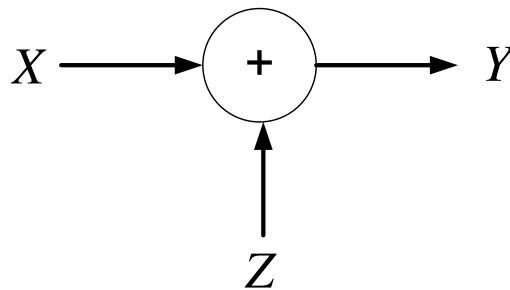


ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
2η σειρά ασκήσεων
Joint AEP και Κανάλια

Παράδοση: Έως 12/5/2015

1. Κανάλι Προσθετικού Θορύβου – Cover & Thomas 7.2

Βρείτε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη.

Δίνεται ότι $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{Z = \alpha\} = \frac{1}{2}$. Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο αλφάβητο $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Υποθέστε ότι η Z είναι ανεξάρτητη της X .

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο \mathbb{R} .

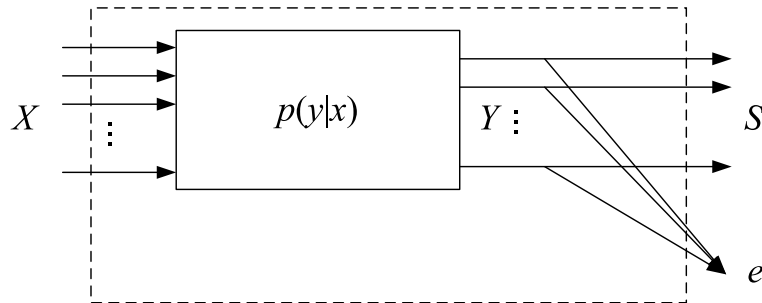
2. ►Ενθόρυβη Γραφομηχανή – Cover & Thomas 7.6 (τροποποιημένη)

Θεωρούμε γραφομηχανή με 24 πλήκτρα.

- Εάν κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits;
- Υποθέστε, τώρα, ότι κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα ή το επόμενο του στο αλφάβητο (με την ίδια πιθανότητα). Δηλαδή, $A \rightarrow A$ ή $A \rightarrow B$, $B \rightarrow B$ ή $B \rightarrow \Gamma$, ..., $\Omega \rightarrow \Omega$ ή $\Omega \rightarrow A$. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;
- Για το κανάλι του Ερωτήματος (β), εάν κωδικοποιούμε κάθε σύμβολο που θέλουμε να στείλουμε στο κανάλι ξεχωριστά, ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορείτε να επιτύχετε για μετάδοση με (ακριβώς) μηδενική πιθανότητα σφάλματος;
- Επαναλάβετε τα Ερωτήματα (α)-(γ) για γραφομηχανή με 25 πλήκτρα.

3. Κανάλι διαγραφής – Cover & Thomas 7.27

Έστω $\{\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y}\}$ ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με χωρητικότητα C . Υποθέστε ότι στην έξοδο του καναλιού συνδέεται ένα κανάλι διαγραφής $\{\mathcal{Y}, p(s|y), \mathcal{S}\}$ το οποίο διαγράφει την έξοδο του πρώτου καναλιού με πιθανότητα α , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Κανάλι για το Πρόβλημα 7.27 των Cover & Thomas.

Συγκεκριμένα, $\mathcal{S} = \{y_1, y_2, \dots, y_m, e\}$, και

$$\Pr\{S = y|X = x\} = \bar{\alpha}p(y|x), \quad y \in \mathcal{Y},$$

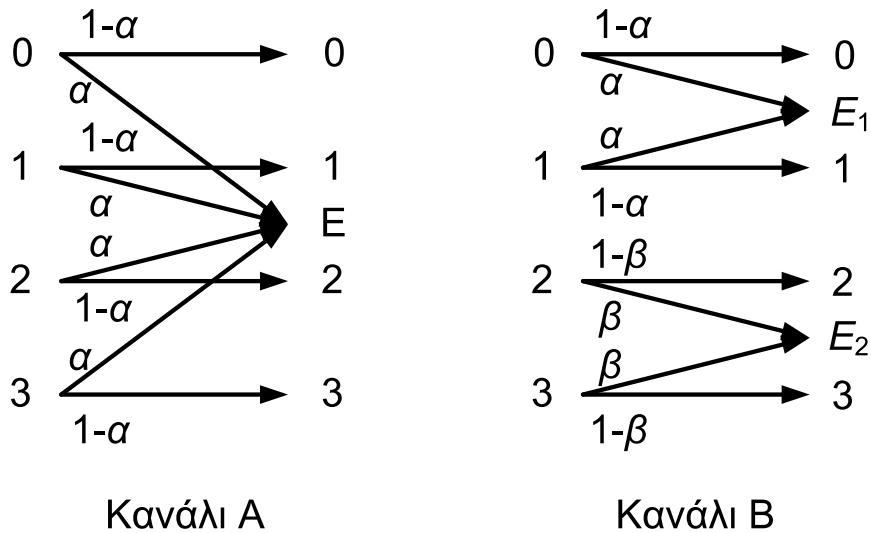
$$\Pr\{S = e|X = x\} = \alpha.$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού από το X στο S .

4. *Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (Προχωρημένα Θέματα Θ.Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)

Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής χωρίς μνήμη του Σχήματος 3. Στο κανάλι A στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι B, όπως και στο κανάλι A, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0, 1\}$ ή $\{2, 3\}$).

- (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού A, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.
- (β) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.
- (γ) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;



Σχήμα 3: Τετραδικά Κανάλια Διαγραφής

5. Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τε-
λική Εξέταση, Ιούνιος 2010)

Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1 - \epsilon - \alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1 - \epsilon - \alpha \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

- (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;
- (β) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^* , με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).

Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

- (γ) Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α .
- (δ) Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X; Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X; U)$ και της παραμέτρου α .
- (ε) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X; U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X .