



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας

Ενότητα 29: Αλγόριθμος Grover

Σγάρμπας Κυριάκος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

Αλγόριθμος Grover



Περιεχόμενα ενότητας

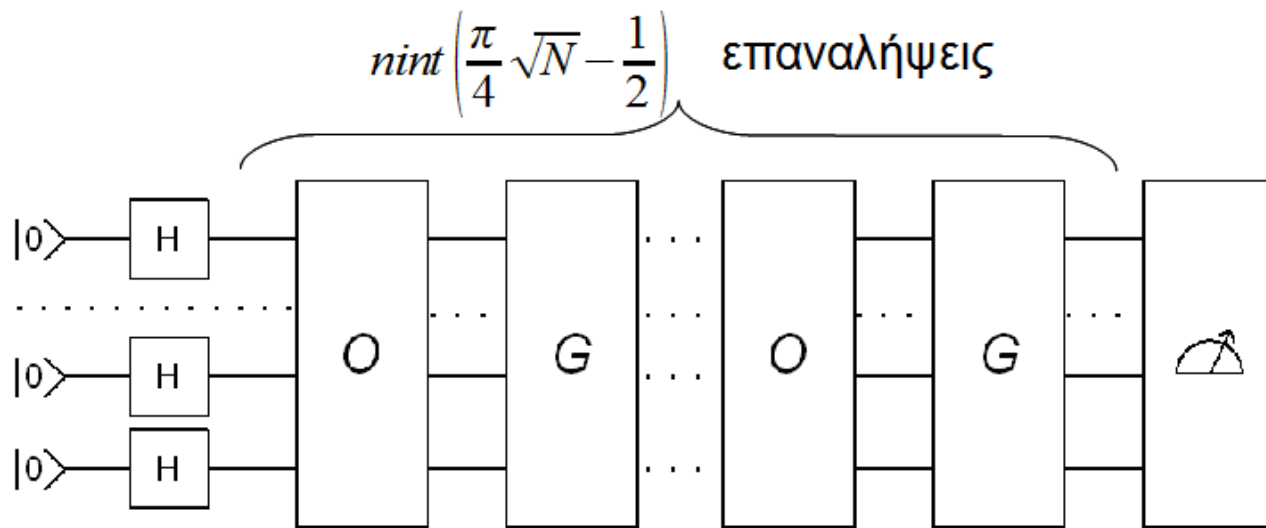
- Αλγόριθμος Grover
- Παράδειγμα
- Πως λειτουργεί;



Αλγόριθμος Grover

Αλγόριθμος Grover (1996)

Εντοπίζει στοιχεία σε μη ταξινομημένες δομές δεδομένων με πολυπλοκότητα $O(\sqrt{N})$



$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k\rangle$$

$$O = I - 2|x_a\rangle\langle x_a|$$

$$G = 2|s\rangle\langle s| - I$$



L.K.Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computation, pp.212-219, New York, 1996.

Παράδειγμα

Δίνεται μια μη δομημένη βάση δεδομένων με 8 στοιχεία. Να εφαρμόσετε τον κβαντικό αλγόριθμο του Grover, για να βρείτε το στοιχείο που αντιστοιχεί στην κβαντική κατάσταση

$$|x_i\rangle = |101\rangle$$

Ι. Καραφυλλίδης “Κβαντικοί Υπολογιστές – Βασικές Έννοιες”, Κλειδάριθμος, 2005 (Άσκηση 5.2, σελ.129)



Αρχική κατάσταση: $|000\rangle$

Κατάσταση στόχος: $|101\rangle$

$N = 8$

$$|s\rangle = (H \otimes H \otimes H)|000\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$O = I - 2|101\rangle\langle 101| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = 2|s\rangle\langle s| - I = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$GO = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Επαναλήψεις:

$$\text{rint} \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{8} - \frac{1}{2} \right) = \text{rint} (1.72) = 2$$



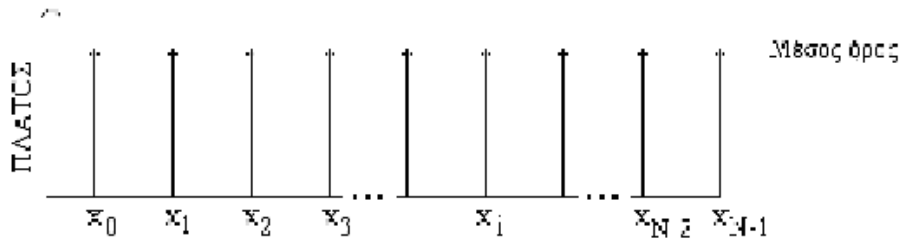
$$|s_1\rangle = GO|s\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 78\%$$

$$|s_2\rangle = GO|s_1\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 22 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 11 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 95\%$$

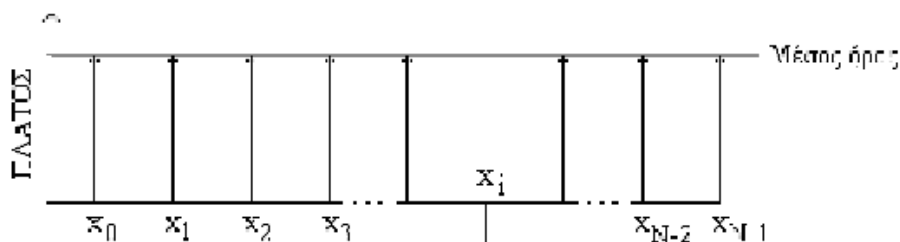
$$|s_3\rangle = GO|s_2\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 11 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -14 \\ -14 \\ -14 \\ -14 \\ -14 \\ 26 \\ -14 \\ -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \\ -7 \\ -7 \\ 13 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix} \quad 33\%$$



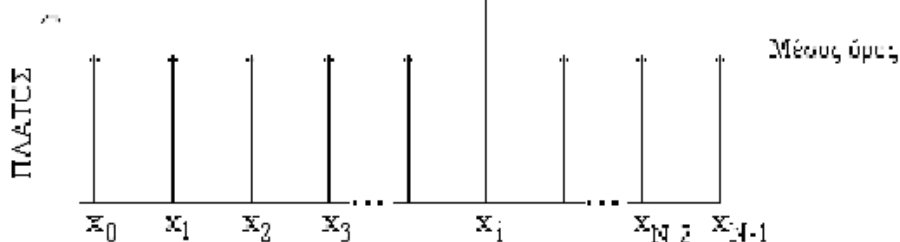
Πώς Λειτουργεί: Ενίσχυση Πιθανότητας



Αρχική κατάσταση
καταχωρητή



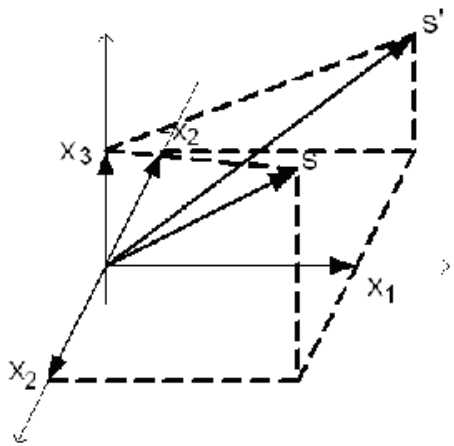
Μετά την επίδραση
του O (αλλαγή προσήμου
στο x_i)



Μετά την επίδραση
του G (περιστροφή όλων
γύρω από τον μέσο όρο)



Πώς Λειτουργεί: Περιστροφή Διανύσματος Κατάστασης



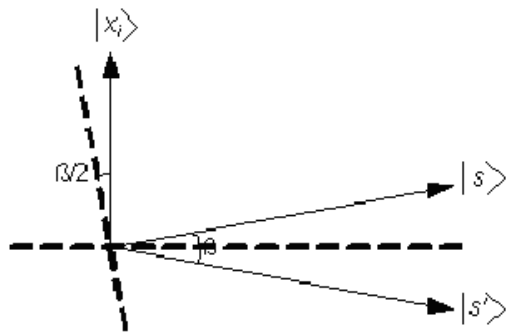
$$|s\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle$$

$$|s'\rangle = |x_1\rangle - |x_2\rangle + |x_3\rangle$$

Αλλαγή προσήμου σε μια συνιστώσα δημιουργεί διάνυσμα κατοπτρικό ως προς το επίπεδο που δημιουργούν οι άλλες.

Κάθε εφαρμογή του τελεστή σ αντικατοπτρίζει την κατάσταση του καταχωρητή ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Η γωνία β μεταξύ των διανυσμάτων s και s' υπολογίζεται ως:

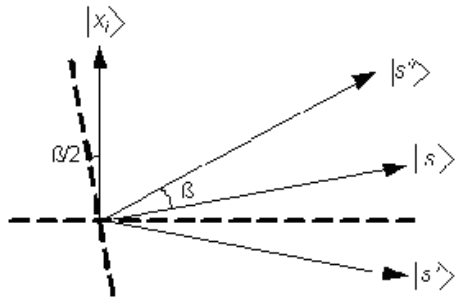


$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} (\langle x_0|x_0\rangle + \langle x_1|x_1\rangle - \langle x_2|x_2\rangle + \langle x_3|x_3\rangle + \dots + \langle x_{N-1}|x_{N-1}\rangle)$$

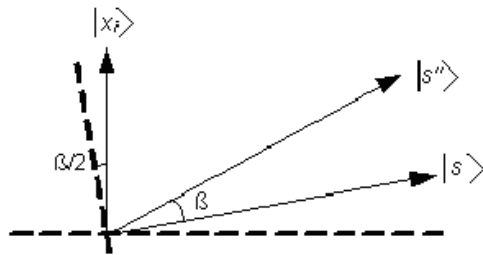
$$\cos \beta = \frac{\langle s|s'\rangle}{|s| \cdot |s'|} = \frac{(N-2)/N}{1 \cdot 1} = \frac{N-2}{N}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{N-2}{N}\right)$$





Κάθε εφαρμογή του τελεστή G αντικατοπτρίζει την κατάσταση του καταχωρητή ως προς το αρχικό διάνυσμα s.



Σε κάθε επανάληψη G O του αλγορίθμου, το διάνυσμα s περιστρέφεται προς το x_i κατά γωνία β .

Η γωνία θ που πρέπει να καλυφθεί είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (0\langle x_0|x_0\rangle + 0\langle x_1|x_1\rangle + 1\langle x_2|x_2\rangle + 0\langle x_3|x_3\rangle + \dots + 0\langle x_{N-1}|x_{N-1}\rangle)$$

$$\cos \theta = \frac{\langle x_i | s \rangle}{|x_i| \cdot |s|} = \frac{1/\sqrt{N}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

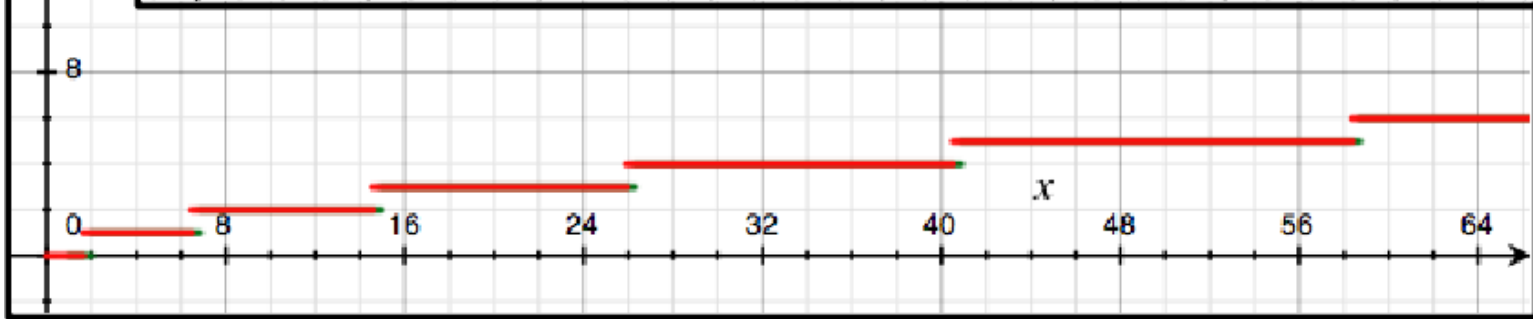
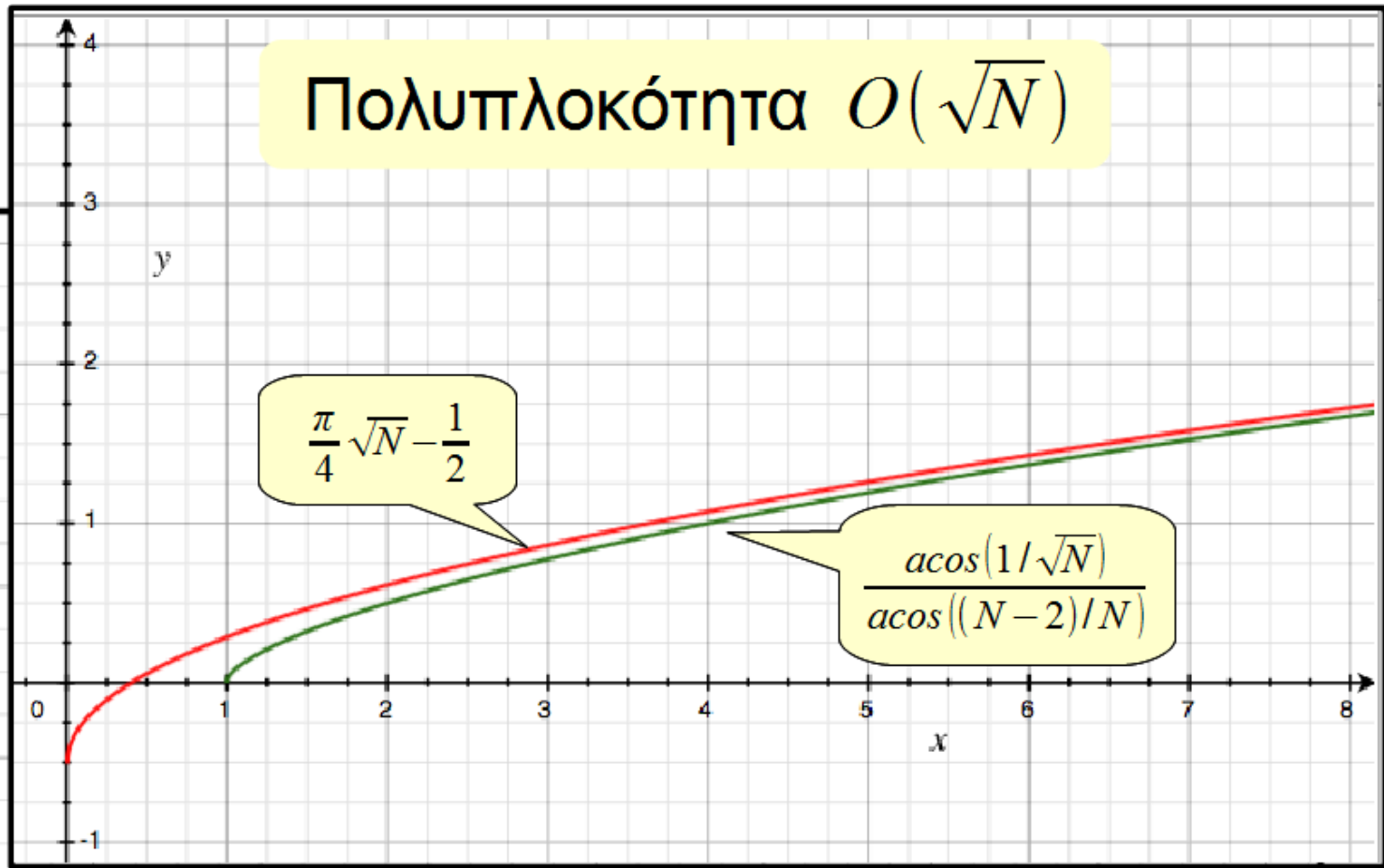
$$\theta = \text{acos} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

και το πλήθος των βημάτων υπολογίζεται ως:

$$\text{nint} \left(\frac{\theta}{\beta} \right) = \text{nint} \left(\frac{\text{acos}(1/\sqrt{N})}{\text{acos}((N-2)/N)} \right) \approx \dots \approx \text{nint} \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{N} - \frac{1}{2} \right)$$



Πολυπλοκότητα $O(\sqrt{N})$



Αριθμητικά Αποτελέσματα

```
import numpy as np
```

```
I=np.identity(8)
```

```
I[5,5]=-1
```

```
O=I[:]
```

```
# (O = Oracle)
```

```
G=np.ones_like(I)
```

```
for i in [0,1,2,3,4,5,6,7]:
```

```
    G[i,i]=-3
```

```
G=G^4
```

```
# (G = Grover's operator)
```

```
initarr=np.ones(8)
```

```
initarr=initarr/(8.**0.5)
```

```
# (initarr = |s>)
```

```
s=initarr
```

```
GO=np.dot(G,O)
```

```
for step in range(1,31):
```

```
    s=np.dot(GO,s)
```

```
    print "STEP=",step,
```

```
    print "P(item)=",s[5]**2,
```

```
    print "P(other)=",s[0]**2
```

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \approx 69.3^\circ$$

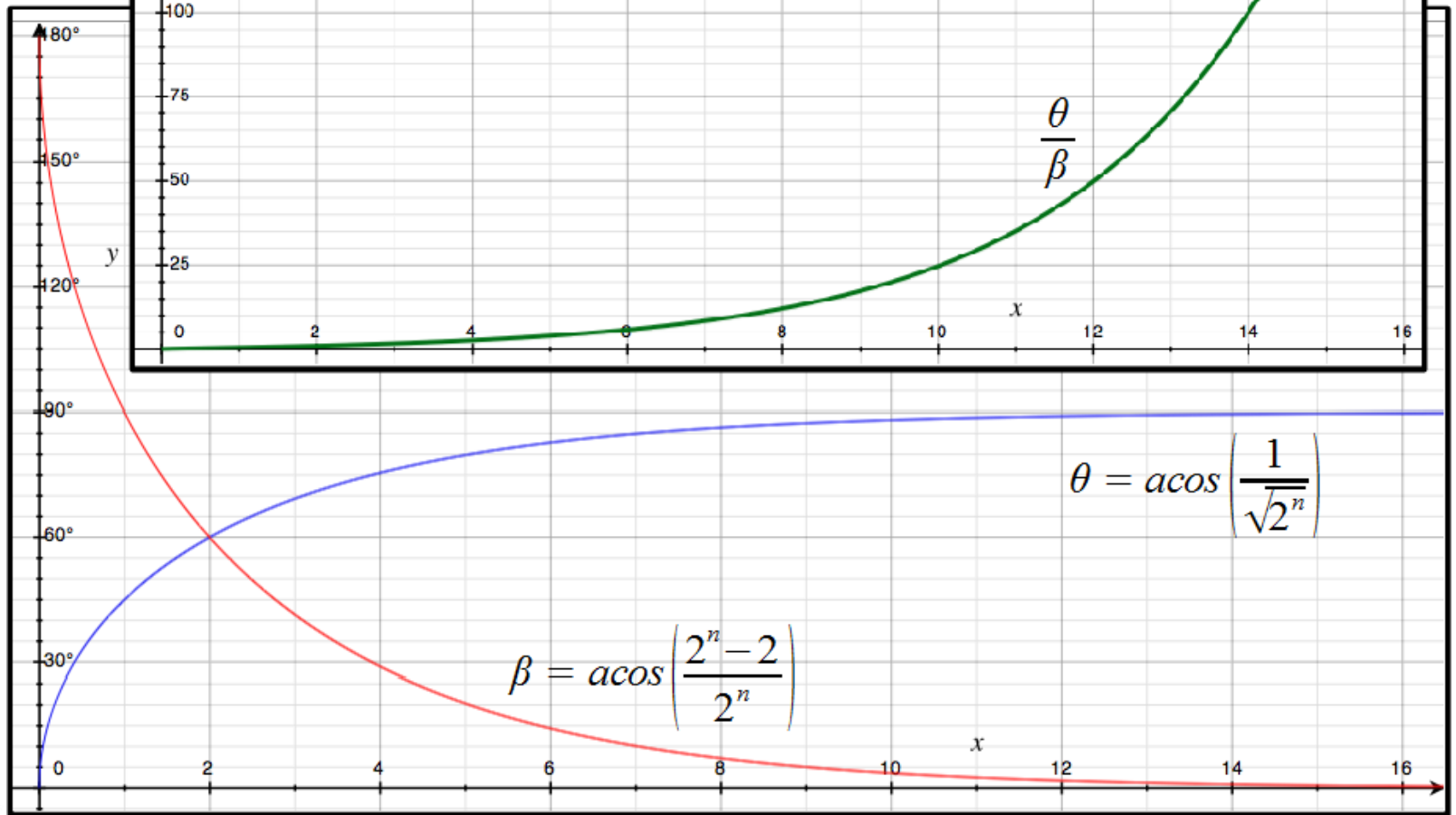
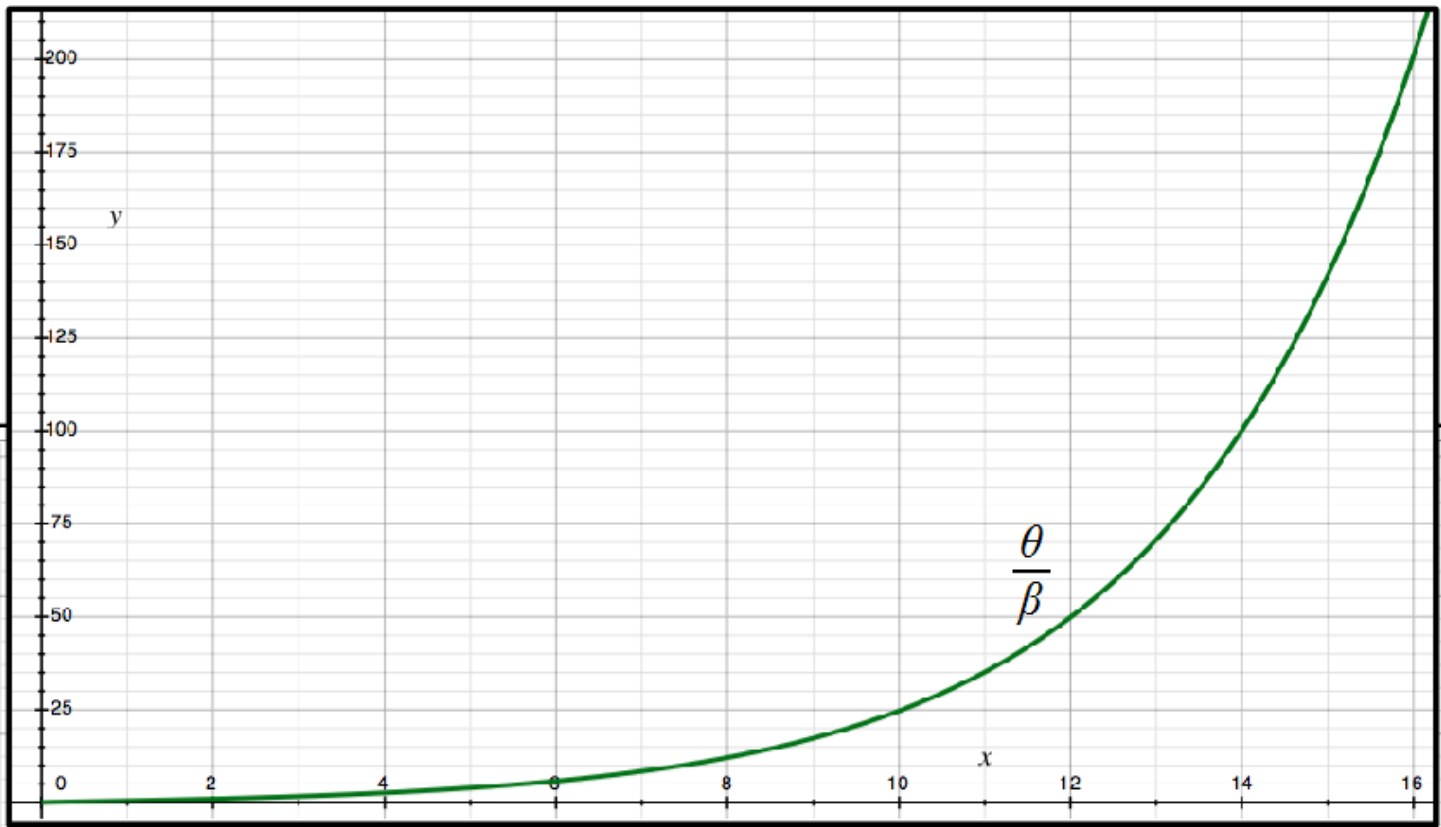
$$\beta = \arccos\left(\frac{N-2}{N}\right) = \arccos\left(\frac{6}{8}\right) \approx 41.4^\circ$$

$|x_i\rangle = |101\rangle$

$\sim 0^\circ$	STEP= 1	P(item)= 0.781250	P(other)= 0.031250
	STEP= 2	P(item)= 0.945312	P(other)= 0.007812
	STEP= 3	P(item)= 0.330078	P(other)= 0.095703
	STEP= 4	P(item)= 0.012207	P(other)= 0.141113
$\sim 180^\circ$	STEP= 5	P(item)= 0.547973	P(other)= 0.064575
	STEP= 6	P(item)= 0.999786	P(other)= 0.000003
	STEP= 7	P(item)= 0.576972	P(other)= 0.060432
	STEP= 8	P(item)= 0.019456	P(other)= 0.140077
$\sim 0^\circ$	STEP= 9	P(item)= 0.302891	P(other)= 0.099586
	STEP= 10	P(item)= 0.931265	P(other)= 0.009819
	STEP= 11	P(item)= 0.804925	P(other)= 0.027867
	STEP= 12	P(item)= 0.144965	P(other)= 0.122147
	STEP= 13	P(item)= 0.106316	P(other)= 0.127669
$\sim 180^\circ$	STEP= 14	P(item)= 0.756613	P(other)= 0.034769
	STEP= 15	P(item)= 0.957837	P(other)= 0.006023
	STEP= 16	P(item)= 0.357845	P(other)= 0.091736
$\sim 0^\circ$	STEP= 17	P(item)= 0.006624	P(other)= 0.141910
	STEP= 18	P(item)= 0.518810	P(other)= 0.068741
	STEP= 19	P(item)= 0.998078	P(other)= 0.000274
	STEP= 20	P(item)= 0.605709	P(other)= 0.056327
$\sim 180^\circ$	STEP= 21	P(item)= 0.028348	P(other)= 0.138807
	STEP= 22	P(item)= 0.276377	P(other)= 0.103374
	STEP= 23	P(item)= 0.915745	P(other)= 0.012036
	STEP= 24	P(item)= 0.827558	P(other)= 0.024634
$\sim 0^\circ$	STEP= 25	P(item)= 0.166143	P(other)= 0.119122
	STEP= 26	P(item)= 0.088977	P(other)= 0.130146
	STEP= 27	P(item)= 0.731100	P(other)= 0.038414
	STEP= 28	P(item)= 0.968797	P(other)= 0.004457
	STEP= 29	P(item)= 0.386098	P(other)= 0.087700
	STEP= 30	P(item)= 0.002727	P(other)= 0.142467

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{69.3^\circ}{41.4^\circ} \approx 1.7 \text{ φορές για } x_i \\ \frac{360^\circ}{41.4^\circ} \approx 8.7 \text{ φορές για πλήρη κύκλο} \end{cases}$$





Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Σγάρμπας Κυριάκος**. «**Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας, Αλγόριθμος Grover**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

