



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Εισαγωγή στους Υπολογιστές

Ενότητα 11: Βασικές έννοιες ψηφιακής λογικής

Βασίλης Παλιουράς

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Γιατί χρησιμοποιούμε δυαδική αναπαράσταση;
- Σχέση δυαδικής αναπαράστασης με τη λογική
- Επεξεργασία με λογικά κυκλώματα



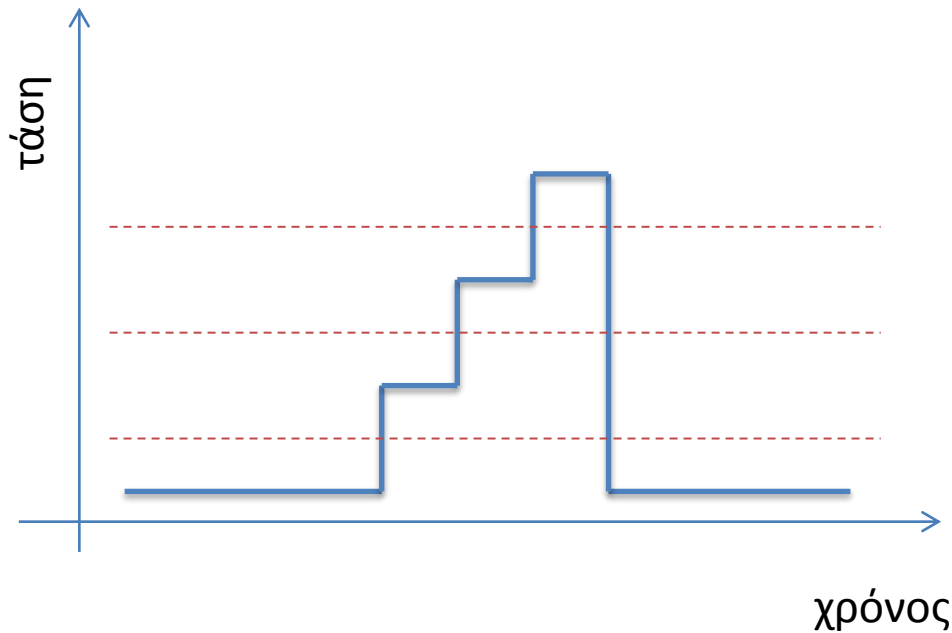
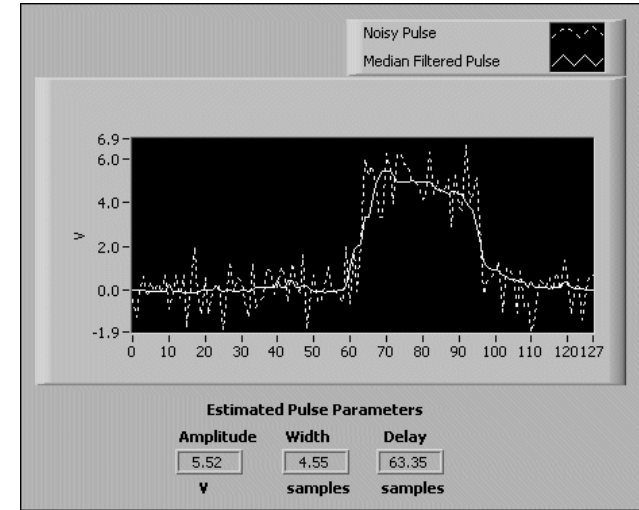
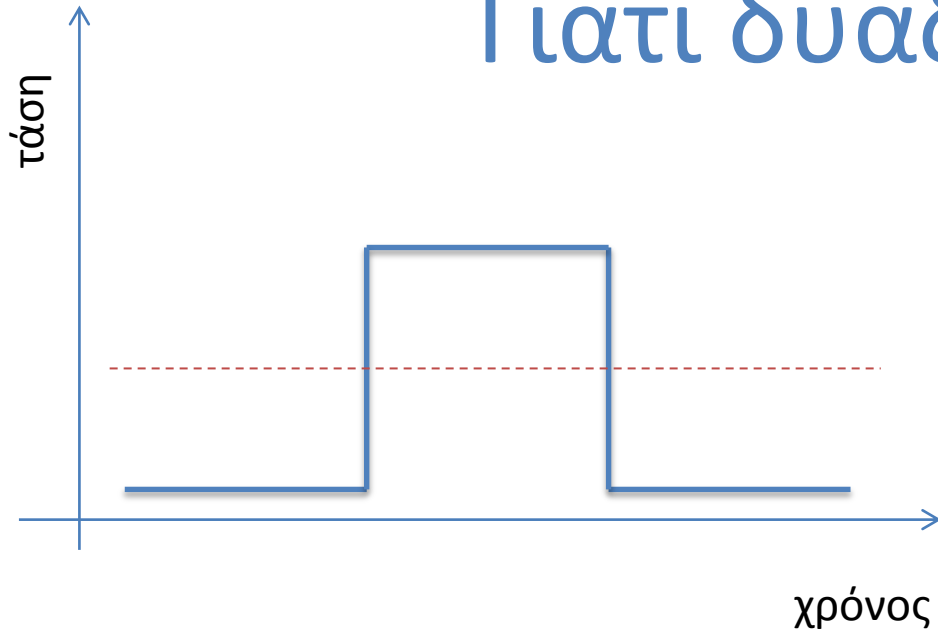
Περιεχόμενα ενότητας

- Γιατί χρησιμοποιούμε δυαδική αναπαράσταση;
- Σχέση δυαδικής αναπαράστασης με τη λογική
- Επεξεργασία με λογικά κυκλώματα

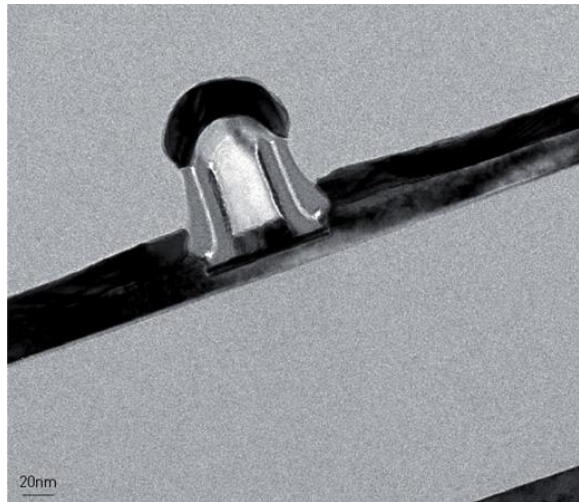
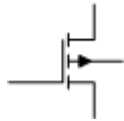
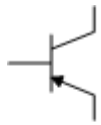


Γιατί δυαδικό;

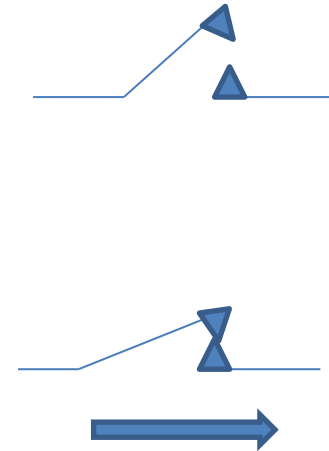
Γιατί δυαδικό;



Απλές και αξιόπιστες συσκευές



TEM cross section of a 25nm FDSOI transistor.

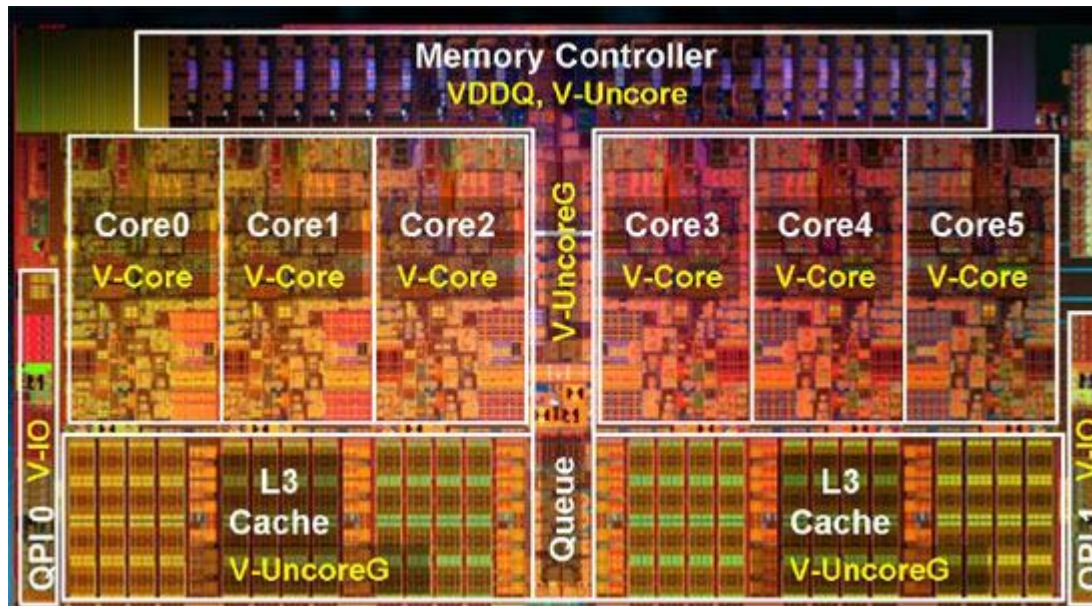


- Μπορούν να βρεθούν σε δύο καταστάσεις:
 - Αγωγή ή μη
 - 0 ή 1
 - On ή off
 - True ή false



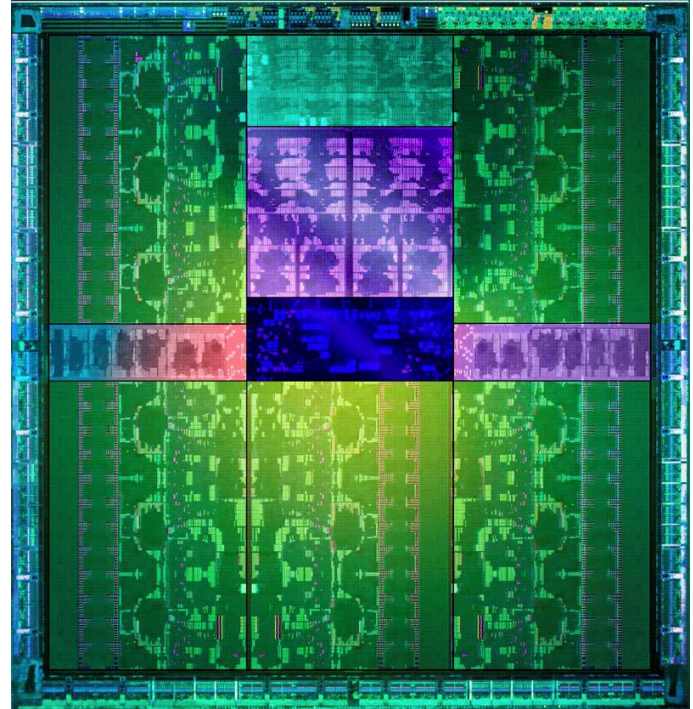
1.17 billion transistors, ~240mm sq.

- Ένα chip 6 επεξεργαστικοί πυρήνες, μνήμες cache:



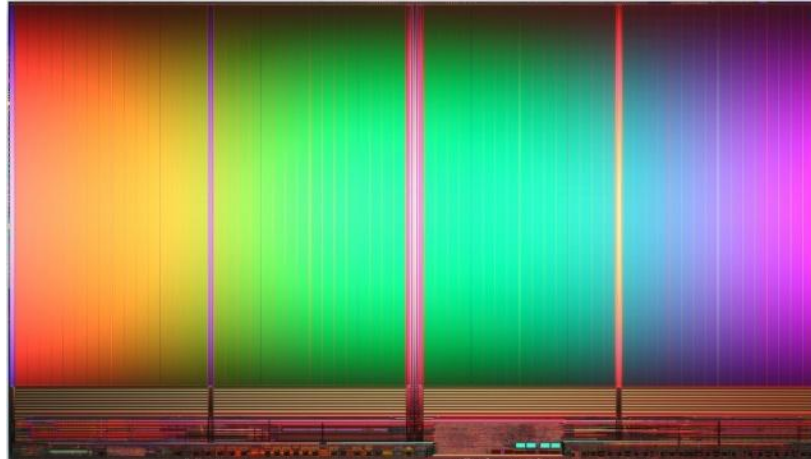
Nvidia GK110 Kepler

- GPU
- 7.1 δισεξ. transistors
- 510mm²
- 28nm
- 2012



Πολυπλοκότητα

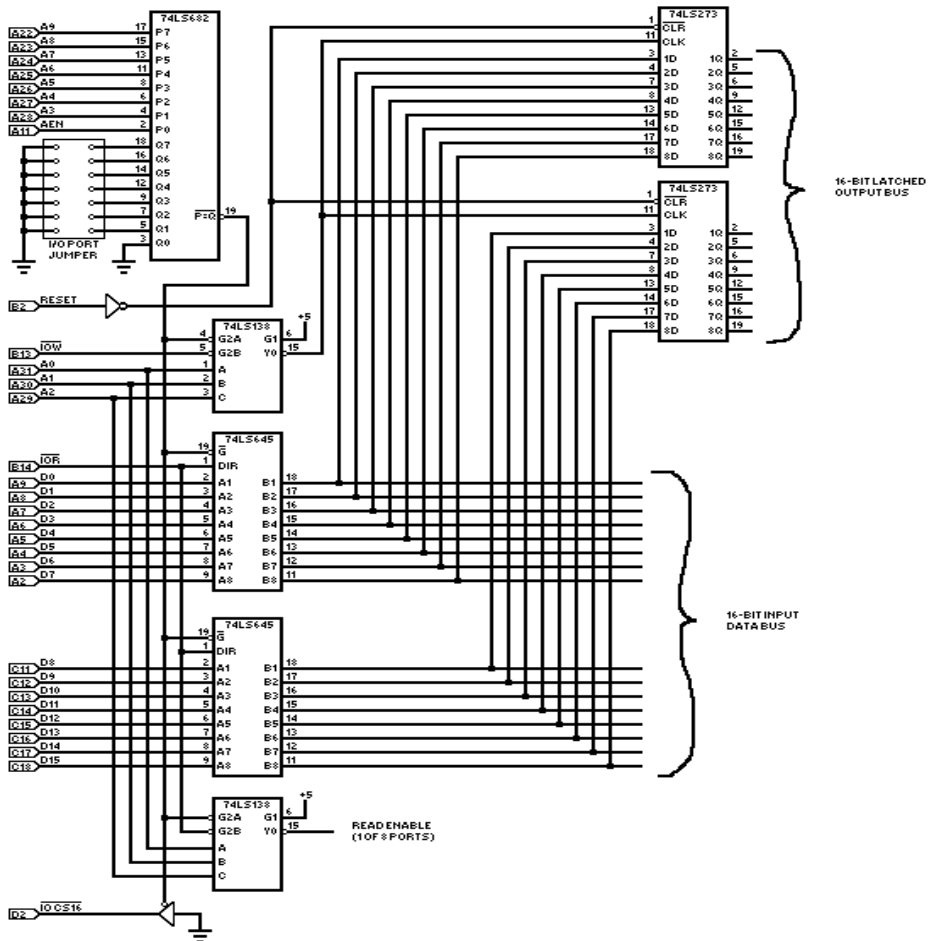
- Αλγόριθμοι για κατασκευή κυκλωμάτων VLSI
- Μέχρι 17,000,000,000 στοιχεία !
 - μνήμες NAND flash, 25nm



- Διαχείριση πολυπλοκότητας
 - Μεγάλες ομάδες μηχανικών, μοιρασμένες σε όλο τον κόσμο.



Οργάνωση δυαδικών ψηφίων σε λέξεις



0 2



n

2^n



Λογικές μεταβλητές και επεξεργασία

Παράδειγμα

```
a = 5
```

```
b = 4
```

```
if a > 4 and b > 4:
```

```
    print 'both conditions are true'
```

```
else:
```

```
    print 'at least one condition is false'
```



Παράδειγμα

```
a = 5
```

```
b = 5
```

```
A = a > 4
```

```
B = b > 3
```

```
Y = A and B
```

```
if Y==True:
```

```
    print 'both conditions A and  
    B are true'
```

```
else:
```

```
    print 'at least one condition  
    is false'
```

```
>>> A = False
```

```
>>> type(A)
```

```
<type 'bool'>
```

```
>>>
```



Παράδειγμα

```
a = 5
```

```
b = 5
```

```
A = a > 4
```

```
B = b > 3
```

```
Y = A and B
```

```
if Y:
```

```
    print 'both conditions A and  
        B are true'
```

```
else:
```

```
    print 'at least one condition  
        is false'
```

```
>>> A = False
```

```
>>> type(A)
```

```
<type 'bool'>
```

```
>>>
```



Παράδειγμα

```
A = True
```

```
B = False
```

```
if A and B :
```

```
    print 'both conditions are true'
```

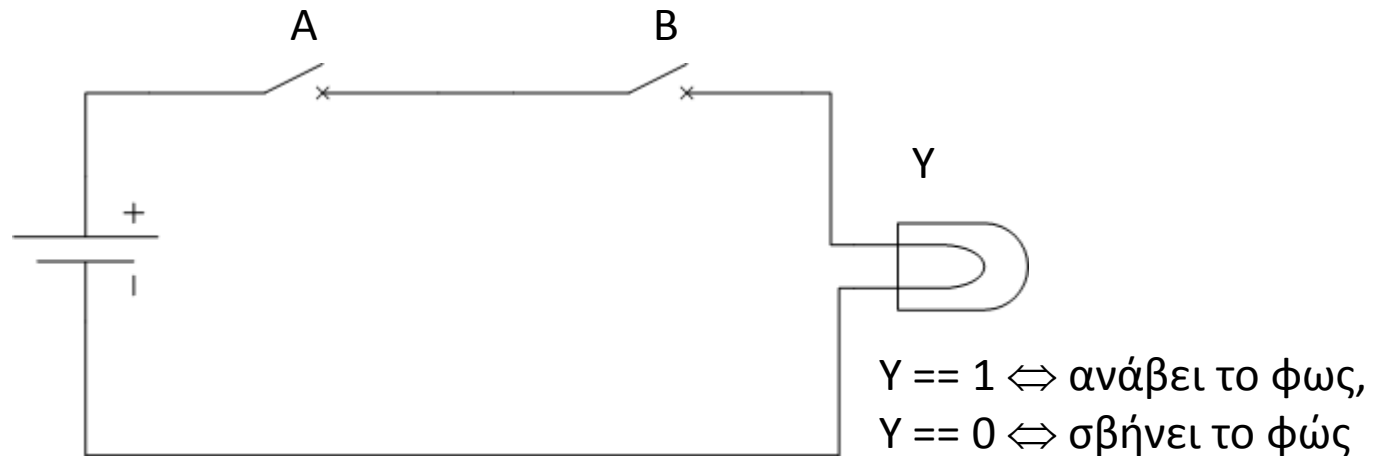
```
else:
```

```
    print 'at least one condition is false'
```



Λογική σύζευξη

Πρόταση A: Ο διακόπτης A είναι κλειστός: ψευδής ή αληθής



Αν $A == 1$ και $B == 1$, κλειστό κύκλωμα \Rightarrow διέρχεται ρεύμα

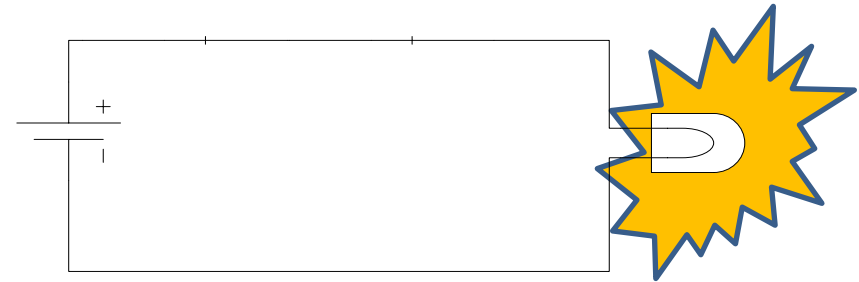
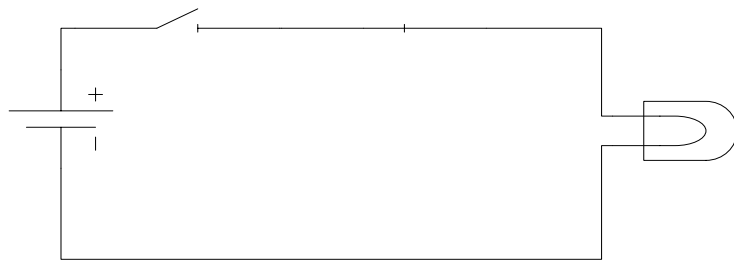
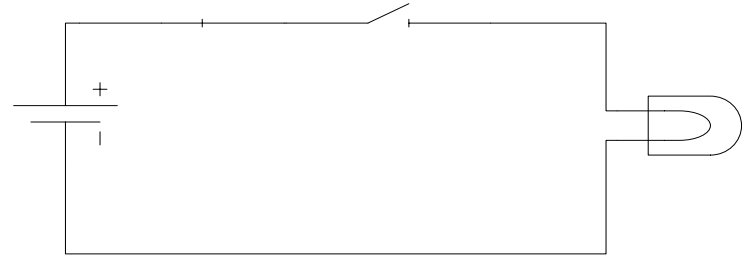
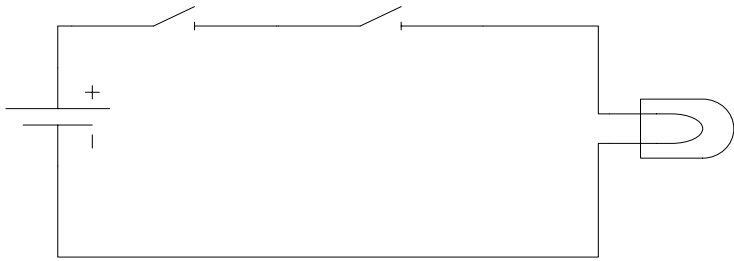
Αν $A == 0$ ή $B == 0$, ανοικτό κύκλωμα \Rightarrow δεν διέρχεται ρεύμα

$$Y = A \cdot B$$

Λογική πράξη ΚΑΙ (AND)



Παράδειγμα



Πίνακας αληθείας λογικής σύζευξης

A	B	Y
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Παράδειγμα

A = True

B = False

Y = A or B

if Y:

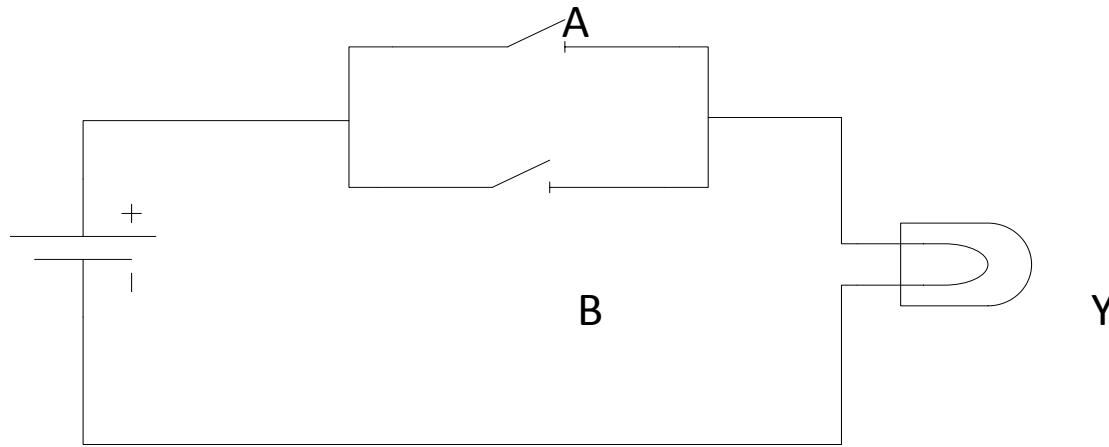
 print 'at least one condition is true'

else:

 print 'both conditions are false'



Λογική διάζευξη



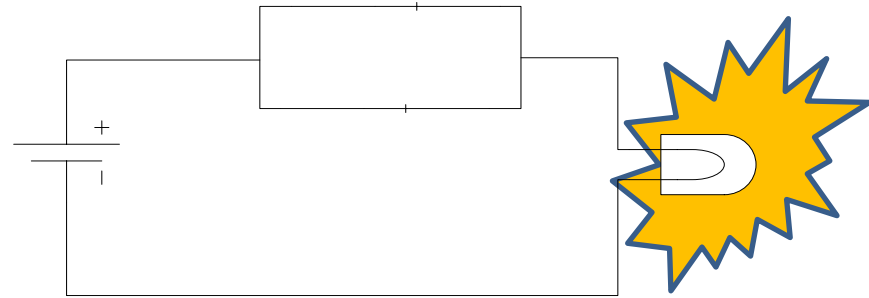
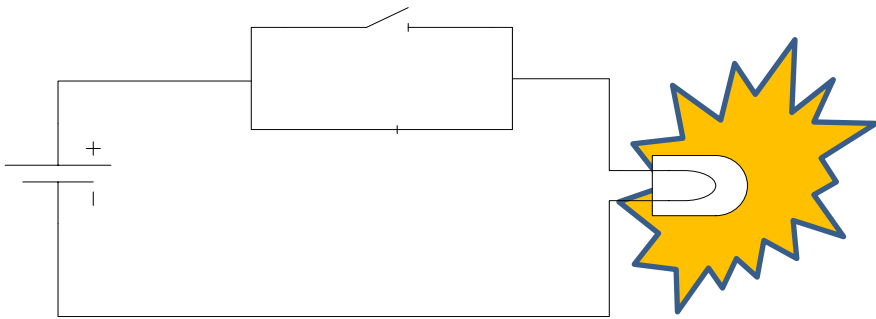
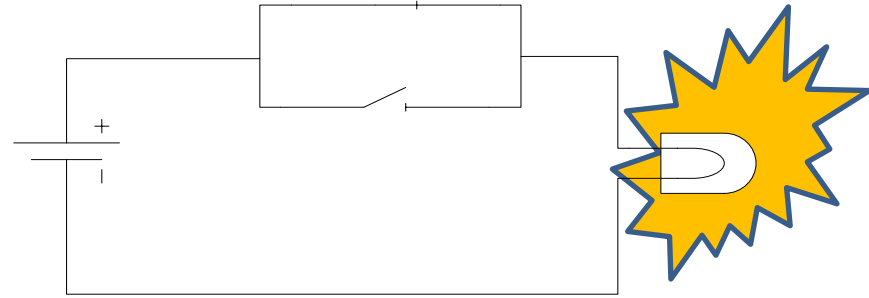
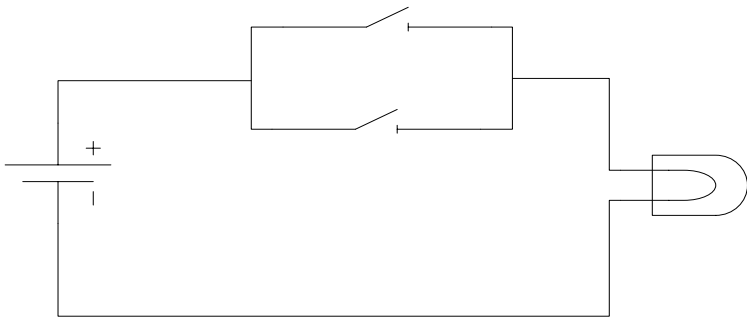
$$Y = A + B$$

$Y=1$, αν και μόνο αν είναι κλειστός τουλάχιστον ένας διακόπτης

Λογική πράξη Η (OR)



Παράδειγμα



Πίνακας αληθείας λογικής διάζευξης

A	B	Y
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

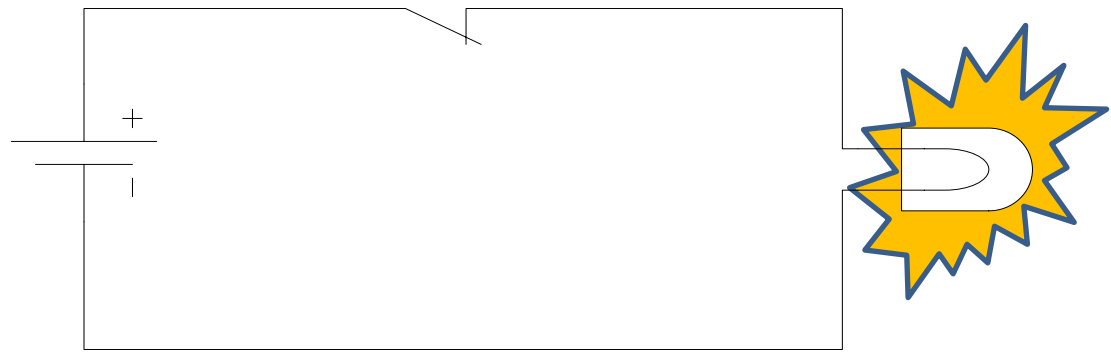
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Αντιστροφή

A	Y
0	1
1	0

$$Y = \text{not } A$$



Παράδειγμα

A = True

B = False

C = True

Y = (A and B) or (C)

if Y:

```
    print 'both A and B are true'
```

```
    print 'or C is true'
```

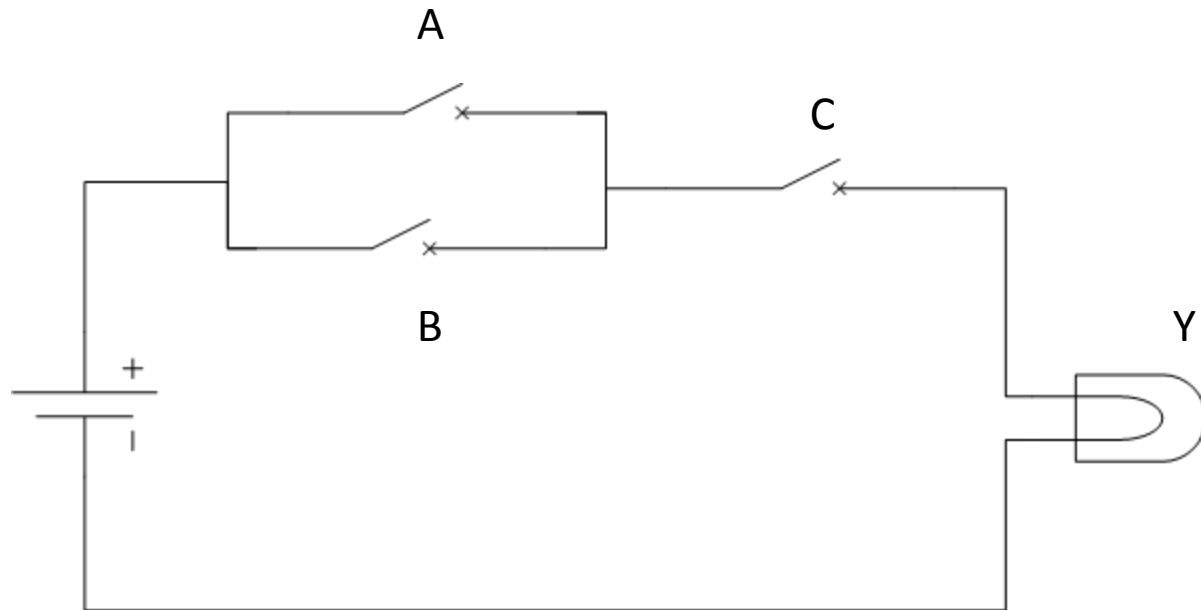
else:

```
    print 'at least one of A, B is false'
```

```
    print 'and C is false'
```



Σύνθετες λογικές εκφράσεις



$$Y = (A+B) \cdot C$$



Βασικές λογικές πράξεις

- $Y = A \text{ and } B$
- $Y = A \text{ or } B$
- $Y = \text{not } (A)$

- Σύνθετες λογικές πράξεις:
 $Y = (A \text{ and } B) \text{ or } (C \text{ and not } (B))$



Άλγεβρα Boole

Προσεταιριστικότητα της +	$x+(y+z) = (x+y)+z$
Προσεταιριστικότητα της ·	$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
Αντιμεταθετικότητα της +	$x+y = y+x$
Αντιμεταθετικότητα της ·	$x\cdot y = y\cdot x$
Επιμεριστικότητα της · ως προς +	$x\cdot (y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$
Ουδέτερο στοιχείο της +	$x + 0 = x$
Ουδέτερο στοιχείο της ·	$x\cdot 1 = x$
Απορροφητικό στοιχείο της ·	$x\cdot 0 = 0$

Λ and σύζευξη · **V or** διάζευξη +



Διαφορετικοί κανόνες

Ταυτοδύναμη πράξη +	$x + x = x$
Ταυτοδύναμη πράξη ·	$x \cdot x = x$
Απορρόφηση 1	$x \cdot (x + y) = x$
Απορρόφηση 2	$x + (x \cdot y) = x$
Επιμερισμός της + επί της ·	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
Ουδέτερο στοιχείο της +	$x + 1 = 1$



Κανόνες με αντιστροφή

Συμπλήρωμα 1	$x \cdot (x)' = 0$
Συμπλήρωμα 2	$x + (x)' = 1$
Διπλή άρνηση	$(x')' = x$
De Morgan 1	$(x') \cdot (y)' = (x+y)'$
De Morgan 2	$(x') + (y)' = (x \cdot y)'$



Απλοποίηση λογικών εκφράσεων

- $$\begin{aligned} Y &= A \cdot B + A \cdot B' \\ &= A \cdot (B + B') \\ &= A \cdot 1 \\ &= A \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Y &= A \cdot B' + B \\ &= A + B \end{aligned}$$



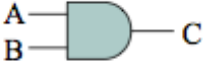

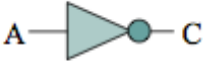
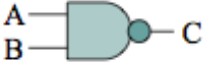
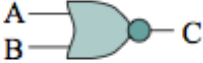

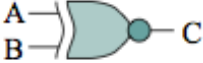
Μέχρι τώρα

- Δυαδική αναπαράσταση
- Λογικές μεταβλητές και λογικές εκφράσεις
- Σχέση δυαδικής αναπαράστασης και λογικής

- Πώς γίνεται η επεξεργασία

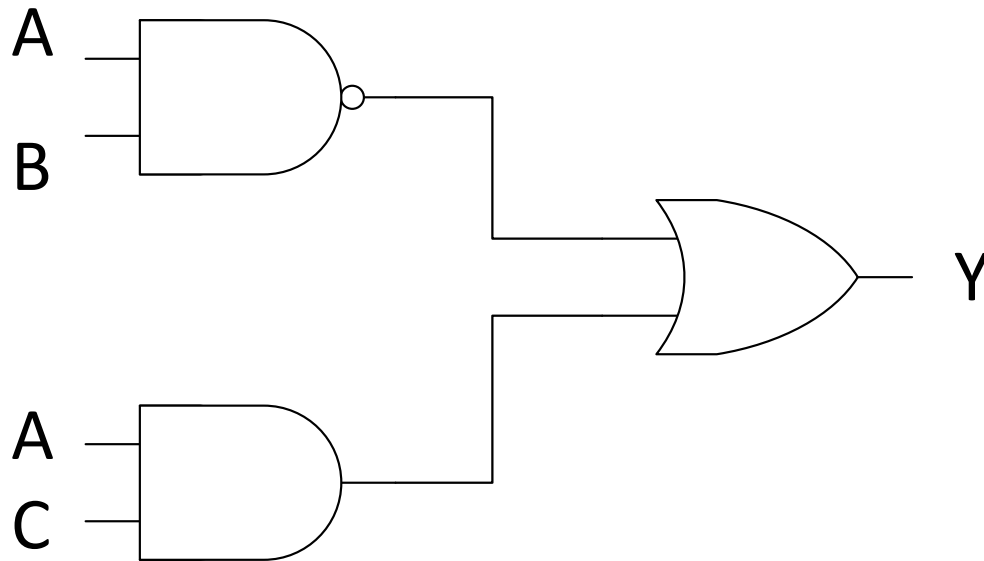


Λογικές Πύλες

Λογική Πύλη	Σύμβολο	Αλγεβρική Πράξη	Πίνακας Αλήθειας															
AND		$C = A \cdot B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	0	0	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	0	0	1														
OR		$C = A + B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	1	1	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	1	1	1														
NOT		$C = A'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	C	1	0									
A	0	1																
C	1	0																
NAND		$C = (AB)'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	1	1	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	1	1	0														
NOR		$C = (A + B)'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	0	0	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	0	0	0														
XOR		$C = A'B + AB'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	1	1	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	1	1	0														
XNOR		$C = A'B' + AB$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	0	0	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	0	0	1														

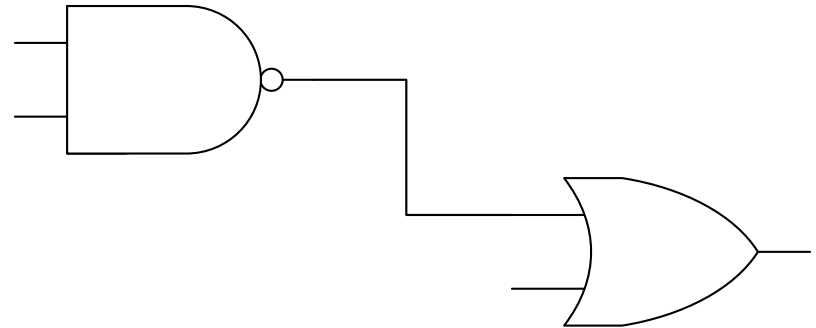
Υλοποιήστε τη συνάρτηση

$$Y = (A B)' + A C$$

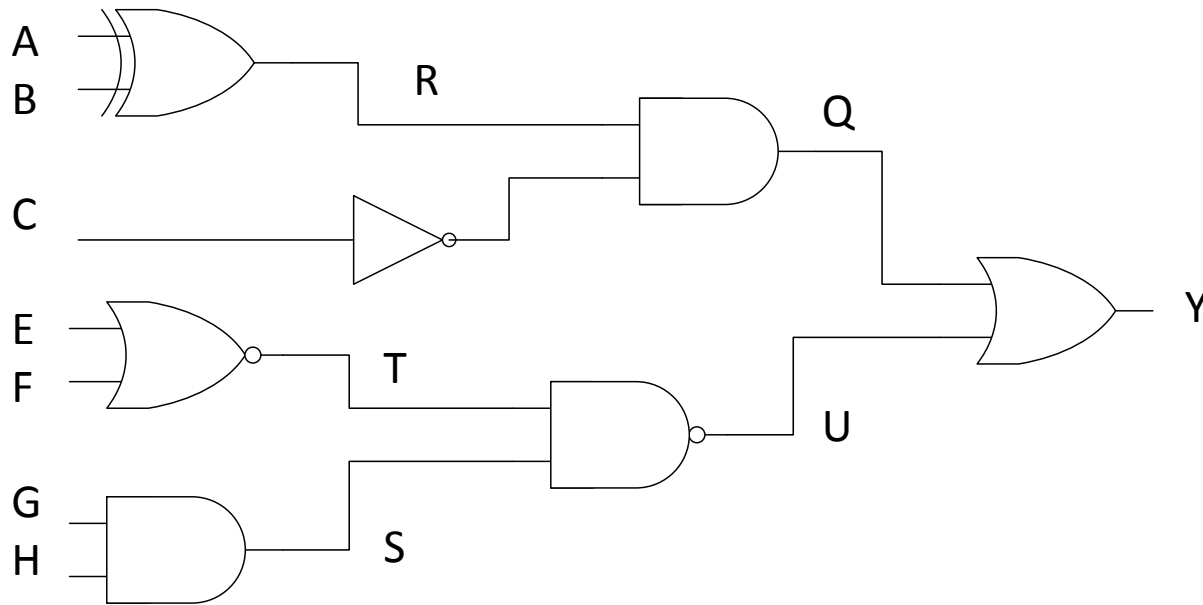


Συνέχεια...

$$\begin{aligned} Y &= (A B)' + A C \\ &= A' + B' + AC \\ &= A' + AC + B' \\ &= A' + C + B' \\ &= A' + B' + C \\ &= (AB)' + C \end{aligned}$$



Ποια λογική συνάρτηση υλοποιείται;



Πώς προσθέτουμε δύο bits;

	1
	1
<hr/>	
1	0

C **S**

	0
	1
<hr/>	
0	1

	0
	0
<hr/>	
0	0

	1
	0
<hr/>	
0	1



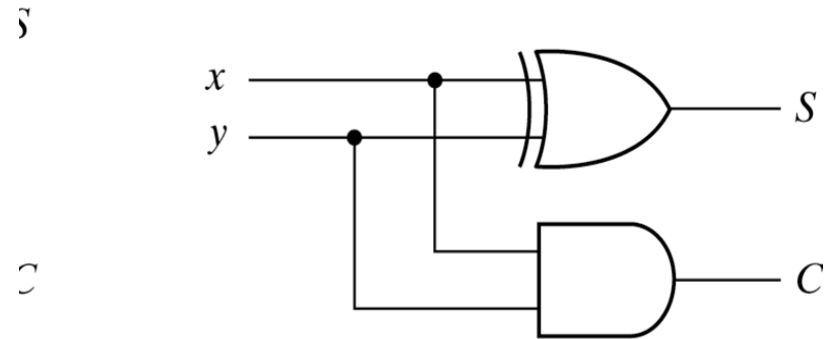
Ημιαθροιστής

- ❖ S (άθροισμα)
- ❖ C (κρατούμενο)

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = x' y + x y'$$

$$C = x y$$



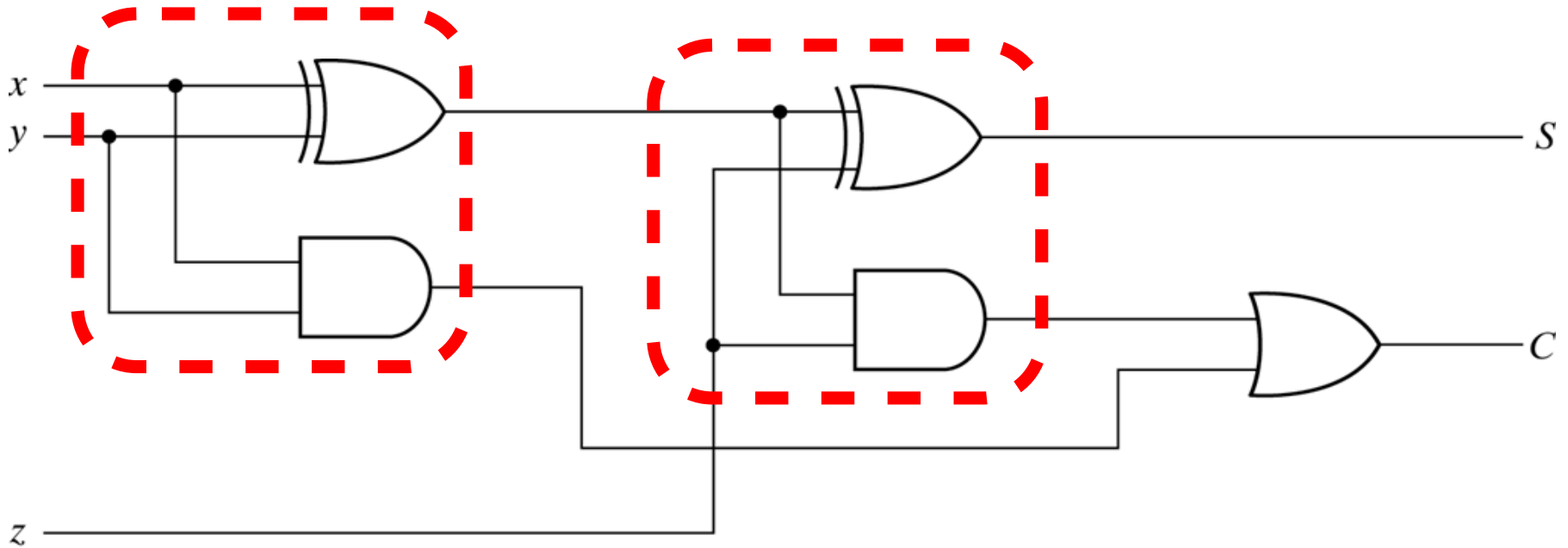
Πρόσθεση Αριθμών χωρίς Πρόσημο

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \\ 0 1 1 1 \\ + 1 0 1 0 \\ \hline 1 0 0 0 1 \end{array}$$

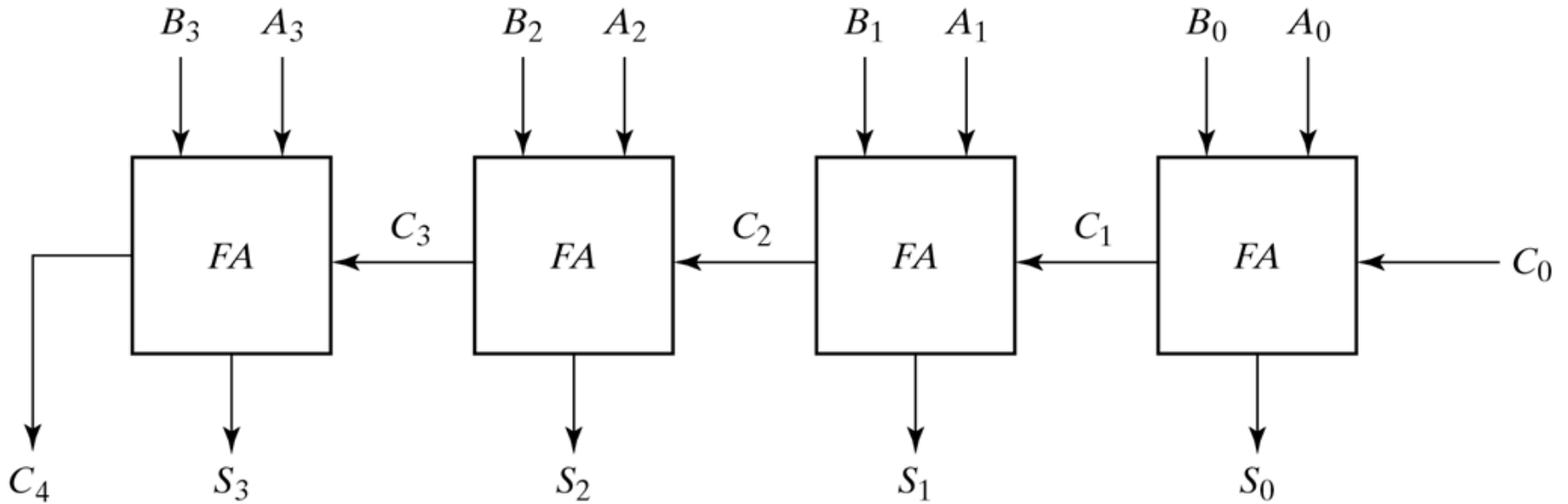
a	b	c_{in}	c_{out}	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Πλήρης Αθροιστής

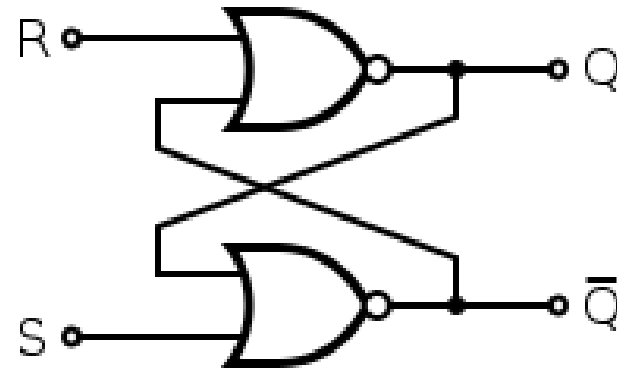


Αθροιστής 4 bit



Μνήμη 1 bit (latch)

A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



R	S	Q	Q'
1	0	0	1
0	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Αβούρης Νικόλαος, Παλιουράς Βασίλειος, Κουκιάς Μιχαήλ, Σγάρμπας Κυριάκος**. «Εισαγωγή στους Υπολογιστές Ι, Ψηφιακή Αριθμητική». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Διαφάνεια 5: εικόνα από LabVIEW,

Διαφάνεια 6: <http://www.advancedsubstratenews.com/wp-content/uploads/2010/11/7asc11.jpg>,

Διαφάνεια 7: <http://techreport.com/r.x/2010q1/westmere-2c-6c.jpg>

Διαφάνεια 9: <http://www.anandtech.com/show/2928>

