

3η σειρά ασκήσεων – MAC και Slepian-Wolf Παράδοση: Παρασκευή 20/6 (στο γραφείο μου)

Σημείωση: Ο σκοπός των ασκήσεων είναι να εξασκηθείτε και να προσδιορίσετε αν υπάρχουν έννοιες που δεν έχετε καταλάβει καλά. Η επίλυσή τους είναι προαιρετική και δεν επηρεάζουν τον τελικό βαθμό. Αν τις παραδώσετε μέχρι την προθεσμία (οπότε και θα ανακοινωθούν οι λύσεις) θα τις διορθώσω και μπορούμε να τις συζητήσουμε, αν θέλετε.

Με ► σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ ότι συμπληρώνουν τις διαλέξεις. Με * σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ πιο δύσκολες.

1. Ταυτότητα για το MAC (Cover & Thomas 15.27)

Έστω ότι συμβολίζουμε τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού με SNR x με $C(x) \triangleq \frac{1}{2} \log(1+x)$. Δείξτε ότι

$$C\left(\frac{P_1}{N}\right) + C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right) = C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right).$$

Επομένως, δύο ανεξάρτητοι χρήστες μπορούν να στέλνουν τόση πληροφορία όση και εάν είχαν ενώσει τις ισχύεις τους.

2. Διαμοιρασμός Συχνότητας (FDMA) (Cover & Thomas 15.28)

Θεωρούμε ότι δύο χρήστες μοιράζονται εύρος ζώνης W με χρήση FDMA.

Δείξτε ότι, για να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης

$$R_1 + R_2 = W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{NW_1}\right) + (W - W_1) \log\left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)}\right)$$

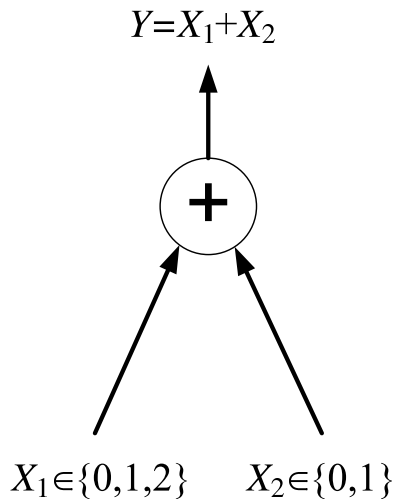
το εύρος ζώνης W πρέπει να μοιραστεί στους χρήστες αναλόγως με τις ισχύεις τους, P_i .

Υπόδειξη: Μεγιστοποιήστε ως προς W_1 . Εναλλακτικά, αντικαταστήστε με τη βέλτιστη τιμή του W_1 και δείξτε ότι βρίσκεται στο όριο της περιοχής χωρητικότητας του MAC (και, επομένως, δεν υπάρχει W_1 που επιτυγχάνει μεγαλύτερη τιμή του $R_1 + R_2$).

3. Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2009)

Στο κανάλι του Σχήματος 1, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα, $Y = X_1 + X_2$, των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντιστοίχως. Ο χρήστης 1 μεταδίδει ένα από τα σύμβολα 0, 1 και 2, ενώ ο χρήστης 2 το σύμβολο 0 ή το σύμβολο 1. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 1: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο.

- (α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i , σε κάθε περίπτωση.
- (β) Δώστε μια έκφραση για τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* $R_1 + R_2$ των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Η έκφραση αυτή μπορεί να είναι συνάρτηση εντροπιών (ή/και δεσμευμένων εντροπιών) τυχαίων μεταβλητών και θα πρέπει να έχει όσο γίνεται λιγότερους όρους. Προς το παρόν δε χρειάζεται να βρείτε κάποια τιμή για τη sum capacity.
- (γ) Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος δώστε ένα *άνω* φράγμα για τη sum capacity. Το φράγμα αυτό δεν είναι απαραίτητο να είναι επιτεύξιμο.
- (δ) Δώστε ένα παράδειγμα κατανομής $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ με την οποία μπορεί να επιτευχθεί η sum capacity. Συγκρίνετε με το *άνω* φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.
Υπόδειξη: Για να μην αναλωθείτε σε πράξεις και να απαντήσετε γρήγορα στο ερώτημα, προσπαθήστε να βρείτε εάν είναι δυνατόν ο κάθε χρήστης να μεταδίδει με $R_1 = R_2 = C_{\text{sum}}/2$.
- (ε) Υπάρχει τρόπος ο χρήστης 1 να μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό μετάδοσής του, $R_{1,\text{max}}$, και ο χρήστης 2 με $R_2 = C_{\text{sum}} - R_{1,\text{max}}$; Εάν ναι, με ποια κατανομή επιτυγχάνεται αυτό; Εάν όχι, με τι ισούται η διαφορά $C_{\text{sum}} - (R_{1,\text{max}} + R_2)$; Συγκρίνετε με την περίπτωση Γκαουσιανού MAC.

4. Slepian-Wolf (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2011)

Θεωρούμε δύο δυαδικές και ανεξάρτητες τ.μ. $Z_1 \sim \text{Bern}(1/2)$ και $Z_2 \sim \text{Bern}(1/2)$. Και οι δύο τ.μ. παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\}$.

- (α) Θέλουμε να συμπίεσουμε ανεξάρτητα το άθροισμα $X = Z_1 + Z_2$ και τη διαφορά $Y = Z_1 - Z_2$ (Προσοχή: η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι στο \mathbb{R}).
Βρείτε την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης (Slepian-Wolf).
- (β) Επαναλάβετε το Ερώτημα (α) αν οι Z_1 και Z_2 δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά έχουν από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας (p.m.f.) που δίνεται στον Πίνακα 1. Συγκρίνετε την περιοχή που προκύπτει με την περιοχή του Ερωτήματος (α).

	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 1$
$Z_1 = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Z_1 = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Πίνακας 1: Από κοινού κατανομή, $p_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2)$, των Z_1 και Z_2 .

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

- (γ) Συγκρίνετε τις περιοχές των Ερωτημάτων (α) και (β) με την περίπτωση που κωδικοποιούμε (ανεξάρτητα) απευθείας τις Z_1 και Z_2 (αντί για τις X και Y).