22A004 (eclass EE728) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας — Φυλλάδιο 8
Δ. Τουμπακάρης — 1 Μαΐου 2014

2η σειρά ασκήσεων – Κανάλια ενός χρήστη
Παράδοση: Τρίτη 27/5 (στο μάθημα ή στο γραφείο μου)

Σημείωση: Ο σκοπός των ασκήσεων είναι να εξασκηθείτε και να προσδιορίσετε αν υπάρχουν έννοιες που δεν έχετε καταλάβει καλά. Η επίλυσή τους είναι προαιρετική και δεν επηρεάζουν τον τελικό βαθμό. Αν τις παραδώσετε μέχρι την προθεσμία (οπότε και θα ανακοινωθούν οι λύσεις) θα τις διορθώσω και μπορούμε να τις συζητήσουμε, αν θέλετε.

Με ► σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ ότι συμπληρώνουν τις διαλέξεις. Με * σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ πιο δύσκολες.

1. **Υποβέλτιστοι κώδικες – Cover & Thomas 7.9**

   Θεωρήστε το κανάλι Z με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

   $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

   Έστω ότι κατασκευάζουμε τυχαίο κώδικα $\left(2^{nR}, n\right)$ με ρίψεις *αμερόληπτου* κέρματος. Με τον τρόπο αυτό δεν επιτυγχάνουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα (γιατί;). Βρείτε το μέγιστο εφικτό ρυθμό μετάδοσης, R, ώστε η *μέση* τιμή της πιθανότητας σφάλματος $P_e^{(n)}$ επί όλων των κωδίκων που κατασκευάζονται τυχαία με αμερόληπτες ρίψεις να τείνει στο 0 καθώς το μήκος, n, του κώδικα τείνει στο άπειρο.

2. **► Κανάλι – Cover & Thomas 7.12 (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

   Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

   $$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

   (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

   (β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

   Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

   (γ) Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

3. **Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (Π. Θ. Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

   Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

   Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1-\epsilon-\alpha \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

   (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;

   (β) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^*, με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).

   Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

   Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

   (γ) Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α.

   (δ) Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X;Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X;U)$ και της παραμέτρου α.

   (ε) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X;U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X.

4. **Waterfilling με περιορισμό μέγιστης ισχύος (Π. Θ. Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

   Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να μη θέλουμε να υπερβούμε μια συγκεκριμένη τιμή ισχύος στον πομπό, ακόμα και εάν η ισχύς είναι διαθέσιμη (για παράδειγμα, για λόγους λειτουργίας του ενισχυτή ή για να μην προκαλέσουμε παρεμβολές σε γειτονικές συνδέσεις). Στο πρόβλημα αυτό θα εξετάσουμε πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη λύση waterfilling για να ικανοποιήσουμε και ένα περιορισμό μέγιστης ισχύος εκπομπής, $P_{\mathrm{max},k}$, για κάθε χρήστη, k.

   Θεωρούμε παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια και *συνολική* διαθέσιμη ισχύ P. Η διασπορά του θορύβου σε κάθε κανάλι ισούται με N_k. Η διαθέσιμη ισχύς μπορεί να κατανεμηθεί στα κανάλια όπως επιθυμούμε, αρκεί, σε κάθε κανάλι, η ισχύς να μην υπερβαίνει μια μέγιστη τιμή $P_{\mathrm{max},k}$. Διευκρινίζεται ότι, στη γενική περίπτωση, η $P_{\mathrm{max},k}$ δεν είναι η ίδια για όλα τα κανάλια.

(α) Θεωρούμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση 2 χρηστών, δηλαδή $K = 2$. Επίσης, *μόνο* σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ότι *δεν* υπάρχει περιορισμός ισχύος, ή, ισοδύναμα, ότι $P_{\text{max},k} = P$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $N_2 \geq N_1$.

Δώστε μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τη χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από τα 2 παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της P.

(β) Θεωρήστε, τώρα, ότι ενδέχεται κάποιες από τις $P_{\text{max},k}$ (ή όλες) να είναι μικρότερες από P. Για το κανάλι 2 χρηστών ($K = 2$) βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τις $P_{\text{max},1}$ και $P_{\text{max},2}$ συναρτήσει των P, N_1 και N_2, ώστε οι περιορισμοί να μην επηρεάζουν τη χωρητικότητα, δηλαδή η χωρητικότητα για *δεδομένες* τιμές των P, N_1 και N_2 να ισούται με την τιμή που βρήκατε στο Ερώτημα (α).

Μπορείτε και πάλι να θεωρήσετε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N_2 \geq N_1$.

(γ) Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, θεωρούμε ότι $P_{\text{max},1} = P_{\text{max},2} = P_{\text{max}}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $P_{\text{max},1} + P_{\text{max},2} = 2P_{\text{max}} \geq P$, δηλαδή ότι όλη η συνολική ισχύς κατανέμεται, τελικά στα κανάλια.

Βρείτε τη χωρητικότητα των 2 παράλληλων καναλιών για οποιαδήποτε τιμή του P_{max} (δηλαδή, ακόμα και για τιμές που ενδέχεται να αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του Ερωτήματος (α)).

(δ) Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενική περίπτωση K χρηστών. Υποθέστε ότι, αρχικά, εκτελούμε τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι σε κάποια κανάλια έχουμε υπερβεί την $P_{\text{max},k}$. Υποθέστε ότι, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling έχει κατανεμηθεί μη μηδενική ισχύς σε όλα τα K κανάλια (δηλαδή $P_k > 0$ για όλα τα k). Υποθέστε, επίσης, ότι στα κανάλια όπου δεν έχουμε υπερβεί την $P_{\text{max},k}$ δεν υπάρχει περιορισμός ισχύος. Πώς πρέπει να κατανείμουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k \in \mathcal{O}} (P_k - P_{\text{max},k})$ στα υπόλοιπα κανάλια ώστε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης; ($\mathcal{O}$ είναι το σύνολο των καναλιών όπου ο αλγόριθμος waterfilling υπερέβη τις $P_{\text{max},k}$ και P_k οι λύσεις του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς).

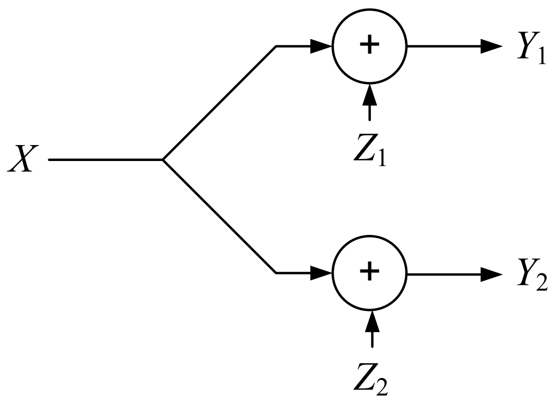
(ε) Προτείνετε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο waterfilling για την περίπτωση που έχουμε περιορισμούς ισχύος, $P_{\text{max},k}$, σε κάθε κανάλι. Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι υπάρχουν περιορισμοί σε όλα τα κανάλια. Επίσης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει περίπτωση μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς ισχύος κάποια κανάλια να μη χρησιμοποιούνται (δηλαδή να έχουμε $P_k = 0$).

5. **Ένας πομπός, πολλοί δέκτες (Π. Θ. Θ. Π. – Τελική Εξέταση Ιουνίου 2011)**

Θεωρούμε έναν πομπό που μεταδίδει σε δύο δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σε κάθε δέκτη προστίθεται πραγματικός Γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και , $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Οι θόρυβοι είναι *ανεξάρτητοι* μεταξύ τους.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$.

(α) Αρχικά θεωρούμε ότι η ανίχνευση μπορεί να γίνει *από κοινού* (jointly) με χρήση των σημάτων και των δύο δεκτών. Δηλάδη οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, τα σήματά τους αποστέλλονται σε κάποιο κέντρο επεξεργασίας.



Σχήμα 1: Μετάδοση σε 2 δέκτες.

Αν επιβάλουμε περιορισμό μέσης ισχύος στον πομπό $\mathbb{E}\left[X^2\right] \leq P$ και $X \in \mathbb{R}$, βρείτε τη χωρητικότητα C_{joint} του καναλιού μεταξύ του πομπού και των δύο δεκτών, καθώς και την κατανομή της X με την οποία επιτυγχάνεται.

(β) Έστω ότι θέτουμε τον εξής περιορισμό στους δέκτες: Η αποκωδικοποιήση πρέπει να βασιστεί στο σήμα $\tilde{Y} = aY_1 + (1-a)Y_2$ με δεδομένο $0 \leq a \leq 1$. Δηλαδή, αντί να έχουμε απευθείας πρόσβαση στο σήμα κάθε δέκτη (δηλαδή στο διάνυσμα $\mathbf{Y} = [Y_1 \, Y_2]^T$), έχουμε πρόσβαση μόνο στο $\tilde{Y}$.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{lin-comb}}$, του καναλιού μεταξύ της X και της˜για δεδομένο a.

Αλλάζει η απάντησή σας αν $\tilde{Y} = aY_1 + bY_2$ με $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = c > 1$, όπου c σταθερά;

(γ) Επιλέξτε την τιμή του $0 \leq a \leq 1$ που μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$ και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Σχολιάστε.

(δ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, $C_{\text{separate}} = C_{\text{separate},1} + C_{\text{separate},2}$, που μπορούμε να πετύχουμε αν η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνει ξεχωριστά σε κάθε δέκτη, αν, δηλαδή, δεν επιτρέπεται συνεργασία (από κοινού αποκωδικοποίηση). Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).