ΕΕ728
Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
1η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 Μαρτίου 2015

Γενικές Πληροφορίες

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. `dtouba@upatras.gr`
- Γραφείο: 2ος όροφος Νέας Πτέρυγας. Τηλ: 2610-99-6468.
- Σκοπός του μαθήματος: Εμβάθυνση σε θέματα Θεωρίας Πληροφορίας, μεγαλύτερη μαθηματική αυστηρότητα, εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων.
- Ειδικότερα, στόχοι του μαθήματος είναι:
  - Να εμβαθύνει σε έννοιες/αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας που παρουσιάστηκαν στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας".
  - Να παρουσιάσει τις αποδείξεις κάποιων από αυτά τα αποτελέσματα.
  - Να επεκταθεί στα κανάλια πολλών χρηστών (Network Information Theory) και, εάν ο χρόνος το επιτρέψει, σε Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης (Rate Distortion Theory) ή/και Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov.

Γενικές Πληροφορίες (2)

- Προαπαιτούμενες γνώσεις:
  - Θεωρία Πιθανοτήτων και Αρχές Συνδυαστικής
  - Γνώση της ύλης του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας" (πλην της Θεωρίας Κωδικοποίησης)

Γενικές Πληροφορίες (2)

- Παραδόσεις: Εκκεμεί. 3 45λεπτα παραδόσεων και 2 15λεπτα διαλείμματα.
- Ώρες γραφείου: Θα ανακοινωθούν σύντομα.
- Παρακαλώ γραφτείτε στο eclass (ΕΕ728) για να λαμβάνετε τις ανακοινώσεις σχετικά με το μάθημα.
- Τρόπος εξέτασης:
  - Ίδιος τρόπος εξέτασης για προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές.
  - Ιούνιος 2015: Γραπτή τελική εξέταση, ανοιχτά βιβλία και σημειώσεις.

Βιβλία/Συγγράμματα

- Το μάθημα θα βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στο βιβλίο των T. Cover & J. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd Ed., Wiley 2006.
- Η Ελληνική μετάφραση είναι ένα από τα βιβλία που δικαιούστε μέσω Ευδόξου.
- Αντιστοιχία μαθήματος – βιβλίου Cover & Thomas (2η έκδοση).
  - Εντροπία και Κωδικοποίηση Πηγής. Κεφάλαια 2, 3, 4 και 5.
  - Χωρητικότητα και Κωδικοποίηση Καναλιού. Κεφάλαια 7, 8 και 9.
  - Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων και Κατανεμημένη Κωδικοποίηση Πηγής. Κεφάλαιο 15.
  - Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης. Κεφάλαιο 10.
  - Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov. Κεφάλαιο 14.

Βιβλία/Συγγράμματα (2)

- Για τις διαφάνειες έχει χρησιμοποιηθεί, επίσης, το βιβλίο των A. El Gamal & Y.-H. Kim, *Network Information Theory*, Cambridge University Press, 2012.
- Μια προγενέστερη έκδοση είναι διαθέσιμη στο `http://circuit.ucsd.edu/~yhk/lnit.html`.
- Πρόκειται για ένα πολύ καλό βιβλίο που περιέχει τις τελευταίες εξελίξεις στη Θεωρία Πληροφορίας. Ωστόσο, είναι πιο δύσκολο από το βιβλίο των Cover & Thomas, αφού σκοπός του τελευταίου είναι να αποτελέσει διδακτικό σύγγραμμα.

Βιβλία/Συγγράμματα (3)

- R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*. Ιστορικό βιβλίο. Καλύπτει λιγότερες πλευρές της Θεωρίας Πληροφορίας σε σχέση με το βιβλίο των Cover & Thomas, αλλά υπεισέρχεται σε μεγαλύτερο βάθος. Έπίσης, καλύπτει και μέρος της Θεωρίας Κωδικοποίησης.
- D. McKay, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, 2003. Διατίθεται δωρεάν στο Διαδίκτυο αρκεί να μην το τυπώσετε. Δίνει αρκετά παραδείγματα. Επίσης, επικεντρώνεται αρκετά στη Θεωρία Κωδικοποίησης, καθώς και στην εξαγωγή συμπερασμάτων (inference).

Βιβλία/Συγγράμματα (4)

- D. Tse & P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press, 2005. Δεν είναι βιβλίο Θεωρίας Πληροφορίας. Ωστόσο, αναφέρεται συχνά σε αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας και περιέχει ενδιαφέρουσες συζητήσεις για θέματα που άπτονται των Ασύρματων Συστημάτων Τηλεπικοινωνιών. Διατίθεται και αυτό δωρεάν στο Διαδίκτυο.
- Ένας πιο πλήρης κατάλογος βιβλιογραφίας δίνεται στο Φυλλάδιο 2.

Σύνδεσμοι σε παρόμοια μαθήματα άλλων πανεπιστημίων

- Stanford University: EE 376A/B/Stat 376A/B: Information Theory. `http://www.stanford.edu/class/ee376a` και `ee376b`.
- University of Minnesota: EE5581: Information Theory and Coding `http://www.ece.umn.edu/users/nihar/ee5581_fall05/index.html`
- UIUC: ECE 563, Information Theory `http://courses.ece.uiuc.edu/ece563/`
- Hebrew University, Information Theory of Wideband Communication Systems (67891) `http://www.cs.huji.ac.il/~dporrat/WidebandCourse.html`
- Πολυτεχνείο Κρήτης, ΤΗΛ 412, Θεωρία Πληρηφορίας και Κωδίκων, `http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/`.

Ύλη Μαθήματος

- Επανάληψη Βασικών Εννοιών/Αποτελεσμάτων του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας" (7ου εξαμήνου).
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP). Η εντροπία είναι ο βέλτιστος ρυθμός αναπωλειακής συμπίεσης. Κωδικοποίηση σταθερού και μεταβλητού μήκους (περιληπτικά, θεωρώντας γνωστά τα περί κωδίκων που αναφέρθηκαν στη "Θεωρία Πληροφορίας").
- Χωρητικότητα Καναλιού. Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP). Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού για Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη (απόδειξη).
- Συνεχείς τ.μ. Διαφορική Εντροπία. Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού. Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια. Γκαουσιανό κανάλι με ανάδραση.
- Κανάλια Πολλών Χρηστών: Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC), Κανάλι Ευρυεκπομπής (BC), Κανάλι Μεταγωγής (Relay), Κανάλι Παρεμβολών (Interference). Κατανεμημένη συμπίεση και Θεώρημα Slepian-Wolf.
- Εάν προλάβουμε: Θεωρία Ρυθμού–Παραμόρφωσης (Rate Distortion Theory) ή/και Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

Αντιστοιχία σημερινής διάλεξης με βιβλία Cover & Thomas και Gallager

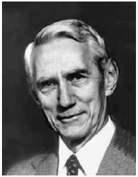
- Βιβλίο Cover & Thomas (2η έκδοση): Κεφ. 1, Κεφ. 3.
- Βιβλίο Gallager: Κεφ. 1

Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας

- Θεωρία Πληροφορίας: Μια γενική και κατ' εξοχήν *μαθηματική* θεωρία.
- Θεμελιωτής της θεωρείται ο Claude Shannon.
- Ξεκίνησε με σκοπό να κατανοηθούν τα Συστήματα Επικοινωνιών (Claude Shannon, ``A mathematical theory of communication,'' *The Bell System Technical Journal*, 1948).
- Ωστόσο, είναι μια αρκετά γενική θεωρία με ευρύ πεδίο εφαρμογής
    - Τηλεπικοινωνίες
    - Θεωρία Πιθανοτήτων (Εκτίμηση/έλεγχος υποθέσεων)
    - Στατιστική (εξαγωγή συμπερασμάτων)
    - Οικονομικά/Χρηματιστήριο/Τζόγος
    - Επιστήμη Υπολογιστών (Αλγοριθμική Πολυπλοκότητα)
    - Στατιστική Φυσική (Θερμοδυναμική)
    - κ.α.

Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας (2)

- Η Θεωρία Πληροφορίας απαντά σε δύο βασικά ερωτήματα της Θεωρίας Επικοινωνιών:
    1. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή (αναπωλειακή) συμπίεση των δεδομένων μιας πηγής; $\rightarrow$ Η εντροπία (entropy) H.
    2. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός επικοινωνίας (rate of communication) δια μέσου ενός καναλιού χωρίς μνήμη; $\rightarrow$ Η χωρητικότητα (capacity) C.
- Επίσης, δίνει απαντήσεις σε πιο σύνθετα προβλήματα, κάποια από τα οποία θα δούμε στο μάθημα.



Claude Shannon, 1916-2001

Προεπισκόπηση μαθήματος

Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Συμπίεση

- Μια τυχαία μεταβλητή ή, γενικότερα, μια τυχαία διαδικασία (στοχαστική ανέλιξη – random process) χαρακτηρίζεται από ένα όριο αβεβαιότητας (εντροπία) κάτω από το οποίο δεν είναι δυνατόν να συμπιεστεί.
- Ιδιότητες εντροπίας, σχετικής εντροπίας, αμοιβαίας πληροφορίας (επανάληψη από το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας")
- Ανισότητα Fano: Χρήσιμη στην απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (2ο Θεώρημα Shannon). Συνδέει την πιθανότητα σφάλματος στην εκτίμηση μιας τ.μ. X με βάση παρατήρηση τ.μ. Y με τη δεσμευμένη εντροπία $H(X|Y)$.
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Asymptotic Equipartition Property - AEP). Αναφέρθηκε στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας"· θα την εξετάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στα Προχωρημένα Θέματα.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής: Μπορούμε να συμπιέσουμε τα σύμβολα εργοδικής πηγής με απόσταση το πολύ 1 bit από την εντροπία και σε καμία περίπτωση με λιγότερα bits από την εντροπία (εκτός αν δεχτούμε απώλεια πληροφορίας). Θα το αποδείξουμε (για πηγές χωρίς μνήμη).

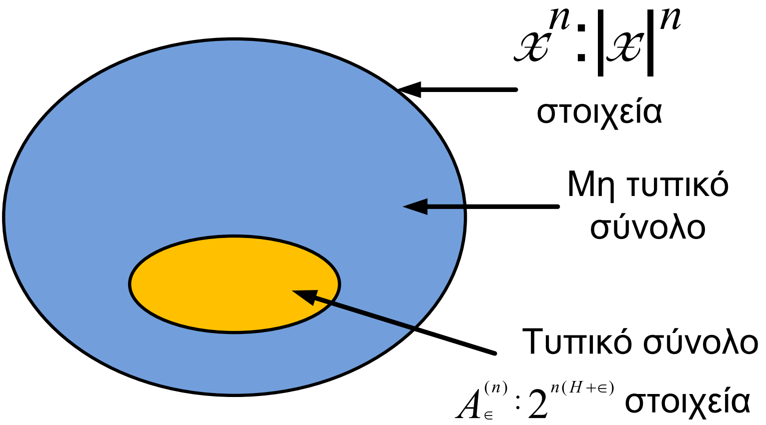
Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP)

- AEP: Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (law of large numbers) στη Θεωρία Πληροφορίας, του οποίου αποτελεί επαναδιατύπωση.
- AEP (για ανεξάρτητες, ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ.): Καθώς το n τείνει στο άπειρο, η ποσότητα $\frac{1}{n}\log\frac{1}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ τείνει στην εντροπία $H(X)$. Επομένως, $p(X_1,X_2,\ldots,X_n)\to 2^{-nH(X)}$.
- Χωρισμός ακολουθιών μήκους n σε δύο σύνολα:
  - Τυπικό (typical) (κάθε ακολουθία του οποίου έχει πιθανότητα $\sim 2^{-nH(X)}$) και
  - μη τυπικό (non-typical) (όλες οι υπόλοιπες ακολουθίες).

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) (2)

- Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των τυπικών ακολουθιών τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο και ότι το τυπικό σύνολο περιέχει $\sim 2^{nH(X)}$ τυπικές ακολουθίες.
- Επομένως, μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με τις τυπικές ακολουθίες. Καθώς το μήκος τους, n, μεγαλώνει, η πιθανότητα να εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία τείνει στο 0.
- Θα αποδείξουμε ότι με τον τρόπο αυτό μπορούμε να περιγράψουμε τις τ.μ. X_i με μέσο μήκος που τείνει στην εντροπία $H(X)$.

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) (3)



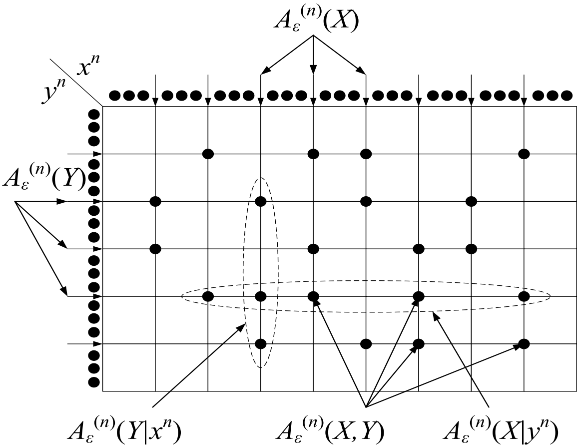
Χωρητικότητα Καναλιού

- "Πληροφοριακός" Ορισμός Χωρητικότητας (information capacity), συμμετρικά κανάλια, παραδείγματα.
- Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP).
- "Λειτουργικός" Ορισμός Χωρητικότητας. Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού Shannon και απόδειξη (για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη).
- Χωρητικότητα καναλιού με ανάδραση.
- Θεώρημα διαχωρισμού καναλιού-πηγής.
- Συνεχείς τ.μ. και Διαφορική Εντροπία.
- Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού.
- Χωρητικότητα Παράλληλων Γκαουσιανών Καναλιών και ``waterfilling''.
- Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με ανάδραση.

Joint AEP

- Joint AEP: Έστω n ανεξάρτητα, ομοίως κατανεμημένα ζεύγη (X_i, Y_i) (οι X_i και Y_i δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες μεταξύ τους).
    - Καθώς το n τείνει στο άπειρο, $p((X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \ldots, (X_n, Y_n)) \to 2^{-nH(X,Y)}$.
- Εάν οι $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ είναι ανεξάρτητες με τις ίδιες περιθώριες κατανομές με αυτές των X_i και Y_i, αντίστοιχα, τότε η πιθανότητα η ακολουθία $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) \ldots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ να είναι τυπική τείνει στην τιμή $2^{-nI(X;Y)}$.
- Επομένως, η πιθανότητα μια ακολουθία $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) \ldots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ της οποίας οι $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ είναι, στην πραγματικότητα, ανεξάρτητες να ανήκει στο τυπικό σύνολο ακολουθιών που δημιουργούνται επιλέγοντας τις τ.μ. με βάση την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(X, Y)$ (όχι, απαραιτήτως, ίση με $p(X)p(Y)$), ισούται, κατά προσέγγιση, με $2^{-nI(X;Y)}$.
- Θα χρησιμοποιήσουμε την Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης στην απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού του Shannon.

Joint AEP (2)



Από Κοινού Τυπικές Ακολουθίες

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Συνεχείς τ.μ. και Γκαουσιανό Κανάλι

- Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε την πληροφορία, να συμπιέσουμε και να μεταδώσουμε συνεχείς τ.μ. (ή διακριτές τ.μ. σε κανάλια με συνεχείς τιμές) ορίζουμε τη Διαφορική Εντροπία.
- Παρόλο που η διαφορική εντροπία δεν αντιστοιχεί σε bits πληφορορίας πολλά αποτελέσματα είναι παρόμοια με την περίπτωση διακριτών τ.μ., αλλά και με κάποιες διαφορές (η διαφορική εντροπία είναι σχετικά "προβληματική" στο χειρισμό της, σε αντίθεση με την εντροπία).
- Το Γκαουσιανό Κανάλι αποτελεί ένα πολύ καλό μοντέλο για κανάλια που απαντούν στη φύση. Η έκφραση για τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας.
- Θα εξετάσουμε το Γκαουσιανό Κανάλι με μεγαλύτερη λεπτομέρεια απ' ό,τι στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας"
- Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά Κανάλια με πηγές που υπόκεινται σε περιορισμό ισχύος.

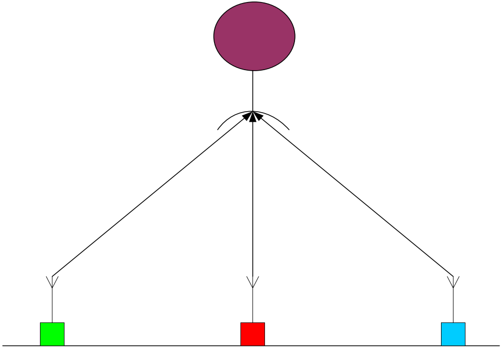
Συνεχείς τ.μ. και Γκαουσιανό Κανάλι (συνέχεια)

- Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ένας πομπός έχει στη διάθεσή του περισσότερα από ένα ανεξάρτητα Γκαουσιανά κανάλια με διαφορετικό λόγο ισχύος σήματος προς ισχύ θορύβου (SNR) και δεδομένη συνολική ισχύ με την οποία μπορεί να μεταδώσει.
- Θα αποδείξουμε ότι είναι βέλτιστο να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερο μέρος της διαθέσιμης ισχύος στα κανάλια με μεγάλο SNR. Δηλαδή, πρέπει να μεταδώσουμε με μεγαλύτερο ρυθμό στα "καλά" κανάλια και με μικρότερο (σε κάποιες περιπτώσεις ακόμα και μηδενικό) στα "κακά".
- Η κατανομή, αυτή, της ισχύος (``waterfilling'') βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα συστήματα DSL, καθώς και σε ασύρματα συστήματα που μεταδίδουν σε κανάλια με διαλείψεις (fading).
- Θα εξετάσουμε, επίσης, την περίπτωση Γκαουσιανών καναλιών με έγχρωμο θόρυβο και τη χωρητικότητά τους.

Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων (Network Info Theory)

- Συστήματα με περισσότερους από έναν πομπούς ή/και περισσότερους από έναν δέκτες.
- Νέα στοιχεία: Παρεμβολή (interference), συνεργασία (cooperation) και ανάδραση (feedback).
- Το γενικό πρόβλημα είναι εύκολο να μοντελοποιηθεί, αλλά πολύ δύσκολο να επιλυθεί. Η γενική λύση του προβλήματος δεν έχει βρεθεί έως σήμερα.
- Στη γενική περίπτωση αναφερόμαστε, πλέον, σε περιοχές χωρητικότητας (capacity regions) και σε περιοχές ρυθμών μετάδοσης (rate regions), δεδομένου ότι, λόγω παρεμβολών και συνεργασίας, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης κάθε χρήστη εξαρτάται από τους ρυθμούς μετάδοσης των άλλων χρηστών (στη γενική περίπτωση).

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.
- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα από τα άλλα.

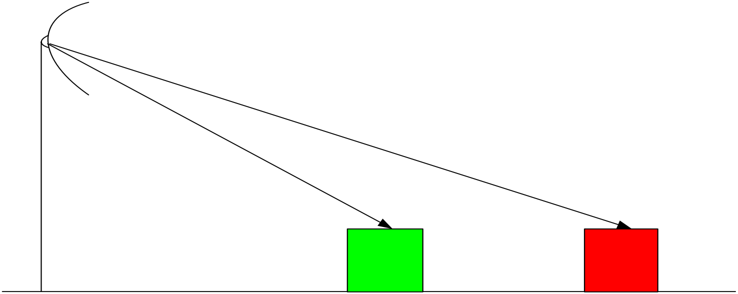
Γκαουσιανό Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Gaussian MAC)

- Για το Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (δηλαδή MAC με Γκαουσιανό θόρυβο στο δέκτη) με περιορισμούς ισχύος P_1 και P_2 και διασπορά θορύβου N στο δέκτη η περιοχή χωρητικότητας δίνεται από τα ζεύγη (R_1, R_2) που ικανοποιούν το παρακάτω σύνολο ανισοτήτων:

$R_1 < C\left(\frac{P_1}{N}\right)$, $R_2 < C\left(\frac{P_2}{N}\right)$ και $R_1 + R_2 < C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$,
όπου $C(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$.

- Η πολύπλεξη στο χρόνο (TDM) δεν είναι βέλτιστη στη γενική περίπτωση! Το βέλτιστο είναι όλοι οι χρήστες να εκπέμπουν ταυτόχρονα.
- Θα δούμε, επίσης, ότι, καθώς ο αριθμός των χρηστών αυξάνει, το άθροισμα των ρυθμών μετάδοσής τους τείνει στο άπειρο.
    - Παρόλο που η είσοδος νέων χρηστών δημιουργεί επιπρόσθετη παρεμβολή, η ισχύς που "φέρνει" κάθε νέος χρήστης οδηγεί σε αύξηση της συνολικής χωρητικότητας (στο Γκαουσιανό κανάλι).

Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel)



- Ένας κεντρικός σταθμός που επιθυμεί να στείλει (διαφορετική) πληροφορία σε περισσότερους από έναν χρήστες.
- Δεν έχει κατανοηθεί πλήρως, εκτός από ειδικές περιπτώσεις (π.χ. Γκαουσιανός θόρυβος στους δέκτες).

Γκαουσιανό Κανάλι Ευρυεκπομπής (Gaussian BC)

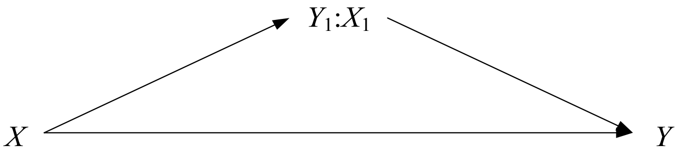
- Έστω Γκαουσιανό BC 2 χρηστών. Ο δέκτης εκπέμπει με ισχύ P και στέλνει διαφορετικά (και ανεξάρτητα) μηνύματα στους χρήστες. Έστω, επίσης, ότι για τις ισχείς (διασπορές) θορύβου των χρηστών, $N_1 < N_2$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του Γκαουσιανού BC δίνεται από τα ζεύγη (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις ανισότητες

$$R_1 < C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right) \text{ και } R_2 < C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}\right),$$

όπου $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$ και $0 \leq \alpha \leq 1$, ανάλογα με την επιθυμητή αναλογία ρυθμών μετάδοσης.

- Θα δούμε ότι ο (αδύναμος) χρήστης 2 αποκωδικοποιεί μόνο το μήνυμα που προορίζεται για αυτόν, ενώ ο (ισχυρός) χρήστης 1 αποκωδικοποιεί και τα δύο μηνύματα.
- Όπως και για το Γκαουσιανό MAC, η πολύπλεξη στο χρόνο *δεν* είναι πάντοτε η βέλτιστη στρατηγική χρήσης του καναλιού.

Κανάλι Μεταγωγής (Relay Channel)



- Ένας πομπός και ένας δέκτης, με ενδιάμεσο μεταγωγέα ο οποίος υποβοηθά την επικοινωνία (και δε στέλνει/λαμβάνει δική του πληροφορία).
- Στη γενική περίπτωση, ο μεταγωγέας *δεν* εκπέμπει το ίδιο σήμα με αυτό που λαμβάνει.
- Επίσης, στη γενική περίπτωση, θεωρούμε ότι ο μεταγωγέας μπορεί να λαμβάνει και να εκπέμπει ταυτόχρονα.

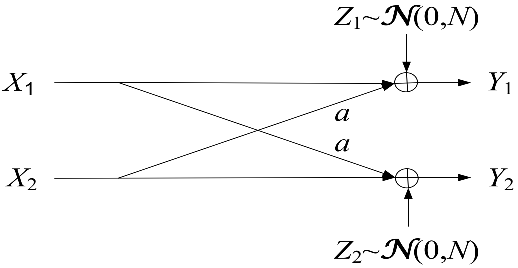
Γκαουσιανό Κανάλι Μεταγωγής (Gaussian RC)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει με ισχύ P, ενώ ο μεταγωγέας εκπέμπει με ισχύ P_1. Η ισχύς θορύβου στο δέκτη του μεταγωγέα ισούται με N_1, ενώ στον τελικό δέκτη με N_2.
- Η χωρητικότητα μίας κατηγορίας Γκαουσιανών RC δίνεται από τη σχέση

$$C = \max_{0\leq\alpha\leq 1} \min\left\{ C\left(\frac{P+P_1+2\sqrt{(1-\alpha)PP_1}}{N_1+N_2}\right), C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right)\right\}.$$

- Εάν $P_1/N_2 \geq P/N_1$, δηλαδή ο λόγος σήματος προς θόρυβο στον τελικό δέκτη είναι μεγαλύτερος από το λόγο σήματος προς θόρυβο στο δέκτη του μεταγωγέα, αποδεικνύεται ότι $\alpha = 1$ και $C = C(P/N_1)$. Επομένως, το κανάλι μετά το μεταγωγέα "φαίνεται" αθόρυβο. Προσοχή: ο μεταγωγός δε στέλνει το ίδιο σήμα με αυτό που λαμβάνει.
- Ο τρόπος μετάδοσης δεν είναι προφανής, αλλά είναι πολύ ενδιαφέρων. Περισσότερες λεπτομέρειες σε μεταγενέστερη διάλεξη.
- Η χωρητικότητα του γενικού Γκαουσιανού RC δεν είναι γνωστή.

Γκαουσιανό Κανάλι Παρεμβολής (Gaussian Interference Channel)

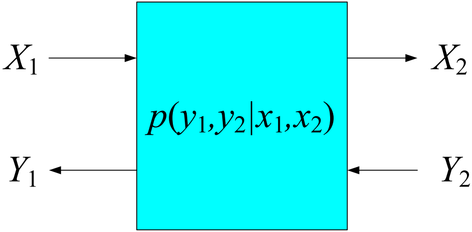


- K πομποί και K δέκτες με διαφωνία (crosstalk). Ο κάθε πομπός θέλει να στείλει πληροφορία στον αντίστοιχο δέκτη χωρίς να ενδιαφέρεται για την επικοινωνία των άλλων ζευγών. Στο σχήμα, $K = 2$.
- Παράδειγμα: Συνεστραμμένα ζεύγη χαλκού (twisted pairs) που βρίσκονται στο ίδιο πλέγμα (bundle) καλωδίων.

Γκαουσιανό Κανάλι Παρεμβολής (2)

- Η περιοχή χωρητικότητας για το Κανάλι Παρεμβολής δεν έχει βρεθεί έως σήμερα, ακόμα και όταν ο θόρυβος είναι Γκαουσιανός.
- Για την περίπτωση πολύ ισχυρής παρεμβολής αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα ισούται με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει παρεμβολή.
- Η ιδέα (για συμμετρικό κανάλι): Εάν $C(a^2P/(P+N)) \geq C(P/N)$, όπου $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$ και a ο συντελεστής παρεμβολής, ο δέκτης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 1, εφόσον, βέβαια, γνωρίζει το βιβλίο κωδίκων (codebook) που χρησιμοποιεί ο 1.
- Επομένως, μπορεί να αφαιρέσει την παρεμβολή από το λαμβανόμενο σήμα και, στη συνέχεια, να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 2 που προορίζεται για αυτόν.
- Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το δέκτη 1.

Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης (Two-way Channel)

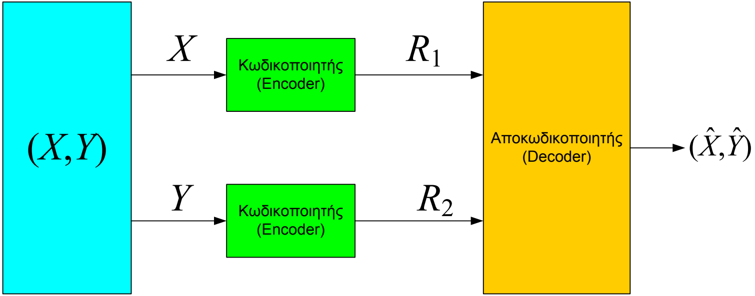


- Δύο σταθμοί οι οποίοι επικοινωνούν μέσω δύο διαύλων.
- Παρόμοιο με το Κανάλι Παρεμβολής, με τη διαφορά ότι ο πομπός 1 συνδέεται με το δέκτη 1 (και ο πομπός 2 συνδέεται με το δέκτη 2).
- Επομένως, ο πομπός 1 μπορεί να χρησιμοποιήσει πληροφορία από σύμβολα που έχουν ληφθεί από το δέκτη 1 πριν εκπέμψει $\rightarrow$ ανάδραση (feedback).
- Η περιοχή χωρητικότητας του Καναλιού Διπλής Κατεύθυνσης δεν είναι γνωστή στη γενική περίπτωση.

Γκαουσιανό Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης

- Η περιοχή χωρητικότητας στην περίπτωση Γκαουσιανού θορύβου είναι γνωστή.
- Έστω ότι ο πομπός 1 και ο πομπός 2 μεταδίδουν με ρυθμό $R_1 < C(P_1/N_1)$ και $R_2 < C(P_2/N_2)$, αντιστοίχως, όπου $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$ και N_1 (N_2) ο θόρυβος που προστίθεται στο σήμα του πομπού 1 (2).
- Ο δέκτης 2 γνωρίζει το σήμα που εξέπεμψε ο πομπός 2 και, επομένως, μπορεί να το αφαιρέσει από το σήμα που λαμβάνει. Συνεπώς, απομένει να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 1 παρουσία Γκαουσιανού θορύβου.
- Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το δέκτη 1.
- Επομένως, το Γκαουσιανό Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης διαχωρίζεται σε δύο ανεξάρτητα Γκαουσιανά Κανάλια.
- Στη γενική περίπτωση (μη Γκαουσιανού Θορύβου) οι ρυθμοί μετάδοσης των δύο χρηστών δεν είναι ανεξάρτητοι.

Κατανεμημένη Συμπίεση (Distributed Data Compression)



Έστω ότι η X και η Y συμπιέζονται ξεχωριστά (π.χ. σε διαφορετικά σημεία) με σκοπό ένας χρήστης να μπορεί να αποκωδικοποιήσει και τις δύο. Ποιος είναι ο ελάχιστος συνολικός ρυθμός, $R = R_x + R_y$, που απαιτείται για να μεταδοθεί η πληροφορία και των δύο πηγών;

Κατανεμημένη Συμπίεση (2)

- Γνωρίζουμε ότι για να συμπιέσουμε μια πηγή X (χωρίς απώλειες) χρειαζόμαστε ρυθμό τουλάχιστον $H(X)$.
- Για να συμπιέσουμε από κοινού 2 πηγές X και Y (με χρήση κοινού κωδικοποιητή), απαιτείται ρυθμός $R > H(X, Y)$.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής (Slepian-Wolf): Ακόμα και όταν η συμπίεση των X και Y γίνεται σε διαφορετικά σημεία, αρκεί $R > H(X, Y)$! (καθώς, επίσης, και $R_x > H(X|Y)$ και $R_y > H(Y|X)$).
- Όπως θα δούμε, μόνο ο δέκτης (και όχι οι πομποί) χρειάζεται να γνωρίζει τις τυπικές ακολουθίες.

Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης (Rate Distortion Theory)

- Σε μερικές περιπτώσεις (π.χ. συνεχείς τ.μ.) δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί τέλεια συμπίεση με περιγραφή πεπερασμένου μήκους.
- Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις (για παράδειγμα αν δεν επαρκεί η χωρητικότητα καναλιού που διαθέτουμε) θέλουμε να συμπιέσουμε τ.μ. περισσότερο από την εντροπία (συμπίεση με απώλειες – lossy compression).
- Μέτρο παραμόρφωσης: Η απόσταση μιας τ.μ. από την αναπαράστασή της.
- Η Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης απαντά στο ερώτημα:
  - Δεδομένων της κατανομής μιας τ.μ. και ενός μέτρου παραμόρφωσης, ποια είναι η ελάχιστη *μέση* παραμόρφωση για δεδομένο ρυθμό συμπίεσης; Ή, ισοδύναμα,
  - Δεδομένων της κατανομής μιας τ.μ. και ενός μέτρου παραμόρφωσης, ποιο είναι το ελάχιστο *μέσο* μήκος περιγραφής που απαιτείται προκειμένου η μέση παραμόρφωση να μην υπερβεί μια δεδομένη τιμή;

Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης (2)

- Ενδιαφέρον αποτέλεσμα: Είναι καλύτερα να περιγράφουμε τ.μ. από κοινού παρά ξεχωριστά, ακόμα και όταν είναι ανεξάρτητες!
- Γεωμετρική ερμηνεία: Είναι πιο αποδοτικό να κατανέμουμε δεδομένα σημεία σε χώρους μεγαλύτερων διαστάσεων.
  - Αναλογία στη συμπίεση: Πετυχαίνουμε καλύτερη συμπίεση για μεγάλα μήκη ακολουθιών, ακόμα και όταν η πηγή δεν έχει μνήμη.
  - Αναλογία στη μετάδοση: Στη γενική περίπτωση, για να μεταδώσουμε με ρυθμούς κοντά στη χωρητικότητα, χρειαζόμαστε κώδικες μεγάλου μήκους (ακόμα και όταν το κανάλι δεν έχει μνήμη).
- Η Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε συνεχείς όσο και σε διακριτές τ.μ.
- Επίσης, αποτελεί συστατικό στοιχείο της μετάδοσης σε κανάλια πολλών χρηστών (π.χ. στο κανάλι μεταγωγής).

Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov

- Είδαμε ότι η εντροπία των ακολουθιών που παράγει μια πηγή εξαρτάται από την κατανομή τους.
- Kolmogorov: Αλγοριθμική πολυπλοκότητα (ή πολυπλοκότητα περιγραφής) ενός αντικειμένου: Το μήκος του συντομότερου προγράμματος υπολογιστή το οποίο περιγράφει το αντικείμενο.
- Δεν απαιτείται η χρήση της κατανομής του αντικειμένου!
- Αποδεικνύεται ότι η μέση πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov των ακολουθιών που παράγει μια πηγή ισούται, κατά προσέγγιση, με την εντροπία της.
- Σημαντική παρατήρηση (Kolmogorov): Η αλγοριθμική πολυπλοκότητα δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο υπολογιστή στον οποίο τρέχει το πρόγραμμα.

Η Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP)

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) – Εισαγωγή

- Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) διακριτών τ.μ. X_i: $X_1^n = X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας (joint pmf) των τ.μ. που αποτελούν την ακολουθία ισούται με $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i)$.

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) – Εισαγωγή (2)

- Asymptotic Equipartition Property - AEP:
  Αυξάνοντας το μήκος της ακολουθίας,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\prod_{i=1}^{n}p(X_i) \\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p(X_i) \\
&= -\mathbb{E}[\log p(X)] = H(X),
\end{aligned}
$$

  από τον Ασθενή Νόμο Μεγάλων Αριθμών (Weak Law of Large Numbers).

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) – Εισαγωγή (3)

- Επομένως, εάν σχηματίσουμε μια ακολουθία πολύ μεγάλου μήκους, η από κοινού συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας θα συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τιμή $2^{-nH(X)}$.
- Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν περίπου $2^{nH(X)}$ τέτοιες, τυπικές ακολουθίες και ότι το άθροισμα των από κοινού συναρτήσεων μάζας πιθανότητάς τους προσεγγίζει το 1.
- Το άθροισμα των πιθανοτήτων των υπόλοιπων, μη τυπικών, ακολουθιών μήκους n τείνει στο 0.
- Επομένως, μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μόνο τις τυπικές ακολουθίες $\rightarrow$ χρειαζόμαστε (περίπου) $nH(X)$ bits αντί για n.

Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) – Εισαγωγή (4)

- Επειδή η πιθανότητα να εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία τείνει στο 0, η πιθανότητα να μην μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την ακολουθία X_1^n με χρήση $nH(X)$ bits τείνει στο 0 για $n \to \infty$.
- Στη γενική περίπτωση, από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, για συνάρτηση $g(x)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \to \mathbb{E}[g(X)]$ (Typical Average Lemma). Το AEP αποτελεί εφαρμογή του λήμματος με $g(x) = \log \frac{1}{p(x)}$.
- Το AEP αποτελεί στυλοβάτη της Θεωρίας Πληροφορίας.

Είδη σύγκλισης (υπενθύμιση)

Μια ακολουθία τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ συγκλίνει σε μια τ.μ. X:

1. Κατά πιθανότητα (in probability) εάν, για κάθε $\epsilon > 0$, $\Pr\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$ για $n \to \infty$.
2. Κατά μέση τετραγωνική τιμή (mean square) εάν $\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \to 0$.
3. Με πιθανότητα 1 (ή σχεδόν βέβαια) εάν $\Pr\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$.

Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

- Θα αποδείξουμε, κατ΄ αρχάς, τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.
- Θα χρειαστούμε, πρώτα, δύο απλές, αλλά σημαντικές ανισότητες της Θεωρίας Πιθανοτήτων: Την ανισότητα Markov και την ανισότητα Chebyshev.

Η ανισότητα Markov

- **Θεώρημα 1.1 (ανισότητα Markov).** Εάν X είναι τ.μ. με *μη αρνητικές* τιμές, για οποιοδήποτε $a > 0$,

$$\Pr\{X \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

- **Απόδειξη:** Θεωρούμε την τ.μ. I που ορίζεται ως

$$I = \begin{cases} 1 & \text{για } X \geq a \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επειδή $X \geq 0$, $I \leq \frac{X}{a}$. Συνεπώς, $\mathbb{E}[I] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.
Παρατηρήστε, όμως, ότι $\mathbb{E}[I] = \Pr\{X \geq a\}$. Επομένως, προκύπτει το ζητούμενο.

Η ανισότητα Chebyshev

- **Πόρισμα 1.2 (ανισότητα Chebyshev).** Εάν X είναι τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, για οποιοδήποτε $k > 0$,

$$\Pr\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

- Απόδειξη: Θεωρούμε την τ.μ. $Y = (X-\mu)^2$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Markov με $a = k^2$. Επομένως,

$$\Pr\{(X-\mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Αλλά $\Pr\{(X-\mu)^2 \geq k^2\} = \Pr\{|X-\mu| \geq k\}$ (η σχέση είναι 1-προς-1). Επομένως, προκύπτει το ζητούμενο.

Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

- **Θεώρημα 1.3 (Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών – The Weak Law of Large Numbers).** Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ. X_i με *πεπερασμένη* μέση τιμή, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$,

$$\Pr\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \to 0, \text{ για } n \to \infty.$$

- Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών για την περίπτωση όπου οι τ.μ. έχουν, επιπλέον, πεπερασμένη διασπορά σ^2.
Έστω η τ.μ. $Z = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}[Z] = \mu$. Επίσης, $\mathrm{Var}[Z] = \frac{\sigma^2}{n}$ (αποδείξτε το ως άσκηση).

Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (συνέχεια)

- Από την ανισότητα Chebyshev,

$$\Pr\{|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \epsilon\} \leq \frac{\mathrm{Var}[Z]}{\epsilon^2} \Rightarrow$$
$$\Pr\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

- Συνεπώς, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$, $\Pr\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} \leq \delta$ για οποιοδήποτε $\delta > 0$ και ο *στατιστικός* μέσος όρος $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ συγκλίνει *κατά πιθανότητα* στο *στοχαστικό* μέσο όρο $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Εισαγωγή

- **Θεώρημα 1.4 (Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).** Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τ.μ. X_i με *πεπερασμένη* μέση τιμή, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Με πιθανότητα 1,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu \text{ για } n \to \infty.$$

Δηλαδή,

$$\Pr\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right\} = 1.$$

- Θα τον αποδείξουμε (ενημερωτικά) μετά το πόρισμα της επόμενης διαφάνειας.

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (συνέχεια)

- Πόρισμα 1.5 Εάν $N(x; X_1^n)$ είναι ο αριθμός των εμφανίσεων της τιμής x στην ακολουθία X_1^n, $\pi(x; X_1^n) \triangleq \frac{N(x;X_1^n)}{n} \to p(x)$ με πιθανότητα 1 για $n \to \infty$.
- Η ποσότητα $\pi(x; X_1^n)$ ονομάζεται *τύπος* (type) ή *εμπειρική πιθανότητα* της x.
- Δηλαδή, η εμπειρική πιθανότητα συγκλίνει στη στοχαστική πιθανότητα με πιθανότητα 1.
- Απόδειξη. Θεωρούμε τ.μ. B η οποία ισούται με 1 όταν $X_i = x$ και 0 όταν $X_i \neq x$. Οι X_i είναι i.i.d., επομένως και οι B_i είναι i.i.d. Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, $\Pr\left\{\frac{\sum B_i}{n} \to \mathbb{E}[B]\right\} = 1$. Αλλά $\mathbb{E}[B] = \Pr\{B = 1\} = \Pr\{X_i = x\} = p(x)$.
- Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η εμπειρική πιθανότητα συγκλίνει στη στοχαστική πιθανότητα *κατά πιθανότητα* (με χρήση του Ασθενούς Νόμου των Μεγάλων Αριθμών).

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών – Απόδειξη

- Θεωρούμε ότι οι X_i έχουν πεπερασμένη ροπή 4ης τάξης (παρόλο που ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών ισχύει και χωρίς αυτήν την παραδοχή)
- Η απόδειξη βρίσκεται, μεταξύ άλλων, στο βιβλίο S. Ross, *A first course in probability*, Prentice-Hall.
- Θεωρούμε, αρχικά, ότι $\mathbb{E}[X] = 0$.
- Ορίζουμε την τ.μ. $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Επομένως,

$$\mathbb{E}\left[S_n^4\right] = \mathbb{E}\left[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^4\right].$$

- Επειδή $\mathbb{E}[X] = 0$ και λόγω της ανεξαρτησίας των X_i, οι μόνοι όροι που δεν ισούνται με 0 είναι οι $\mathbb{E}[X_i^4]$ και $\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2]$.

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών – Απόδειξη (2)

- Για δεδομένα i και j υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ όροι $\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2]$.
- Επομένως, αν $\mathbb{E}[X_i^4] = K$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^4] &= n\mathbb{E}[X_i^4] + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] \\ &= nK + 3n(n-1)\mathbb{E}[X_i^2]\mathbb{E}[X_j^2].\end{aligned}$$

- Επειδή $\mathrm{Var}(X_i^2) = \mathbb{E}[X_i^4] - \left(\mathbb{E}[X_i^2]\right)^2$, $\left(\mathbb{E}[X_i^2]\right)^2 \leq \mathbb{E}[X_i^4] = K$.
- Συνεπώς, $\mathbb{E}[S_n^4] \leq nK + 3n(n-1)K \Rightarrow \mathbb{E}\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}$.
- Επομένως, $\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] < \infty$.
- Αυτό σημαίνει ότι, με πιθανότητα 1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty$ (εάν υπήρχε μη μηδενική πιθανότητα το άθροισμα να είναι άπειρο, τότε και η μέση τιμή θα ήταν άπειρη).

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών – Απόδειξη (3)

- Για να ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty$ με πιθανότητα 1, πρέπει ο $n-$στός όρος να τείνει στο 0.
- Επομένως, με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0.$$

- Αλλά, αν $\frac{S_n^4}{n^4} \to 0$, τότε θα πρέπει και $\frac{S_n}{n} \to 0$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.
- Στην περίπτωση όπου $\mathbb{E}[X] = \mu \neq 0$, μπορούμε να επαναλάβουμε την απόδειξη για την τ.μ. $\bar{X} \triangleq X - \mu$. $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{n} \to 0$, οπότε $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \to \mu$.