



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας

Ενότητα 16: Κβαντικοί Καταχωρητές και Τανυστικό  
Γινόμενο

Σγάρμπας Κυριάκος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

Κβαντικοί καταχωρητές και τανυστικό γινόμενο



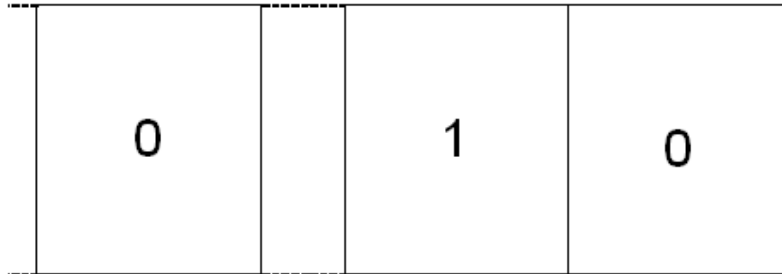
# Περιεχόμενα ενότητας

- Κβαντικοί καταχωρητές
- Τανυστικό γινόμενο
- Ιδιότητες τανυστικού γινομένου

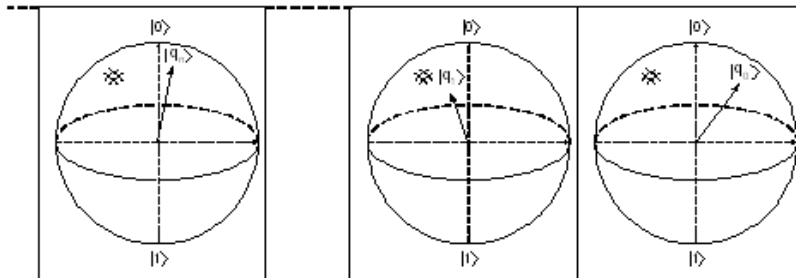


Κβαντικοί καταχωρητές και  
τανυστικό γινόμενο

# Κβαντικοί Καταχωρητές



Επέκταση σε πολλά qubits



$$\begin{aligned} |q_R\rangle &= |q_{n-1} \cdots q_2 q_1 q_0\rangle = |q_{n-1}\rangle \cdots |q_2\rangle |q_1\rangle |q_0\rangle = \\ &= |q_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |q_2\rangle \otimes |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle \\ &\quad \text{(τανυστικό γινόμενο)} \end{aligned}$$



# Τανυστικό Γινόμενο

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ b \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} c \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ d \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ b \begin{bmatrix} c \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ d \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace \\ acf \\ ade \\ adf \\ bce \\ bcf \\ bde \\ bdf \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & b \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & d \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{bmatrix}$$



# Τανυστικό Γινόμενο

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |00\rangle$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |11\rangle$$



# Τανυστικό Γινόμενο

$$\begin{aligned} |q_1 q_0\rangle &= \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= c_0 |00\rangle + c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle + c_3 |11\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |q_1 q_0\rangle &= |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \\ &= ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle = \\ &= c_0 |00\rangle + c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle + c_3 |11\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle \end{aligned}$$

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$$





# Τανυστικό Γινόμενο

Στη γενική περίπτωση, ένας καταχωρητής με  $n$  qubits...

$$\begin{aligned} |q_R\rangle &= |q_{n-1} \cdots q_2 q_1 q_0\rangle = |q_{n-1}\rangle \cdots |q_2\rangle |q_1\rangle |q_0\rangle = \\ &= |q_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |q_2\rangle \otimes |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^n-1} \end{bmatrix} =$$

...βρίσκεται σε μια κατάσταση που εκφράζεται

ως ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert  $\mathbb{C}^{2^n}$

$$\begin{aligned} c_0 |0 \cdots 000\rangle + c_1 |0 \cdots 001\rangle + c_2 |0 \cdots 010\rangle + c_3 |0 \cdots 011\rangle + \cdots + c_{2^n-1} |1 \cdots 111\rangle \\ = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle + \cdots + c_{2^n-1} |2^n - 1\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k |k\rangle \end{aligned}$$

...και είναι υπέρθεση μέχρι  $2^n$  βασικών καταστάσεων

Και επειδή τα πλάτη δημιουργούν πιθανότητες, πάντα ισχύει:

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \cdots + |c_{2^n-1}|^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} |c_k|^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k c_k^* = 1$$



# Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω διάνυσμα:

$$|q_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1+i}{4}|10\rangle - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}|11\rangle$$

Εξετάστε αν μπορεί να αποτελεί κατάσταση ενός κβαντικού καταχωρητή 2 qubits



# Παράδειγμα

$$\begin{aligned}\langle q_R | q_R \rangle &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} & -\frac{1-i}{4} & -\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1+i}{4} \\ -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \left( \frac{-i}{2\sqrt{2}} \right) + \left( -\frac{1-i}{4} \right) \left( -\frac{1+i}{4} \right) + \left( -\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \right) \left( -\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i^2}{8} + \frac{1-i^2}{16} + \frac{e^0}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$



# Ιδιότητες Τανυστικού Γινομένου

$$A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$$

$$(A+B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

$$A \otimes (cB) = (cA) \otimes B = c(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

$$\langle A \otimes B | C \otimes D \rangle = \langle A | C \rangle \langle B | D \rangle$$

$$|A \otimes B\rangle \langle C \otimes D| = |A\rangle \langle C| \otimes |B\rangle \langle D|$$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).





# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Σγάρμπας Κυριάκος**. «**Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας, Κβαντικοί Καταχωρητές και Τανυστικό Γινόμενο**».  
Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

[https://eclass.upatras.gr/modules/course\\_metadata/opencourses.php?fc=15](https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15)



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

