1η σειρά ασκήσεων – Εντροπία και Τυπικότητα
Παράδοση: Τρίτη 29/4 (στο μάθημα ή στο γραφείο μου)

Σημείωση: Ο σκοπός των ασκήσεων είναι να εξασκηθείτε και να προσδιορίσετε αν υπάρχουν έννοιες που δεν έχετε καταλάβει καλά. Η επίλυσή τους είναι προαιρετική και δεν επηρεάζουν τον τελικό βαθμό. Αν τις παραδώσετε μέχρι την προθεσμία (οπότε και θα ανακοινωθούν οι λύσεις) θα τις διορθώσω και μπορούμε να τις συζητήσουμε, αν θέλετε.

Με ► σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ ότι συμπληρώνουν τις διαλέξεις. Με * σημειώνονται ασκήσεις που θεωρώ πιο δύσκολες.

1. **Επεξεργασία Δεδομένων – Cover & Thomas 2.15 – ΠΘΘΠ**

   Έστω ότι οι τ.μ. $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_n$ σχηματίζουν αλυσίδα Markov, δηλαδή $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\ldots p(x_n|x_{n-1})$. Βρείτε την πιο απλή έκφραση που μπορείτε για την $I(X_1; X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

2. *** Μεταβολή εντροπίας (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

   Θεωρήστε μια κατανομή $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ με $N \geq 2$ ενδεχόμενα, όλα *μη μηδενικής πιθανότητας*, δηλαδή $p_n > 0\, \forall n$. Θα δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε κατανομή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, έστω K, το οποίο αν αφαιρέσουμε θα ελαττώσουμε την εντροπία. Δηλαδή, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα p_k έτσι ώστε, αν $\mathbf{p}' = \left(\frac{p_1}{1-p_K}, \frac{p_2}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_{K-1}}{1-p_K}, \frac{p_{K+1}}{1-p_K}, \ldots, \frac{p_N}{1-p_K}\right)$, $H(\mathbf{p}') < H(\mathbf{p})$.

   (α) Δείξτε ότι δεν μπορούμε πάντοτε να ελαττώσουμε την εντροπία αν επιλέξουμε το ενδεχόμενο τυχαία. Δηλαδή, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες υπάρχει p τέτοιο ώστε $H(\mathbf{p}') > H(\mathbf{p})$.

   (β) Στη συνέχεια θα αποδείξετε ένα λήμμα που θα σας βοηθήσει να αποδείξετε το ζητούμενο. Δείξτε ότι, για $p \in (0, 1/2]$, η συνάρτηση $\frac{H(p)}{p}$, όπου $H(p) \triangleq -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

   (γ) Εξηγήστε γιατί, σε μία οποιαδήποτε κατανομή με ενδεχόμενα, $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όλα *μη μηδενικά*, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο, L, με $p_L \leq \frac{1}{N}$.

   (δ) Χρησιμοποιώντας τα Ερωτήματα (β) και (γ) (ή κάποιον άλλο τρόπο, αν προτιμάτε) αποδείξτε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ενδεχόμενο, K, το οποίο αν αφαιρεθεί η εντροπία της κατανομής μειώνεται.

3. **Όριο γινομένου – Cover & Thomas 3.8**

   Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2} \\ 2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \\ 3 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-1} \cdot X_n)^{1/n}$.

4. **AEP και Σχετική Εντροπία – Cover & Thomas 3.9**

   Έστω ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d) διακριτές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή με μάζα πιθανότητας $p(x)$ και $|\mathcal{X}| < \infty$. Επομένως, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$. Είδαμε ότι $-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \rightarrow H(X)$ κατά πιθανότητα. Έστω, τώρα, μια άλλη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ ορισμένη στον ίδιο δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$ με την $p(x)$, και $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} q(x_i)$.

   (α) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εάν οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$.

   (β) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log \frac{q(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ (log-likelihood), όπου, και πάλι, οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$. Επομένως, η πιθανότητα να θεωρήσουμε ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή $q(x)$ (αντί για $p(n)$) ελαττώνεται εκθετικά με το n και με ρυθμό ανάλογο της $D(p||q)$.

5. **AEP (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π. Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)**

   Θεωρούμε την τ.μ. X με τιμές στο σύνολο $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(0) = 1/2$, $p(1) = p(2) = 1/4$. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι τυπικές σύμφωνα με τον ορισμό της ασθενούς τυπικότητας που δώσαμε στο μάθημα; Θεωρήστε $\epsilon = 0$. Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας.

   (α) 1 2 0 0 0 0 2 1

   (β) 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2

   (γ) 0 1 2 0 0 2 0 0 2 0 2 2

6. **Αποταμίευση (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π. Τελική Εξέταση Ιουνίου 2009)**

   Ένας καταθέτης ανοίγει λογαριασμό με αρχικό κεφάλαιο $X_0 = 1000$ και *μηνιαίο* επιτόκιο 1%. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο αυτό είναι εγγυημένο για όσο παραμένει ανοικτός ο λογαριασμός, δηλαδή δε μεταβάλλεται. Επίσης, θεωρούμε ότι ο τόκος υπολογίζεται στο τέλος κάθε μήνα. Στο τέλος κάθε μήνα ο καταθέτης έχει την επιλογή να εισπράξει τον τόκο ή να τον αφήσει στο λογαριασμό, οπότε αυτός προστίθεται στο υπάρχον κεφάλαιο. Θεωρούμε, τέλος, ότι δεν επιτρέπεται στον καταθέτη να εισπράξει ποσό διαφορετικό από τον τόκο στο τέλος κάθε μήνα (ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο). Δηλαδή ο καταθέτης πρέπει να εισπράξει είτε τον τόκο του μήνα ή τίποτα.

   (α) Εάν σε σύνολο N μηνών ο καταθέτης έχει εισπράξει τον τόκο K φορές, δώστε μια έκφραση για το κεφάλαιο, X_N, στο τέλος του $N-$οστού μήνα. Θεωρούμε ότι η X_N ισούται με το κεφάλαιο που απομένει *μετά* από την είσπραξη του τόκου, εφόσον αυτή γίνει. Εάν ο καταθέτης δεν εισπράξει ποτέ τους τόκους, μετά από πόσους μήνες θα έχει διπλασιάσει το αρχικό κεφάλαιο; Δίνεται ότι $1/\log_2(1.01) \approx 69.66$.

   (β) Θεωρούμε, τώρα, ότι ο καταθέτης ενδέχεται να έχει ανάγκη τους τόκους, με αποτέλεσμα να τους εισπράττει στο τέλος κάθε μήνα με πιθανότητα $1/4$. Η απόφαση αν θα εισπράξει τους τόκους το μήνα i είναι ανεξάρτητη από την απόφασή του το μήνα $j \neq i$.

Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_N)$;

Με τι ισούται ο ρυθμός εντροπίας, $H(\mathcal{X})$;

Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_N)$, για κάποιο $0 < j < N$;

Δίνεται $\log_2 3 \approx 1.585$.

(γ) Δύο φοιτήτριες προσπαθούν να εκτιμήσουν πόσοι μήνες θα χρειαστούν ώστε ο καταθέτης να καταφέρει να *οκταπλασιάσει* το αρχικό του κεφάλαιο. Η εκτίμηση της πρώτης είναι ότι αυτό θα έχει συμβεί σχεδόν σίγουρα σε 209 μήνες. Η δεύτερη ισχυρίζεται ότι η εκτίμηση αυτή είναι παρακινδυνευμένη και υποθέτει ότι θα πρέπει να περιμένουμε τουλάχιστον 279 μήνες. Ποια από τις δύο εκτιμήσεις είναι ορθότερη; Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρούμε ότι, στο τέλος κάθε μήνα, ο καταθέτης εισπράττει τους τόκους με πιθανότητα $1/4$.

(*δ) Δώστε μια έκφραση για την τιμή της $H(X_N)$ για $N \to \infty$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η έκφραση που θα προκύψει είναι συνάρτηση του N.

7. **Μπρίτζ (Τελική Εξέταση Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Ιούνιος 2011)**

Το μπριτζ παίζεται με μία τράπουλα 52 χαρτιών.

Ένα *χέρι* (hand) είναι οποιοσδήποτε συνδυασμός 13 χαρτιών.

Η *διανομή* (deal) είναι οποιαδήποτε διαμέριση της τράπουλας σε 4 χέρια.

Ένας απλός τρόπος για να αναπαραστήσουμε ένα χέρι είναι αντιστοιχίζοντας ένα μοναδικό αριθμό 6 bits σε κάθε χαρτί. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται 78 bits για να περιγράψουν ένα συγκεκριμένο χέρι. (Αυτό που οι Μηχανικοί Επικοινωνιών ονομάζουν Pulse Coded Modulation – PCM).

(α) Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε *δυαδική* περιγραφή ενός αυθαίρετου χεριού δεν μπορεί να χρησιμοποιεί λιγότερα από *περίπου* $52 H_b\left(\frac{1}{4}\right) \approx 42$ bits, όπου $H_b(p) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$ η εντροπία δυαδικής τ.μ. $\sim$ Bern(p).

Υπόδειξη: Βρείτε, πρώτα, μία περιγραφή χρησιμοποιώντας 52 bits.

(β) Δείξτε ότι δεν μπορούμε να περιγράψουμε μία αυθαίρετη διανομή με λιγότερα από 104 bits. Δώστε μία αναπαράσταση με χρήση 104 bits.

Επιπλέον μονάδες αν δώσετε και δεύτερο τρόπο αναπαράστασης με χρήση 104 bits.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $H_b\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

(γ) Δείξτε ότι για να περιγραφούν δύο χέρια χρειάζονται περίπου 78 bits. Δώστε έναν τρόπο περιγραφής με χρήση 78 bits.