτυο συμμετρικών ημιτονοειδών τάσεων

Για συμμετρική κατάσταση οι  $d$  και  $q$  μεταβλητές των τάσεων, ρευμάτων και ροών είναι ημιτονοειδείς σε όλα τα συστήματα αναφοράς, εκτός από την περίπτωση που το  $dq$  σύστημα στρέφεται με την ταχύτητα του στρεφόμενου μαγνητικού πεδίου, όπου τότε οι μεταβλητές αυτές είναι *σταθερές*.

Για την ανάλυση της Μόνιμης Κατάστασης της Α.Μ. θεωρείται το  $dq$  σύστημα *στρεφόμενο μαζί με το μαγνητικό πεδίο  $B$*  του διακένου της μηχανής.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_S &= -\omega_S, \\ \dot{\theta}_R &= -\omega_R, \\ \dot{\theta} &= \omega_S - \omega_R = p\Omega, \\ \omega_R &= \omega_S - p\Omega = s\omega_S \end{aligned} \right\} \text{A.4.85}$$

# Εξισώσεις Α.Μ. στην Μόνιμη Κατάσταση (1)

Συνήθως αντικαθιστούμε τις αυτεπαγωγιμότητες  $L_S$  και  $L_R$  με το άθροισμα των επαγωγιμοτήτων σκεδάσεως και των ωφέλιμων ή κύριων επαγωγιμοτήτων  $L_{Sh} = L_h$  και  $L_{Rh}$  ( $L'_{Rh} = L_h$ ):

$$\left. \begin{aligned} L_S &= L_{S\sigma} + L_h \\ L'_R &= L'_{R\sigma} + L_h \end{aligned} \right\} \text{A.4.86}$$

Στη μόνιμη κατάσταση οι χρονικές μεταβολές των μαγνητικών ροών είναι μηδέν, το dq σύστημα στρέφεται με  $n_s$ .

$$\frac{d\underline{\Psi}_S}{dt} = 0, \frac{d\underline{\Psi}_R}{dt} = 0 \quad \text{A.4.87}$$

# Τάσεις, Ροές στη Μόνιμη Κατάσταση

Οι σχέσεις A.4.56-A.4.59 γίνονται:

$$\underline{u}_S = R_S \underline{i}_S + j\omega_S \underline{\Psi}_S$$

$$\underline{u}'_R = R'_R \underline{i}'_R + js\omega_S \underline{\Psi}_R$$

$$\underline{\Psi}_S = L_{S\sigma} \underline{i}_S + L_h \underline{i}_\mu$$

$$\underline{\Psi}_R = L'_{R\sigma} \underline{i}'_R + L_h \underline{i}_\mu$$

A.4.88

Αν αντικατασταθούν οι μαγνητικές ροές στις εξισώσεις τάσεων:

$$\underline{u}_S = (R_S + jX_{S\sigma}) \underline{i}_S + jX_h \underline{i}_\mu$$

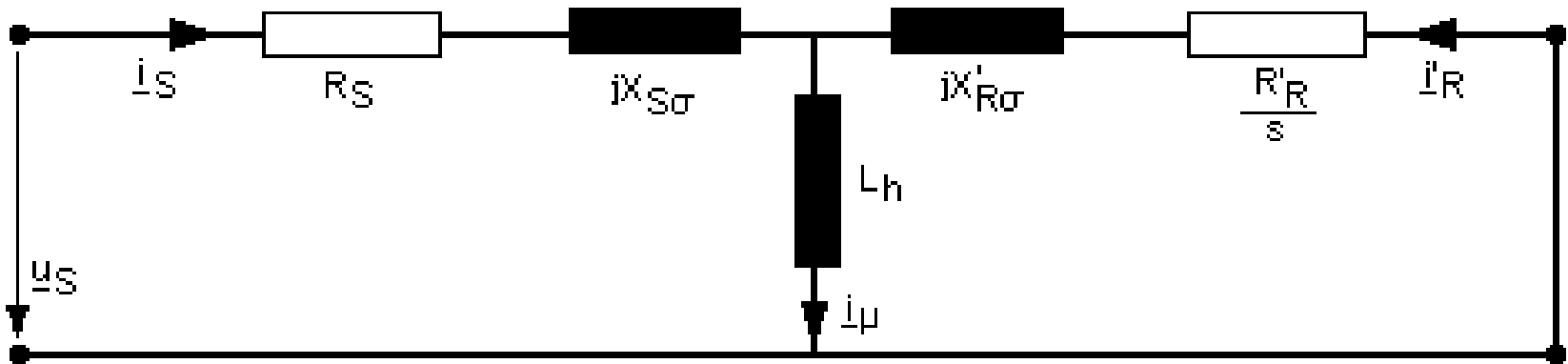
$$\underline{u}'_R = \left( \frac{R'_R}{s} + jX'_{R\sigma} \right) \underline{i}'_R + jX_h \underline{i}_\mu$$

$$(X_{S\sigma} = L_{S\sigma} \omega_S, X'_{R\sigma} = L'_{R\sigma} \omega_S)$$

A.4.89

# Ισοδύναμο κύκλωμα A.M. για τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας

Από τις προηγούμενες σχέσεις A.4.89 προκύπτει το ισοδύναμο κύκλωμα για μηχανή με βραχυκυκλωμένο δρομέα ή για δρομέα συνδεδεμένο με ωμικές αντιστάσεις στους δακτυλίους ολίσθησης.



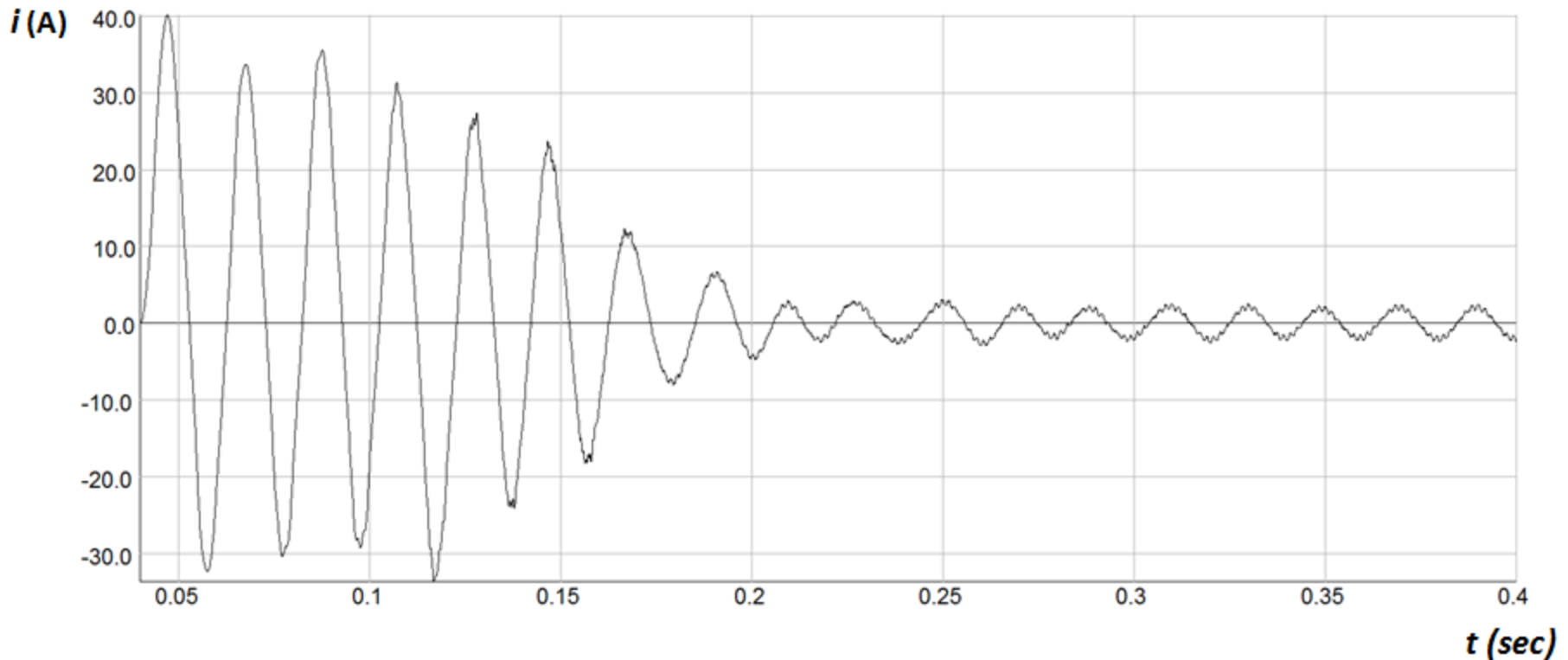
**Σχ.1.6.4. Ισοδύναμο κύκλωμα A.M. για τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας**

- Αναφέρεται σε μία φάση. Οι τάσεις και τα ρεύματα παριστάνουν το μιγαδικό εύρος. Στην περίπτωση του dq0 συστήματος τα μεγέθη αυτά παριστάνουν διανύσματα χώρου σταθερού μήκους. Η μετάβαση από το dq0 στο 3-φασικό σύστημα επιτυγχάνεται με την προβολή του διανύσματος στον άξονα κάθε φάσης ή με την χρήση της μήτρας [M].
- Με την προσθήκη ωμικής αντίστασης  $R_{FE}$  παράλληλα στην  $L_h$  λαμβάνονται υπ' όψιν οι απώλειες σιδήρου.

# Κυματομορφές Α. Μ. για εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ

- Μία 3-φασική Α.Μ. εξομοιώθηκε σε περιβάλλον πεπερασμένων στοιχείων και οι κυματομορφές, που ακολουθούν δείχνουν τις μεταβλητές της μηχανής που προέκυψαν από την εξομοίωση.
- Η μηχανή που χρησιμοποιήθηκε είναι 4-πολική, τριφασική με ονομαστική μηχανική ισχύ  $P_N=4\text{kW}$  και τροφοδοτείται με τάση συχνότητας 50Hz.

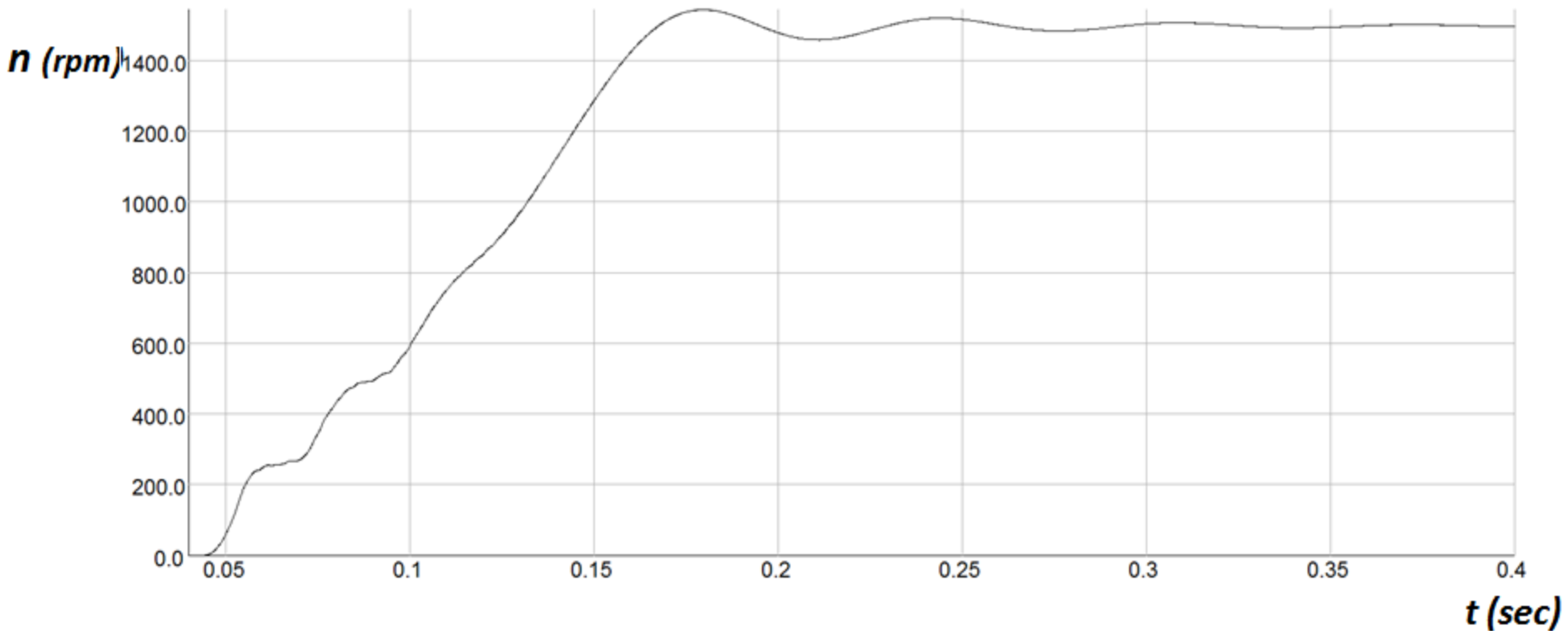
# Κυματομορφές Α. Μ. για εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ (1)



**Σχ.1.6.5. Φασικό Ρεύμα Στάτη Α.Μ. συναρτήσεως του χρόνου κατά την εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ**

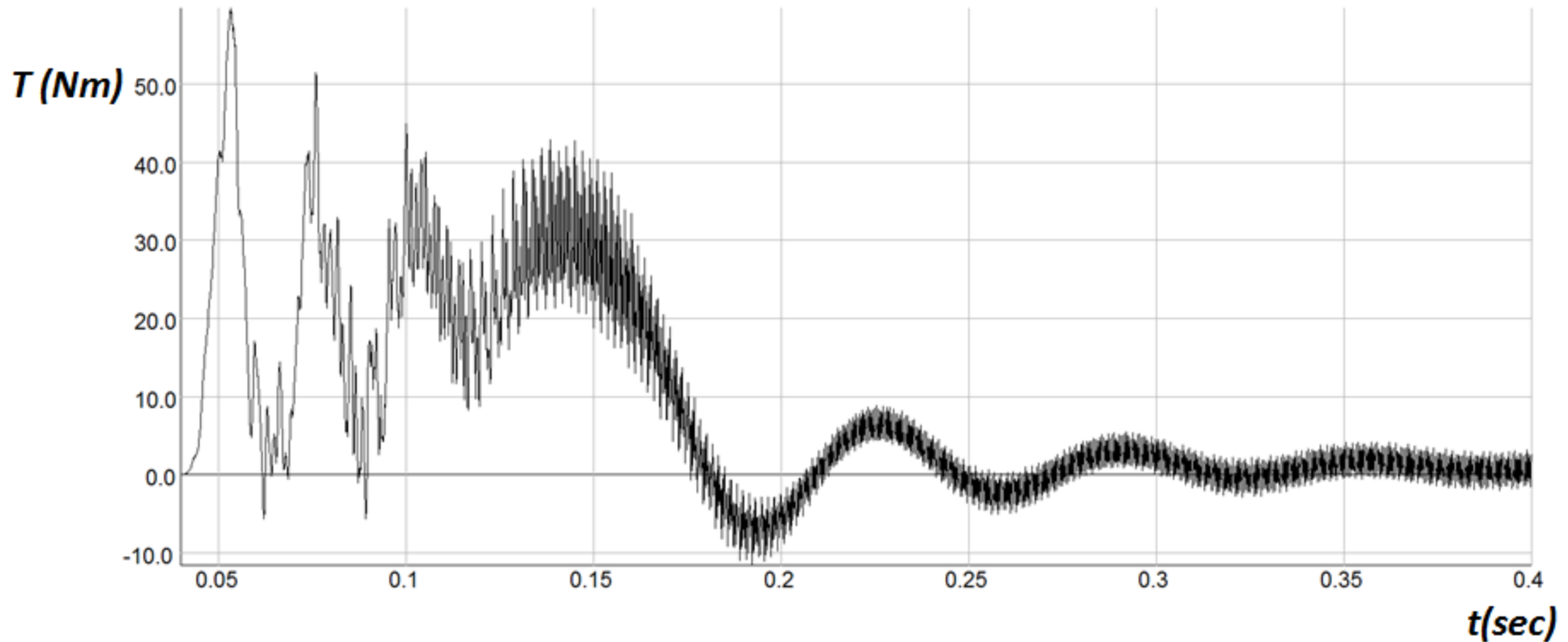


# Κυματομορφές Α. Μ. για εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ (2)



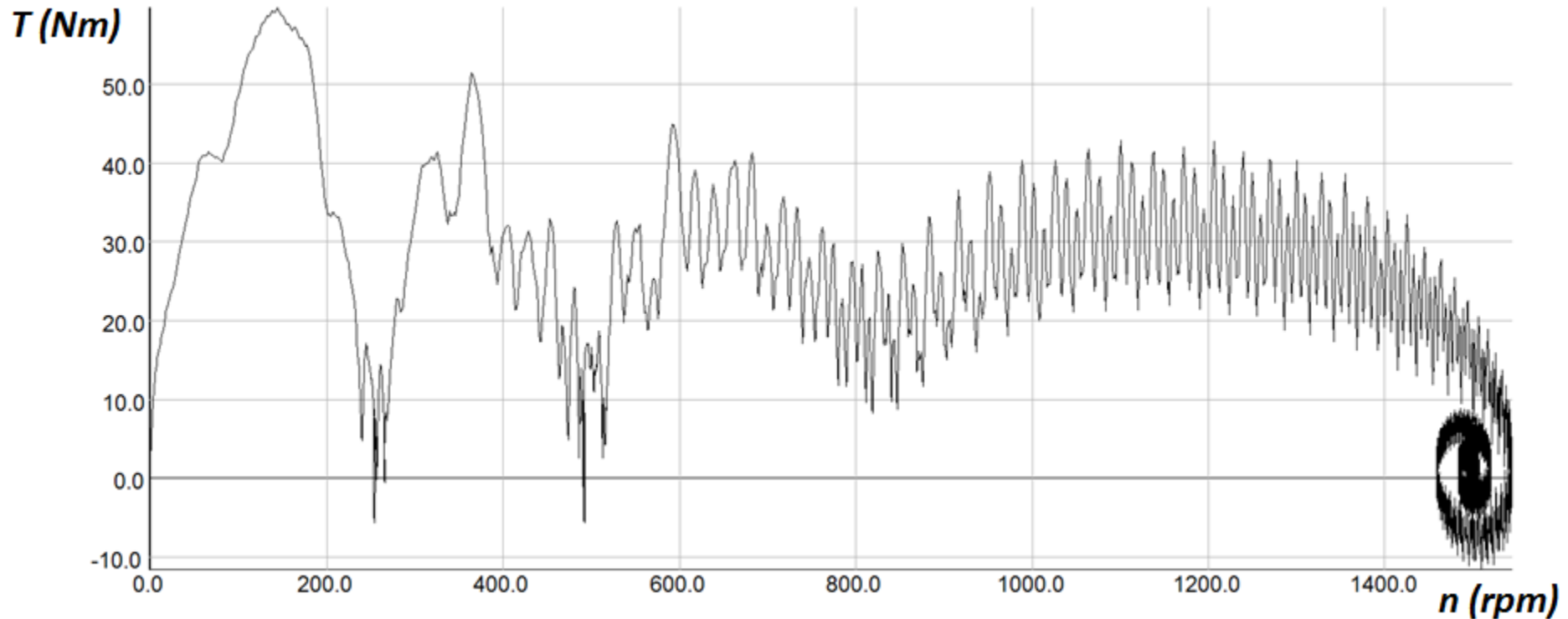
**Σχ.1.6.6. Στροφές συναρτήσει του χρόνου Α.Μ. κατά την εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ**

# Κυματομορφές Α. Μ. για εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ (3)



*Σχ.1.6.7. Ηλεκτρομαγνητική Ροπή συναρτήσει του χρόνου Α.Μ. κατά την εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ*

# Κυματομορφές Α. Μ. για εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ (4)



**Σχ.1.6.8. Ηλεκτρομαγνητική Ροπή συναρτήσει των στροφών Α.Μ. κατά την εκκίνηση και λειτουργία εν κενώ**

# Πηγές

Οι πηγές των **Εικόνων, των Σχημάτων και των Διαγραμμάτων είναι:**

[1] Α.Ν. Σαφάκας, «Ηλεκτρικές Μηχανές Α», Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2009

[2] Α.Ν. Σαφάκας, «Ηλεκτρικές Μηχανές Β», Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2009

[3] Α.Ν. Σαφάκας, «Δυναμική Ηλεκτρομηχανικών συστημάτων» Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2008

[4] Τζόγια Χ. Καππάτου, Πανεπιστημιακές σημειώσεις και Εξομοιώσεις Μοντέλων Ηλεκτρικών Μηχανών σε περιβάλλον Πεπερασμένων Στοιχείων, Εργαστήριο Ηλεκτρομηχανικής Μετατροπής Ενέργειας, Η.Μ.Τ.Υ, Πανεπιστήμιο Πατρών.

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

