Εισαγωγή στους Υπολογιστές

Ενότητα 9: Ψηφιακή Αριθμητική

Βασίλης Παλιουράς

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Ψηφιακή Αριθμητική

Περιεχόμενα ενότητας

- Υπολογισμός συμπληρωμάτων
- Ιδιαίτερες περιπτώσεις προσθέσεων
- Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής
- Μετατροπή σε αριθμό κινητής υποδιαστολής
- Πρόσθεση αριθμών κινητής υποδιαστολής
- Κώδικες

Ψηφιακή Αριθμητική

Στο προηγούμενο μάθημα…

- Τύποι δεδομένων στην python
- Αναπαράσταση ακεραίων και μετατροπές βάσεων
  - Γενικές περιπτώσεις
    - Εφαρμογή κανόνα αθροίσματος γινομένων ψηφίων με αντίστοιχα βάρη
    - Κανόνας πηλίκων
  - Ειδικές περιπτώσεις
    - Ομαδοποιήσεις ψηφίων και εύκολη απεικόνιση

Αναπαραστάσεις Ακεραίων

Δυαδικός Κώδικας	Μέγεθος	Συμπλήρωμα του 2	Συμπλήρωμα του 1	Προσημασμένο Μέγεθος
0111	7	7	7	7
0110	6	6	6	6
0101	5	5	5	5
0100	4	4	4	4
0011	3	3	3	3
0010	2	2	2	2
0001	1	1	1	1
0000	0	0	0	0
1111	15	–1	–0	– 7
1110	14	– 2	– 1	– 6
1101	13	– 3	– 2	– 5
1100	12	– 4	– 3	– 4
1011	11	– 5	– 4	– 3
1010	10	– 6	– 5	– 2
1001	9	– 7	– 6	– 1

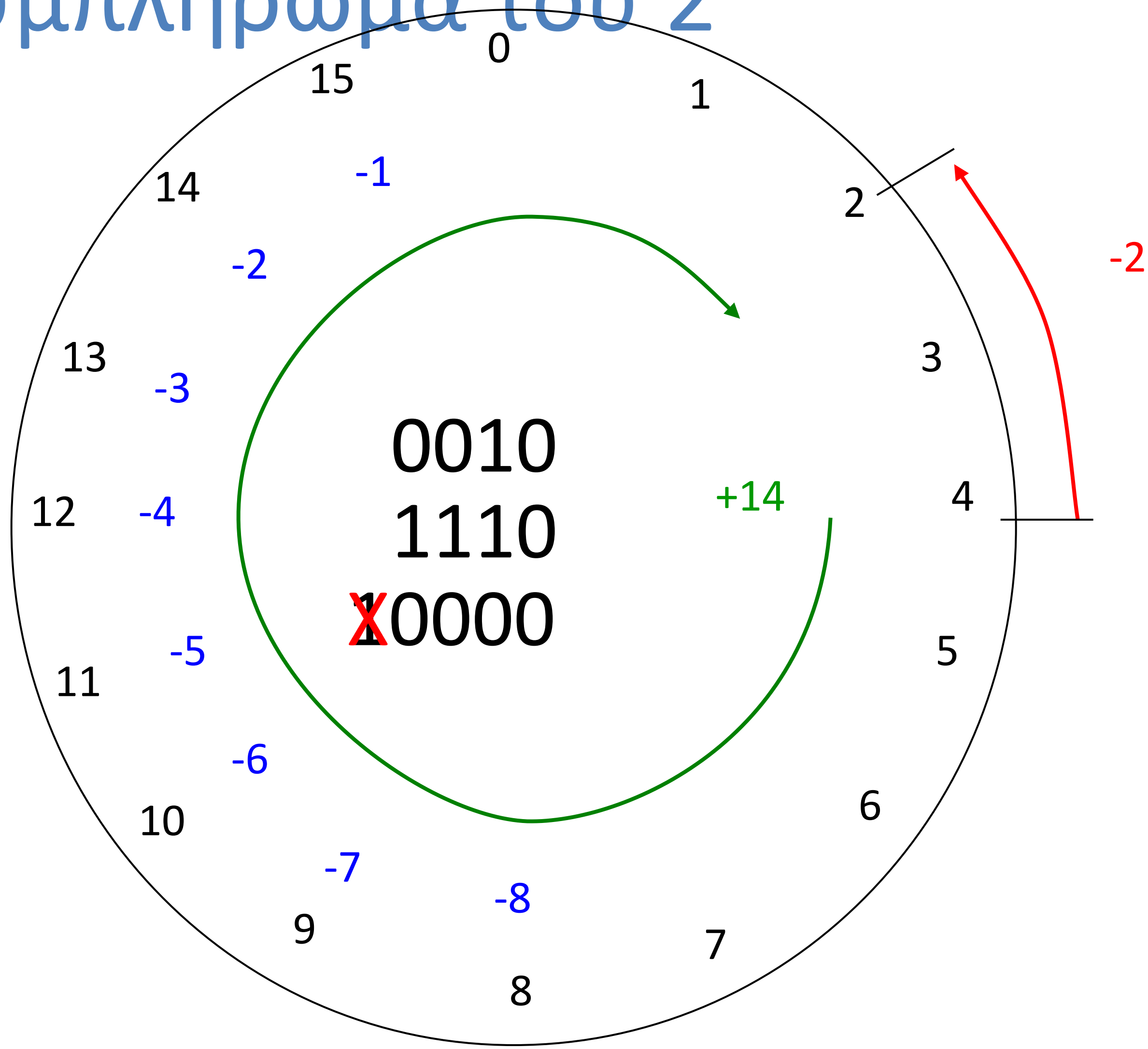
Γραφική Ανάλυση της Αφαίρεσης με Συμπλήρωμα του 2

Οι αρνητικοί αριθμοί αντιστοιχίζονται στους συνδυασμούς 15 έως 8

Η αφαίρεση 4 – 2 = 2 σημαίνει μετακίνηση κατά δύο θέσεις αντίθετα με τη φορά δεικτών του ρολογιού

Το ίδιο αποτέλεσμα έχει η μετακίνηση κατά 14 θέσεις σύμφωνα με τη φορά του ρολογιού.

Η αφαίρεση μετασχηματίζεται σε πρόσθεση mod 16.



Υπολογισμός συμπληρωμάτων

Υπολογισμός Συμπληρώματος: 1ος Τρόπος

- **ΠΡΟΣΟΧΗ**: άλλο *υπολογισμός συμπληρώματος αριθμού* και άλλο *η έκφραση αριθμού σε αναπαράσταση συμπληρώματος*
  - *Υπολογισμός συμπληρώματος αριθμού → Γράφουμε τον αντίθετο του αριθμού*
  - *Αναπαράσταση συμπληρώματος αριθμού → Γράφουμε τον ίδιο αριθμό (ίδια αξία)*
- Εφαρμογή του ορισμού για τιμή του *R* που ενδιαφέρει:

$$\boxed{X \rightarrow \begin{cases} X, & X \geq 0 \\ R - |X|, & X < 0 \end{cases}}$$

Παράδειγμα 1ου Τρόπου

- Να γραφεί σε δυαδική μορφή τεσσάρων ψηφίων και συμπλήρωμα του δύο ο αριθμός $X = -2$.
- $r = 2$ και $n = 4$, άρα $R = r^{n} = 16$
- Άρα το συμπλήρωμα είναι ο αριθμός

  16 - |-2| = 14
- Το 14 σε δυαδική μορφή είναι 1110.
- Άρα η ζητούμενη έκφραση του -2 είναι 1110

Υπολογισμός Συμπληρώματος ως προς βάση *r*: 2ος τρόπος

Δύο βήματα για τον υπολογισμό συμπληρώματος ως προς βάση r :

- κάθε ψηφίο αξίας α *συμπληρώνεται* ως προς $r - 1$, σύμφωνα με τον κανόνα

$$\alpha \rightarrow (r - 1) - \alpha$$

- προστίθεται μια μονάδα στη *λιγότερο σημαντική θέση*.

Παράδειγμα 2ου τρόπου

- Να γραφεί σε δυαδική μορφή τεσσάρων ψηφίων και συμπλήρωμα του δύο ο αριθμός X =-2.
- Γράφουμε το |-2|=2 σε δυαδική μορφή με τέσσερα ψηφία, ως εξής: 0010
- Κάθε ψηφίο συμπληρώνεται ως προς 2-1=1, και λαμβάνουμε: 1101
- Προσθέτουμε μονάδα στη λιγότερο σημαντική θέση, όποτε προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα 1110.

Τρίτος τρόπος

- Ξεκινώντας από το περισσότερο σημαντικό ψηφίο, αντιστρέφουμε μέχρι να συναντήσουμε το ***λιγότερο σημαντικό άσσο***.

Να γραφεί το *−22 σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο*

$$\begin{array}{lcrr} +22 & & 010110 & \\ & + & 101010 & -22 \\ \hline & & \cancel{1}000000 & \end{array}$$

Παραδείγματα 3^{ου} τρόπου

- *Να γραφεί το (−2) σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο*

  2 → 000010 ⇒ 111110 → −2

- *Ποιος αριθμός είναι το 1111010 σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο;*

  1111010 ⇒ 0000110 → 6, άρα 1111010 → −6

- *Ποιος αριθμός είναι το 110101 σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο;*

  110101 ⇒001011 → 11, άρα 110101 → −11

Παράδειγμα θετικού αριθμού

- Να γραφεί το +13 σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο με 6 δυαδικά ψηφία.
- Ο αριθμός είναι **θετικός**.
- Η έκφραση σε αναπαράσταση συμπληρώματος είναι: **001101**

Δυναμική Περιοχή συμπληρώματος ως προς βάση

- Οι αριθμοί με περισσότερο σημαντικό ψηφίο:

  0, είναι θετικοί

  $r – 1$, είναι αρνητικοί

- Συνεπώς:

  Ο περισσότερο θετικός αριθμός είναι ο $r^{n-1} – 1$

  Ο περισσότερο αρνητικός αριθμός είναι ο $–r^{n-1}$

- Άρα η δυναμική περιοχή της αναπαράστασης είναι

  $A_{max} – A_{min} = 2r^{n-1} - 1$

Συμπλήρωμα Βάσης και Μειωμένης Βάσης

- Στους δεκαδικούς αριθμούς
  - το συμπλήρωμα βάσης → συμπλήρωμα του 10
  - το συμπλήρωμα μειωμένης βάσης → συμπλήρωμα του 9
- Στους δυαδικούς αριθμούς
  - Το συμπλήρωμα βάσης → συμπλήρωμα του 2
  - Το συμπλήρωμα μειωμένης βάσης → συμπλήρωμα του 1

Αναπαράσταση συμπληρώματος του 1

- Οι θετικοί αριθμοί μένουν ως έχουν:
  - Ο αριθμός +3: γράφεται με πέντε δυαδικά: 00011
- Για τους αρνητικούς αριθμούς:
  - Γράφουμε την απόλυτη τιμή στο δυαδικό και στη συνέχεια αντιστρέφουμε όλα τα ψηφία.
  - Ο αριθμός -3: γράφεται με πέντε δυαδικά: 11100

Πρόσθεση σε αναπαράσταση συμπληρώματος του 1

	1	0	1	1	-4
+	1	1	0	0	-3
1	0	1	1	1	
+				1	
	1	0	0	0	-7

Όταν τα δεδομένα είναι σε αναπαράσταση συμπληρώματος του 1, το κρατούμενο από την περισσότερο σημαντική θέση (αν προκύψει) αθροίζεται στη λιγότερο σημαντική.

Η πρόσθεση γίνεται σε δύο βήματα.

ΔΙΑΦΕΡΕΙ Από την πρόσθεση σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο!

Ιδιαίτερες περιπτώσεις προσθέσεων

Αλλαγή Μήκους Θετικού Αριθμού σε Συμπλήρωμα του Δύο

- ***Θετικός*** αριθμός $\Leftrightarrow$ το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (ΠΣΨ) είναι ***μηδέν***

  $0100_2 = 4_{10}$

- Τοποθετώντας *μηδενικά* αριστερά του ΠΣΨ, η αξία του αριθμού δεν αλλάζει

  $0000100_2 = 4_{10}$

Αλλαγή Μήκους Αρνητικού Αριθμού σε Συμπλήρωμα του Δύο

- ***Αρνητικός*** αριθμός ⇔ το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (ΠΣΨ) είναι ***ένα***

  $1100_2 = -4_{10}$

- Τοποθετώντας ***μονάδες*** αριστερά του ΠΣΨ, η αξία του αριθμού *<u>δεν αλλάζει</u>*

  $1111100_2 = -4_{10}$

Πρόσθεση Αριθμών σε Συμπλήρωμα του Δύο Διαφορετικού Μήκους Λέξης

Ζητείται η άθροιση των εξής αριθμών σε συμπλήρωμα του δύο:

- α = 1101, μήκους τεσσάρων δυαδικών ψηφίων
- β = 0111010, μήκους επτά δυαδικών ψηφίων

Παρατηρούμε ότι $\alpha < 0$ και $\beta > 0$

Επέκταση Προσήμου (sign extension)

- *Αντιγράφουμε* το περισσότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού σε όσες θέσεις απαιτείται.
  - προς την περισσότερη σημαντική θέση!

					x3	**x2**	**x1**	**x0**
x3	x3	x3	x3	x3	x3	x2	x1	x0

- Η διαδικασία αυτή:
  - αλλάζει το μήκος (πλήθος ψηφίων) του αριθμού αλλά
  - δεν αλλάζει την αξία του αριθμού.

Γιατί ισχύει η επέκταση προσήμου;

$$X = -s2^5 + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0 2^0 \qquad ssssssz_4 z_3 z_2 z_1 z_0$$

$$-s2^{10} + s2^9 + s2^8 + s2^7 + s2^6 + s2^5 + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0$$

$$-s2^{10} + s2^9 + s2^8 + s2^7 + s2^6 + s2^5 + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0 =$$
$$-s2^{10} + s\left(2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5\right) + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0 =$$
$$-s2^{10} + s\left(2^{10} - 2^5\right) + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0 =$$
$$(-s)2^5 + z_4 2^4 + z_3 2^3 + z_2 2^2 + z_1 2^1 + z_0$$

Υπερχείλιση στην πρόσθεση

- ενδιαφέρει μόνο η πρόσθεση ομοσήμων
- έστω δύο αριθμοί σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο

$$\begin{array}{lr} & 0101 \\ + & 0111 \\ \hline & 1100 \end{array}$$

- Προσθέτουμε δύο θετικούς και το αποτέλεσμα ερμηνεύεται ως αρνητικός!
- Αντίστοιχα είναι δυνατό να προσθέσουμε δύο αρνητικούς και το αποτέλεσμα να ερμηνεύεται ως θετικό

Αναπαράσταση Ρητών

Χρησιμοποιούνται δύο αναπαραστάσεις:

- Σταθερής Υποδιαστολής (Fixed-point)
- Κινητής Υποδιαστολής (Floating-point)

Αναπαράσταση Σταθερής Υποδιαστολής

$$A = \sum_{i=-k}^{n-1} a_i r^i, \qquad a_i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$$

το μικρότερο βάρος δεν είναι r^0=1, αλλά r^{-k}

$$A \rightarrow \left\{ \underbrace{a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0}_{\substack{\text{ακέραιο μέρος} \\ \text{(integral part)}}}, \underbrace{a_{-1}, \ldots, a_{-k}}_{\substack{\text{κλασματικό μερος} \\ \text{(fractional part)}}} \right\}$$

Παράδειγμα Αναπαράστασης Σταθερής Υποδιαστολής με Βάση 2

Έστω ο δυαδικός αριθμός 011.101_2 Σε ποιό δεκαδικό αντιστοιχεί;

Βάση 2, τρία ακέραια και τρία κλασματικά ψηφία

$\boxed{r = 2,\ n = 3,\ k = 3}$

$$011.101_2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 3.625_{10}$$

Μετατροπή αριθμού με κλασματικό μέρος σε βάση δύο (1)

- Να γραφεί ο αριθμός 3.1657 σε δυαδική αναπαράσταση χωρίς πρόσημο, χρησιμοποιώντας 2 ακέραια δυαδικά ψηφία και τέσσερα κλασματικά
- Ακέραιο μέρος: $3_{10} = 11_2$ (κατά τα γνωστά)

Κλασματικό μέρος – (2)

- Κλασματικό μέρος:
- 0.1657 × 2 = 0 + 0.3314
- 0.3314 × 2 = 0 + 0.6628
- 0.6628 × 2 = 1 + 0.3256
- 0.3256 × 2 = 0 + 0.6512

- Άρα ο αριθμός με δύο ακέραια και τέσσερα κλασματικά ψηφία γράφεται ως

11.0010

Πρώτο κλασματικό ψηφίο μετά την υποδιαστολή

- Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος με τη βάση.
- Κρατάμε το ακέραιο μέρος του γινομένου ως τιμή του ψηφίου.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία χρησιμοποιώντας το κλασματικό μέρος του γινομένου ως νέο κλασματικό μέρος, μέχρις ότου υπολογίσουμε το ζητούμενο αριθμό κλασματικών ψηφίων.

Τι τιμή έχει ο αριθμός που υπολογίσαμε;

Θέση υποδιαστολής (υπονοούμενη)

Ακέραιο μέρος
χωρίς πρόσημο

Κλασματικό μέρος

2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
1	1	0	0	1	0

$= 3$ $\qquad$ $= 0 + 0 + 1 \times 2^{-3} + 0 = 0.125$

- Αξία που γράφεται με δύο ακέραια και τέσσερα κλασματικά = 3.125
- Αρχική αξία: 3.1657
- Η διαφορά (3.1657 – 3.125) οφείλεται στο περιορισμένο μήκος της λέξης.
- Είναι μικρότερη από 2^{-4}

Προσημασμένοι Αριθμοί Σταθερής Υποδιαστολής

- Χρησιμοποιούνται όλοι οι τρόποι αναπαράστασης αριθμών με πρόσημο:
  - προσημασμένου μεγέθους
  - συμπληρώματος βάσης

Παράδειγμα: Προσημασμένο Μέγεθος Σταθερής Υποδιαστολής

- Ο αριθμός -2.75 με προσημασμένο μέγεθος γράφεται ως
- Το 2.75 γίνεται 10.11_2
- Ένα επιπλέον bit αξίας 1 τοποθετείται ως πρόθεμα για να δηλώσει το αρνητικό πρόσημο.
- 110.11_2

Παράδειγμα: Συμπλήρωμα του δύο Σταθερής Υποδιαστολής

- Να βρεθεί το συμπλήρωμα του 010.110_2

$$
\begin{array}{r}
010.110_2 \\
101.001_2 \\
+000.001_2 \\
\hline
101.010_2
\end{array}
$$

αντιστρέφουμε όλα τα ψηφία

προσθέτουμε μονάδα στη λιγότερο σημαντική θέση

$$
\begin{array}{r}
010.110_2 \\
+101.010_2 \\
\hline
\cancel{1}000.000_2
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι
το άθροισμα αριθμού
και συμπληρώματος είναι 0

Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής

- Ένας αριθμός A απεικονίζεται σε μια τριάδα

1. προσήμου *s*
2. συντελεστή *m*
3. εκθέτη *E*

- σύμφωνα με τον κανόνα

$$\boxed{\begin{aligned} & A \to \{s, m, E\} \\ & A = (-1)^s \times m \times b^{E-127}, \qquad m = 1.f \end{aligned}}$$

- Το πρότυπο IEEE 754
- Παράδειγμα μετατροπής σε αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής
- Πρόσθεση Αριθμών Κινητής Υποδιαστολής

Χαρακτηριστικά Αναπαραστάσεων Κινητής Υποδιαστολής κατά το πρότυπο IEEE 754

Είδος Ακρίβειας (Precision)	Απλή	Διπλή
Μήκος Λέξης	32 bits	64 bits
Συντελεστής + hidden bit	23 + 1 bits	52 + 1 bits
Εκθέτης	8 bits	11 bits
Πόλωση (bias)	127	1023
Προσεγγιστική περιοχή	$2^{128} \approx 3.8 \cdot 10^{38}$	$2^{1024} \approx 9 \cdot 10^{307}$
Μικρότερος αριθμός	$2^{-126} \approx 10^{-38}$	$2^{-1022} \approx 10^{-308}$
Ακρίβεια	$2^{-23} \approx 10^{-7}$	$2^{-52} \approx 10^{-15}$

Ειδικές Περιπτώσεις Αναπαράστασης κατά IEEE 754

- Η τιμή ‘0’ αναπαρίσταται θέτοντας $E=00000000_2=0_{10}$ και τον συντελεστή στο 0, ανεξαρτήτως προσήμου.
- Όταν E=00000000, ο αριθμός καλείται αποκανονικοποιημένος (*denormal*) και ***δεν*** χρησιμοποιείται κρυφή μονάδα στην αναπαράσταση.
  - Αν η αξία του συντελεστή είναι *f*, η αξία του αριθμού είναι $f \times 2^{-126}$
- Όταν $E=11111111_2=255_{10}$ και ο συντελεστής είναι 0, αναπαρίσταται το άπειρο ($\pm\infty$).
- Όταν $E=11111111_2=255_{10}$ και ο συντελεστής δεν είναι 0, αναπαρίσταται η ειδική τιμή NaN (όχι αριθμός), η οποία δηλώνει απροσδιόριστα αποτελέσματα αριθμητικών πράξεων όπως το 0/0.

Παραδείγματα Ειδικών Αναπαραστάσεων στο IEEE 754

- 0 00000000 00000000000000000000000 $\Rightarrow$ αναπαριστά το μηδέν
- 0 00000000 01000000000000000000000

  $\Rightarrow$ E = 00000000 άρα είναι αποκανονικοποιημένος αριθμός.

  Η αξία του είναι $0.01 \times 2^{-126} = 0.25 \times 2^{-126} \approx 2.93 \times 10^{-39}$
- 0 11111111 00000000000000000000000 $\Rightarrow$ αναπαριστά το άπειρο ($\pm\infty$)
- 0 11111111 00000000000000000101010 $\Rightarrow$ είναι NaN

Μετατροπή σε Αριθμό Κινητής Υποδιαστολής IEEE 754 Απλής Ακρίβειας

Αναπαράσταση Κινητής Υποδιαστολής Απλής Ακρίβειας κατά IEEE 754

αξία = $(-1)^{\pi}\,(1+\Sigma)\;2^{E-127}$

Σ: αριθμός με κλασματικό μέρος 23 bits,

και με τιμή $0 \leq \Sigma < 1$.

Ε: ακέραιος αριθμός 1 έως 254.

Οι τιμές Ε = 0 και Ε = 255 έχουν ειδική ερμηνεία.

Παράδειγμα Μετατροπής σε ΙΕΕΕ 754

Να γραφεί ο αριθμός α = – 234.451 σε μορφή ΙΕΕΕ 754 απλής ακρίβειας.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε *πρόσημο*, *συντελεστή* και *εκθέτη*.

Βήμα 1ο Υπολογισμός προσήμου

$\alpha < 0 \Rightarrow$ πρόσημο = 1

Βήμα 2ο: Υπολογισμός Εκθέτη

Ζητείται δύναμη του δύο, *ν*, τέτοια ώστε

$$\boxed{1 \leq \frac{234.451}{2^{\nu}} < 2}$$

Λύνοντας για *ν*

$2^{\nu} \leq 234.451 < 2\, 2^{\nu} \Leftrightarrow 2^{\nu} \leq 234.451 < 2^{\nu+1} \Leftrightarrow$

$\nu \leq \log_2 234.451 < \nu + 1 \Leftrightarrow$

$\nu \leq 7.873025 < \nu + 1 \Leftrightarrow \nu = 7$

Βήμα 3ο: Υπολογισμός Συντελεστή

$$1 + \Sigma = 234.451/2^{7}$$

$$= 234.451/128$$

$$= 1.8316484375$$

$$\Rightarrow \Sigma = \underline{0.832109375}_{10}$$

$$= 0.11010101000001010001111_2$$

Βήμα 3ο: Κωδικοποίηση του ν σε Ε

Ο εκθέτης Ε υπολογίζεται ως

$\nu = \underline{7} = E - \underline{127} \Rightarrow E = 134_{10} = 10000110_{2}$

Αναπαράσταση IEEE 754 απλής ακρίβειας

1	10000110	11010101000001010001111

Πρόσημο Εκθέτης Συντελεστής

Άλλος Τρόπος Μετατροπής σε Μορφή Κινητής Υποδιαστολής

- Από το πρόσημο του αριθμού καθορίζουμε το πρόσημο της αναπαράστασης.
- Γράφουμε τον αριθμό σε δυαδική μορφή.
- Εκτελούμε κατάλληλο αριθμό ολισθήσεων ώστε να φέρουμε τον αριθμό στη μορφή 1.xxxx… (*Κανονικοποίηση*).
- Με βάση τον αριθμό των ολισθήσεων, υπολογίζουμε τον εκθέτη.

Γράφουμε τον Αριθμό σε Δυαδική Μορφή

- $234_{10} = 11101010_2$

- $0.451 \times 2 = 0.902 \Rightarrow 0$
- $0.902 \times 2 = 1.804 \Rightarrow 1$
- $0.804 \times 2 = 1.608 \Rightarrow 1$
- $0.608 \times 2 = 1.216 \Rightarrow 1$
- $0.216 \times 2 = 0.432 \Rightarrow 0$
- $0.432 \times 2 = 0.864 \Rightarrow 0$
- $0.864 \times 2 = 1.728 \Rightarrow 1$
- $0.728 \times 2 = 1.456 \Rightarrow 1$
- $0.456 \times 2 = 0.912 \Rightarrow 0$
- $0.912 \times 2 = 1.824 \Rightarrow 1$
- $0.824 \times 2 = 1.648 \Rightarrow 1$
- $0.648 \times 2 = 1.296 \Rightarrow 1$
- $0.296 \times 2 = 0.592 \Rightarrow 0$
- $0.592 \times 2 = 1.184 \Rightarrow 1$
- $0.184 \times 2 = 0.368 \Rightarrow 0$
- $0.368 \times 2 = 0.736 \Rightarrow 0$
- $0.736 \times 2 = 1.472 \Rightarrow 1$
- $0.472 \times 2 = 0.944 \Rightarrow 0$
- $0.944 \times 2 = 1.888 \Rightarrow 1$
- $0.888 \times 2 = 1.776 \Rightarrow 1$
- $0.776 \times 2 = 1.552 \Rightarrow 1$
- $0.552 \times 2 = 1.104 \Rightarrow 1$
- $0.104 \times 2 = 0.208 \Rightarrow 0$

$\boxed{234.451 = 11101010.01110011011101001011110_2}$

Παραγωγή Αναπαράστασης Κινητής Υποδιαστολής Από την Αρχική Δυαδική

$11101010.01110011011101001011110_2$

$$11101010.01110011011101001011110$$

Η υποδιαστολή μεταφέρεται αμέσως μετά την περισσότερο σημαντική μονάδα. Η διαδικασία αυτή λέγεται *κανονικοποίηση*. Στο παράδειγμα αυτό η υποδιαστολή μεταφέρεται 7 θέσεις δεξιά.

Η μεταφορά της υποδιαστολής επτά θέσεις δεξιά ισοδυναμεί με διαίρεση με 2^7. Για να μην αλλάξει η αξία του αριθμού, πολλαπλασιάζουμε με 2^7.

$$\cancel{1}.\boxed{11010100111001101110100}\cancel{1011110} \times 2^{7}$$

Η μονάδα δεν περιλαμβάνεται στην αναπαράσταση (hidden bit).

συντελεστής

εκθέτης – πόλωση

Τελική Έκφραση σε IEEE 754 Απλής Ακρίβειας

- Πρόσημο: $\pi = 0$ (θετικός αριθμός)
- Εκθέτης: $E - 127 = 7 \Rightarrow E = 134 \Rightarrow$

  $E = 10000110$
- Συντελεστής: $\Sigma = 11010100111001101110100$

0	10000110	11010100111001101110100

Πρόσθεση Αριθμών Κινητής Υποδιαστολής

Παράδειγμα

- Να προστεθούν οι ακόλουθοι αριθμοί IEEE754 απλής ακρίβειας:

π_A E_A Σ_A

A = 0 10000110 01101100000001000000000

π_B E_B Σ_B

B = 0 10001001 11101011011011000000000

Οι αριθμοί A και B είναι θετικοί (π_A=π_B=0).
Δεν έχουν τους ίδιους εκθέτες: $E_B > E_A$ και $E_B - E_A = 3$.
(Θα χρειαστεί αποκανονικοποίηση).

Πρόσθεση Αριθμών Κινητής Υποδιαστολής

Εμφανίζουμε την κρυφή μονάδα.

1.	01101100000010000000000	$\times 2^{7}$
1.	11101011011011000000000	$\times 2^{10}$

Επειδή $E_B > E_A$ και $E_B - E_A = 3$, αποκανονικοποιείται ο αριθμός $1 + \Sigma_A$, μεταφέροντας την υποδιαστολή τρεις θέσεις αριστερά (αποκανονικοποίηση).

0.	00101101100000010000000000	$\times 2^{10}$
1.	11101011011011000000000	$\times 2^{10}$

Για να μην αλλάξει η αξία του A με την αποκανονικοποίηση, ταυτόχρονα ο εκθέτης του A από 7 γίνεται 10, δηλ. ίδιος με τον εκθέτη του B.

Αυτοί οι αριθμοί μπορούν να προστεθούν γιατί νοούνται πολλαπλασιασμένοι με την ίδια δύναμη του δύο!

Άθροιση και Κανονικοποίηση

	0.0010110110000010000000	× 2^{10}
+	1.1110101101101100000000	× 2^{10}
	10.0001100011101101000000	× 2^{10}

Προσθέτοντας τους αριθμούς, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα ***δεν*** είναι της μορφής 1.xxx, άρα χρειάζεται ***κανονικοκοποίηση***.

Η μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα αριστερά διαιρεί το συντε-λεστή με το δύο. Άρα πρέπει να αυξήσουμε τον εκθέτη κατά ένα για να μην αλλάξει η αξία του αποτελέσματος.

~~1.0.0001100011101101000000~~ × 2^{11}

Η υποδιαστολή μεταφέρεται μια θέση προς το περισσότερο σημαντικό ψηφίο.

Ο συντελεστής είναι το αποτέλεσμα της άθροισης, διαγράφοντας την περισσότερο σημαντική μονάδα (***κρυφή μονάδα***).

0	10001010	00001100011101101000000

Το αποτέλεσμα είναι θετικό ως άθροισμα θετικών, άρα το πρόσημο είναι 0.

Ο εκθέτης είναι ο εκθέτης του μεγαλύτερου όρου αυξημένος κατά ένα.

Πολλαπλασιασμός Κινητής Υποδιαστολής

$$X = (-1)^{s_x} m_x b^{E_x - 127}$$

$$Y = (-1)^{s_y} m_y b^{E_y - 127}$$

$$X \cdot Y = (-1)^{s_x} m_x b^{E_x - 127} (-1)^{s_y} m_y b^{E_y - 127}$$

$$= (-1)^{s_x} (-1)^{s_y} m_x m_y b^{E_x + E_y - 127 - 127}$$

$$Z = (-1)^{s_z} m_z b^{E_z - 127} \qquad \begin{cases} m_z = m_x m_y & 1 \le m_x m_y < 2 \\ m_z = \dfrac{m_x m_y}{b} & m_x m_y \ge 2 \\ E_z = E_x + E_y - 127 & 1 \le m_x m_y < 2 \\ E_z = E_x + E_y - 127 + 1 & m_x m_y \ge 2 \end{cases}$$

Αναπαράσταση μη αριθμητικών δεδομένων και κωδικοποίηση

Κώδικες

Κωδικοποίηση δεδομένων

- Η σημασία/αξία μιας ψηφιακής λέξης καθορίζεται από τον κανόνα με βάση τον οποίο κατασκευάστηκε.
  - Αναπαράσταση συμπληρώματος βάσης, μειωμένης βάσης, προσημασμένου μεγέθους…
- Πληθώρα άλλων κωδικοποιήσεων
  - Δεκαδικοί
  - 8421
  - 7421
  - 742-1
  - Excess-3
  - 2-out-of-5
  - Biquinary

Binary Coded Decimals

- Κάθε δεκαδικό ψηφίο παριστάνεται ***ξεχωριστά*** με τέσσερα δυαδικά.
- Παράδειγμα: 89 → 1000 1001
- Παράδειγμα: 0001 0001 → 11
- Όταν κάνουμε πρόσθεση, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη το ενδιάμεσο κρατούμενο.
  - Με ποιο τρόπο;

Excess – 3

- Όπως η κωδικοποίηση BCD, αλλά +3, ανά ψηφίο
- Παράδειγμα: 3 → 0110, 6 → 1001
- Χρήσιμη ιδιότητα:
  - Η κωδικοποιημένη αναπαράσταση συμπληρώματος κάθε ψηφίου ως προς εννέα προκύπτει απλώς αντιστρέφοντας όλα τα ψηφία. Παράδειγμα
    - το συμπλήρωμα του 3 ως προς 9 είναι 6 (= 9 - 3)
    - 0110 → 1001 (αντιστρέφουμε όλα τα ψηφία
    - παρατηρούμε ότι προκύπτει η αναπαράσταση του 6 κατά excess-3
  - αυτό-συμπληρωματικός κώδικας

Παράσταση χαρακτήρων

- Το κείμενο κωδικοποιείται ως σύνολο χαρακτήρων.
- Κάθε χαρακτήρας αντιστοιχίζεται σε χαρακτηριστικό ακέραιο – κωδικό.
- Πολλοί κανόνες κωδικοποίησης:
  - IBM 1401
  - EBCDIC
  - ASCII-8: παράδειγμα: ‘A’ → 65
  - UTF-8

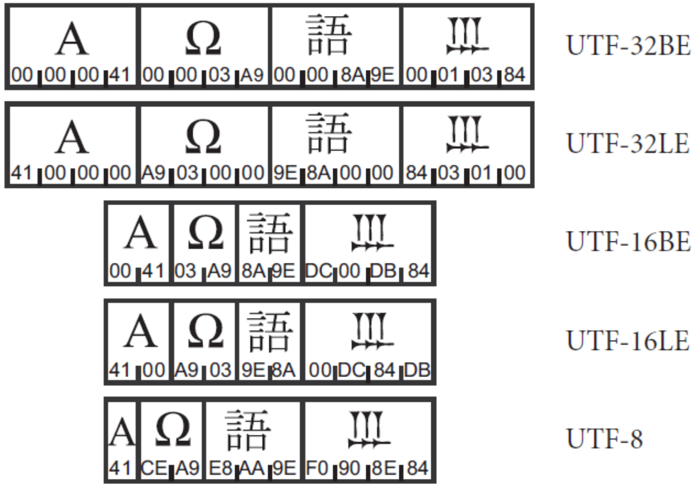
Ο Κώδικας ASCII

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	NUL	DLE	space	0	@	P	`	p
1	SOH	DC1 XON	!	1	A	Q	a	q
2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
3	ETX	DC3 XOFF	#	3	C	S	c	s
4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	SI	US	/	?	O	_	o	del

‘A’ $\rightarrow 41_{16} \rightarrow 4\times16 + 1 = 65_{10}$

Κωδικοποιήσεις UTF

- Χρειαζόμαστε μεγαλύτερα σύνολα χαρακτήρων
- UTF-8:
  - Κωδικοποίηση μεταβλητού μήκους
  - Περιλαμβάνει τους χαρακτήρες 128 ASCII ως έχουν
  - Δίνει >1,000,000



Κώδικες για τη διόρθωση λαθών: Κίνητρο

- Κατά τη μετάδοση ή την αποθήκευση μιας ψηφιακής λέξης είναι δυνατόν να προκύψουν ***σφάλματα***, δηλ. να αλλάξουν οι τιμές κάποιων δυαδικών ψηφίων της λέξης
  - χωρίς να το θέλουμε.
- Χρησιμοποιώντας κώδικες εντοπισμού και διόρθωσης σφαλμάτων:
  - βρίσκουμε αν υπάρχουν και ποια είναι τα ψηφία τα οποία είναι λάθος σε προστατευμένη λέξη

Κώδικες ισοτιμίας

- Σε ομάδα ψηφίων επισυνάπτουμε επιπλέον ψηφίο με τιμή τέτοια ώστε το πλήθος των ΄1΄ στη συνολική λέξη να είναι άρτιος (*άρτια ισοτιμία*) ή περιττός (*περιττή ισοτιμία*).
- Παράδειγμα: Για άρτιο πλήθος ‘1’

Ψηφίο ισοτιμίας

101001	100001
1010011	1000010
‘1’ ώστε το πλήθος των ‘1’ να γίνει τέσσερα	‘0’ ώστε το πλήθος των ‘1’ να γίνει δύο

Πώς δουλεύει;

- Έστω η λέξη 1010011 του παραδείγματος.
- Κατασκευάστηκε ώστε να έχει άρτιο πλήθος ‘1’
- Έστω από σφάλμα (αποθήκευσης, μετάδοσης) αλλάζει τιμή ένα ψηφίο: 1110011
- Το σύνολο των ‘1’ στη νέα λέξη είναι πέντε, ***περιττός***. Άρα καταλαβαίνουμε ότι έχει συμβεί λάθος.
- Ποιος είναι ο περιορισμός;
  - τι θα συμβεί αν αλλάξουν *δύο* ψηφία;

Κωδικοποίηση

- Πηγαία λέξη:

  8 ψηφία δεδομένων $m_0m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7$
- Κώδικας Hamming:

  4 ψηφία ισοτιμίας $p_0p_1p_2p_3$
- Κατασκευή κωδικής λέξης 12 ψηφίων
- Η ισοτιμία μπορεί να είναι *άρτια* ή *περιττή*

Κατασκευή Κωδικής Λέξης

2^0	0 0 0 1	1	p_0
2^1	0 0 1 0	2	p_1
	0 0 1 1	3	m_0
2^2	0 1 0 0	4	p_2
	0 1 0 1	5	m_1
	0 1 1 0	6	m_2
	0 1 1 1	7	m_3
2^3	1 0 0 0	8	p_3
	1 0 0 1	9	m_4
	1 0 1 0	10	m_5
	1 0 1 1	11	m_6
	1 1 0 0	12	m_7

Οργάνωση Ομάδων

p_0	m_0	m_1	m_3	m_4	m_6
p_1	m_0	m_2	m_3	m_5	m_6
p_2	m_1	m_2	m_3	m_7	
p_3	m_4	m_5	m_6	m_7	

Υπολογισμός Τιμών των Ψηφίων Ισοτιμίας

$m_0 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 m_7$
0 1 0 1 0 1 0 1

έστω <u>**άρτια**</u> ισοτιμία

Αντικαθιστούμε τις τιμές των ψηφίων της πηγαίας λέξης στις ομάδες που σχηματίστηκαν νωρίτερα

p_0 m_0 0 m_1 1 m_3 1 m_4 0 m_6 0 $\Rightarrow p_0 = 0$

p_1 m_0 0 m_2 0 m_3 1 m_5 1 m_6 0 $\Rightarrow p_1 = 0$

p_2 m_1 1 m_2 0 m_3 1 m_7 1 $\Rightarrow p_2 = 1$

p_3 m_4 0 m_5 1 m_6 0 m_7 1 $\Rightarrow p_3 = 0$

$p_0 p_1 m_0 p_2 m_1 m_2 m_3 p_3 m_4 m_5 m_6 m_7$
0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1

Άρτια ισοτιμία: σε κάθε ομάδα των πλήθος των ψηφίων τα οποία έχουν αξία μονάδα είναι άρτιος.

Περιττή ισοτιμία: σε κάθε ομάδα των πλήθος των ψηφίων τα οποία έχουν αξία μονάδα είναι περιττή.

Το ψηφίο ισοτιμίας περιλαμβάνεται στα ψηφία της ομάδας!

Εντοπισμός Σφάλματος

Κάθε ψηφίο της κωδικής λέξης προστατεύεται από μοναδικό συνδυασμό ψηφίων ισοτιμίας.

0001	1	p_0
0010	2	p_1
0011	3	m_0
0100	4	p_2
0101	5	m_1
0110	6	m_2
0111	7	m_3
1000	8	p_3
1001	9	m_4
1010	10	m_5
1011	11	m_6
1100	12	m_7

Το ψηφίο m_2 είναι το ***μόνο*** που προστατεύεται από τα ψηφία ισοτιμίας p_1 και p_2 μόνο.

έστω ότι προκύπτει σφάλμα στο ψηφίο m_2

Απλός έλεγχος ισοτιμίας θα δείξει παραβίαση των p_1 και p_2 ***μόνο***, άρα το σφάλμα θα έχει πρόκυψει στο m_2

Παράδειγμα Εντοπισμού και Διόρθωσης Σφάλματος

Έστω λαμβάνουμε
τη λέξη (άρτιας ισοτιμίας)

$p_0 p_1 m_0 p_2 m_1 m_2 m_3 p_3 m_4 m_5 m_6 m_7$
0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1

p_0 m_0 m_1 m_3 m_4 m_6
0 0 1 1 0 0 → άρτιος αριθμός μονάδων → σωστό

p_1 m_0 m_2 m_3 m_5 m_6
0 0 1 1 1 0 → περιττός αριθμός μονάδων → λάθος

p_2 m_1 m_2 m_3 m_7
1 1 1 1 1 → περιττός αριθμός μονάδων → λάθος

p_3 m_4 m_5 m_6 m_7
0 0 1 0 1 → άρτιος αριθμός μονάδων → σωστό

αντικατάσταση τιμών ψηφίων στις ομάδες

έλεγχος ισοτιμίας

Το **<u>μόνο</u>** δυαδικό ψηφίο που ανήκει **<u>μόνο</u>** στις ομάδες που προστατεύονται από τα p_1 και p_2 είναι το m_2 ⇒ η τιμή του m_2 είναι λάθος

διορθωμένη λέξη

$p_0 p_1 m_0 p_2 m_1 m_2 m_3 p_3 m_4 m_5 m_6 m_7$
0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αβούρης Νικόλαος, Παλιουράς Βασίλειος, Κουκιάς Μιχαήλ, Σγάρμπας Κυριάκος. «Εισαγωγή στους Υπολογιστές Ι, Ψηφιακή Αριθμητική». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες