22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Τελική Εξέταση

• Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 12 σελίδες – ελέγξτε το!)

• Βαθμός εξέτασης = min$\{$μονάδες$/10,\ 10\}$. Σύνολο μονάδων: 110.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα θα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Παρακαλείστε να επισυνάψετε ΟΛΑ τα πρόχειρα που χρησιμοποιήσατε κατά τη διάρκεια της εξέτασης.

• Παρακαλείστε να γράφετε το όνομά σας και να αριθμείτε άμεσα όλα τα φύλλα που σας δίνονται από τον επιτηρητή, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Σύμφωνα με το Άρθρο 50 παρ. 6 του Εσωτερικού Κανονισμού Λειτουργίας του Πανεπιστημίου Πατρών και το Νόμο, απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Παρακαλώ συμπληρώστε το όνομά σας στο παρακάτω εδάφιο. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα όταν τελειώσετε. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Όνομα: ______________________________

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	20
2ο θέμα	25
3ο θέμα	25
4ο θέμα	40

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Απόσταση μεταβολής μεταξύ δύο κατανομών (20 μονάδες)**

   Η απόσταση μεταβολής (variation distance) μεταξύ δύο διακριτών κατανομών **p** και **q** που ορίζονται στο ίδιο αλφάβητο, $\mathcal{X}$, ορίζεται ως

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} |p(x) - q(x)| \,.$$

   Σας ζητείται να δείξετε ότι, εάν $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \Theta \leq \frac{1}{2}$,

$$|H(\mathbf{p}) - H(\mathbf{q})| \leq -\Theta \log \frac{\Theta}{|\mathcal{X}|}.$$

   Δηλαδή, η απόσταση μεταβολής μεταξύ δύο κατανομών παρέχει ένα άνω φράγμα για τη διαφορά των εντροπιών τους.

   (α) **(5 μονάδες)**
   Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t) = -t \log t$, $t \geq 0$, είναι κοίλη $\cap$ (concave).

   Μπορεί, επίσης, να αποδειχτεί ότι, επειδή η $f(t) = -t \log t$ είναι κοίλη $\cap$ και επειδή $f(0) = f(1) = 0$, για $0 \leq t \leq 1$ και $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$,

$$|f(t) - f(t+\tau)| \leq \max\{f(\tau), f(1-\tau)\} = -\tau \log \tau.$$

   Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή αποδεικνύεται ότι, για $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$,

$$-\tau \log \tau \geq -(1-\tau) \log(1-\tau).$$

   (β) **15 μονάδες)**
   Στη συνέχεια, ορίζουμε τη $\theta(x) \triangleq |p(x) - q(x)|$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$. Υπενθυμίζεται ότι $f(t) = -t \log t$ και ότι έχουμε υποθέσει ότι $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \theta(x) = \Theta \leq \frac{1}{2}$.
   Δικαιολογήστε τα παρακάτω βήματα

$$\begin{aligned}
|H(\mathbf{p}) - H(\mathbf{q})| &\overset{(a)}{\leq} \sum_{x \in \mathcal{X}} |f(p(x)) - f(q(x))| \\
&\overset{(b)}{\leq} -\sum_{x \in \mathcal{X}} \theta(x) \log \theta(x) \\
&= \Theta \left(-\sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{\theta(x)}{\Theta} \log \frac{\theta(x)}{\Theta} - \log \Theta \right) \\
&\overset{(c)}{\leq} \Theta \log |\mathcal{X}| - \Theta \log \Theta \\
&= -\Theta \log \frac{\Theta}{|\mathcal{X}|}.
\end{aligned}$$

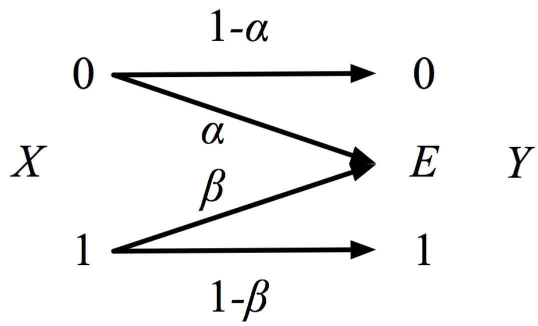
Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

2. **Χωρητικότητα καναλιών (25 μονάδες)**

   Στην άσκηση αυτή ζητείται να συγκρίνετε χωρητικότητες καναλιών και να υπολογίσετε φράγματα.

   Υπόδειξη: Τα δύο ερωτήματα είναι (σχετικά) ανεξάρτητα μεταξύ τους.

   (α) **(15 μονάδες)**
   Θεωρήστε το κανάλι διαγραφής του Σχήματος 1 με *μη* συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.
   Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\beta \geq \alpha$.



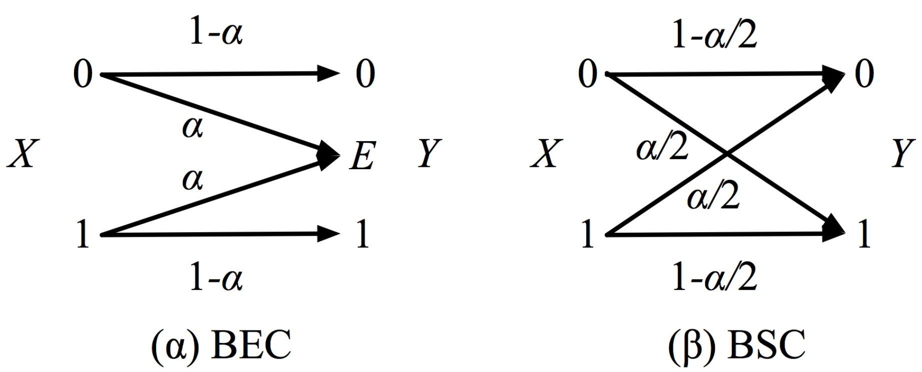
Σχήμα 1: Δυαδικό κανάλι με μη συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.

   Δείξτε ότι η χωρητικότητα του καναλιού, έστω $C(\alpha, \beta)$, ικανοποιεί τη σχέση

$$C_Z(\alpha) \leq C(\alpha, \beta) \leq 1 - \alpha,$$

   όπου $C_Z(\alpha)$ η χωρητικότητα του καναλιού Ζ με πιθανότητα αναστροφής συμβόλου α.
   Υπόδειξη: Δημιουργήστε κάποια ‘‘ενδιάμεσα’’ κανάλια και χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

   (β) **(10 μονάδες)**



Σχήμα 2: BEC και BSC με $f = \alpha/2$.

Θεωρήστε το δυαδικό κανάλι διαγραφής με συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής (BEC) του Σχήματος 2(α). Ζητείται να αποδείξετε ότι

$$C_{BEC}(\alpha) \geq C_{BSC}(\alpha/2)$$

για όλες τις τιμές της παραμέτρου $0 \leq \alpha \leq 1$, όπου $C_{BSC}(\alpha/2)$ είναι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού του Σχήματος 2(β) (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ίση με $\alpha/2$.

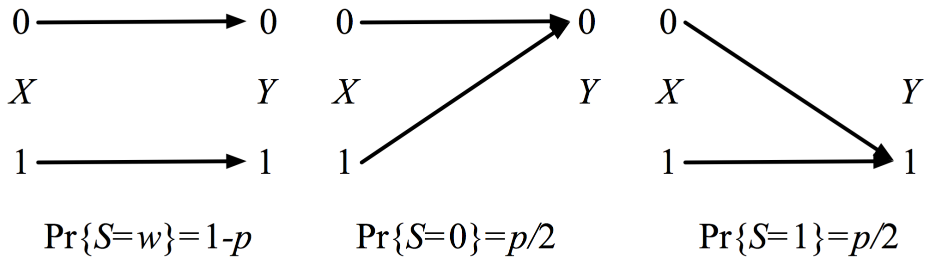
Πότε ισχύει η ισότητα;

Παρατηρήστε ότι, παρόλο που στο BEC γνωρίζουμε πότε έχει συμβεί διαγραφή, στο BSC τα σύμβολα μεταδίδονται αυτούσια με μεγαλύτερη πιθανότητα, οπότε δεν είναι προφανές ότι $C_{BEC}(\alpha) \geq C_{BSC}(\alpha/2)$.

Υπόδειξη: Για να αποφύγετε πράξεις, εκφράστε το BSC ως διαδοχή του BEC του Σχήματος 2(α) και ενός δεύτερου καναλιού χωρίς μνήμη με κατάλληλες παραμέτρους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

3. **Γνώση κατάστασης καναλιού στον πομπό ή/και στο δέκτη (30 μονάδες)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε μία από 3 πιθανές καταστάσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Κανάλι με 3 διαφορετικές καταστάσεις.

Θεωρούμε ότι κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το κανάλι, αυτό βρίσκεται σε μία από τις 3 καταστάσεις $S = w, 0$ ή 1 και ότι η κατάσταση μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο μεταξύ διαδοχικών μεταδόσεων. Δηλαδή, η κατάσταση S_n κατά τη $n-$στή χρήση είναι τ.μ. με κατανομή

$$p_S(s) = \begin{cases} 1-p & \text{για} \quad s = w \\ p/2 & \text{για} \quad s = 0 \\ p/2 & \text{για} \quad s = 1 \end{cases}$$

και οι S_n είναι i.i.d.

Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να μοντελοποιήσουμε μία μνήμη N δυαδικών κυττάρων στα οποία μπορούμε να εγγράψουμε την τιμή ενός bit (0 ή 1). Το $100(1-p)$ % των κυττάρων είναι αξιόπιστα, ενώ το $100p$ % είναι ελαττωματικά. Από τα ελαττωματικά κύτταρα, τα μισά είναι “κολλημένα” στο 0, ενώ τα άλλα μισά στο 1.

Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση το n υποδηλώνει χώρο αντί για χρόνο.

Στη συνέχεια, για να διευκολυνθεί η επίλυση θεωρήστε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι σε όλη την άσκηση αναφερόμαστε σε αυτή τη μνήμη N δυαδικών κυττάρων (και, επομένως, bits). Δηλαδή το n είναι ο αριθμός του κυττάρου και όχι κάποια χρονική στιγμή.

(α) **(4 μονάδες)**

Υποθέστε, αρχικά, ότι ούτε ο πομπός, αλλά ούτε και ο δέκτης γνωρίζουν την κατάσταση, S_n, του καναλιού (δηλαδή δε γνωρίζουν αν ένα δεδομένο κύτταρο, n, είναι ελαττωματικό).

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{no CSI}}$, του καναλιού.

Εδώ η χωρητικότητα είναι ο αριθμός των bits (≤ 1) που μπορούμε να αποθηκεύσουμε κατά μέσο όρο σε κάθε κύτταρο. Δηλαδή, ο αριθμός bits που μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε όλη τη μνήμη ισούται με $N \cdot C_{\text{no CSI}}$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως BSC. Η απάντησή σας μπορεί να περιέχει όρους της μορφής $H(\mathbf{p})$, όπου **p** διακριτή κατανομή.

(β) **(2 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι τόσο ο πομπός όσο και ο δέκτης γνωρίζουν την τιμή της κατάστασης S_n για όλα τα n.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{full CSI}}$, του καναλιού. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Κερδίζουμε σε χωρητικότητα όταν πομπός και δέκτης γνωρίζουν την κατάσταση του καναλιού;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο Ερώτημα (β) της Άκησης 2.

(γ) **(4 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης γνωρίζει την τιμή της S_n, αλλά όχι ο πομπός.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{receiver CSI}}$, του καναλιού. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (β). Έχουμε απώλεια χωρητικότητας όταν μόνο ο δέκτης (αλλά όχι ο πομπός) γνωρίζει την κατάσταση του καναλιού;

(δ) **(15 μονάδες)**

Έστω, τώρα, ότι ο πομπός γνωρίζει την S_n, αλλά όχι ο δέκτης. Δηλαδή το κύκλωμα εγγραφής μπορεί να μπορεί να εντοπίσει εάν ένα κύτταρο μνήμης είναι ελαττωματικό. Ωστόσο, το κύκλωμα ανάγνωσης δεν είναι σε θέση να γνωρίζει αν η τιμή του κάθε κυττάρου έχει προέλθει από ελάττωμα ή από εγγραφή δεδομένων.

Θεωρούμε τον εξής τρόπο κωδικοποίησης

i. Κατασκευάζουμε όλες τις 2^N δυαδικές ακολουθίες (όπου N ο αριθμός των κυττάρων της μνήμης).
ii. Τοποθετούμε τις ακολουθίες με *τυχαίο* και *ανεξάρτητο* τρόπο σε 2^{NR} bins, όπου $0 < R \leq 1$. Αποκαλύπτουμε την αντιστοίχιση σε πομπό και δέκτη.
iii. Για να στείλουμε ένα από 2^{NR} μηνύματα, έστω το μήνυμα m, στέλνουμε μια ακολουθία από το bin m της οποίας τα ψηφία στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική ταυτίζονται με τα ελαττώματα της μνήμης. Για παράδειγμα, αν $N = 10$ και οι καταστάσεις των κυττάρων της μνήμης είναι $S_1^{10} = www0w01www$, επιλέγουμε μια ακολουθία από το bin m (εάν υπάρχει) η οποία έχει ‘0’ στις θέσεις 4 και 6 και ‘1’ στη θέση 7. Οι άλλες θέσεις μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή, αρκεί η ακολουθία να προέρχεται από το bin m.
iv. Επειδή τα ψηφία στις μη ελαττωματικές θέσεις θα μεταδοθούν αυτούσια, ο δέκτης λαμβάνει (διαβάζει) ακριβώς την ακολουθία που στείλαμε (γράψαμε). Επομένως, είναι σε θέση να βρει σε ποιο bin, m, ανήκει η ακολουθία. Συνεπώς, μπορούμε να μεταδώσουμε το δείκτη του bin, δηλαδή ένα από 2^{NR} μηνύματα. Δηλαδή, η πληροφορία είναι το *bin* στο οποίο ανήκει η κωδική λέξη που γράφουμε στη μνήμη και όχι η ίδια η κωδική λέξη.

Απομένει να βρούμε τις τιμές του R έτσι ώστε, για δεδομένα ελαττώματα μνήμης, να μπορούμε να βρούμε μέσα σε *κάθε* ένα από τα 2^{NR} bins τουλάχιστον μία ακολουθία οι τιμές της οποίας να ταυτίζονται με τα ελαττώματα της μνήμης (στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική).

(Συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα)

(δ1) (2 μονάδες)
Για δεδομένο p και για $N \to \infty$ πόσες είναι (προσεγγιστικά) οι θέσεις της μνήμης με ελάττωμα;

(δ2) (5 μονάδες)
Για $N \to \infty$ και για *δεδομένα* ελαττώματα στη μνήμη (δηλαδή για *δεδομένη* ακολουθία S_1^N) πόσες από τις 2^N δυαδικές ακολουθίες μήκους N έχουν τις ίδιες τιμές με τα ελαττώματα της μνήμης στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική;
Υπόδειξη: Πρόκειται για ερώτημα συνδυαστικής.

(δ3) (6 μονάδες)
Οι ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) έχουν διαμοιραστεί τυχαία στα 2^{NR} bins κατά τη δημιουργία του κώδικα. Εμείς έχουμε επιλέξει ένα bin m (το οποίο εξαρτάται από την πληροφορία που θέλουμε να μεταδώσουμε, δηλαδή δεν μπορούμε να επηρεάσουμε την τιμή του m) και θέλουμε να μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία από τις ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) μέσα στο bin. Βρείτε την τιμή του R ώστε, για $N \to \infty$ το bin να περιέχει μια από τις ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) με πιθανότητα που τείνει στο 1.

(δ4) (2 μονάδες)
Τι συμπεραίνετε για τη χωρητικότητα του καναλιού, $C_{\text{transmitter CSI}}$, όταν μόνο ο πομπός (αλλά όχι ο δέκτης) γνωρίζει την κατάσταση, S_n; Συγκρίνετε με την απάντησή σας στα Ερωτήματα (β) και (γ).

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

4. **Κατανομή ισχύος μεταξύ πομπών Γκαουσιανού MAC 2 χρηστών (40 μονάδες)**

   Θεωρούμε το Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών, η έξοδος $\tilde{Y}$ του οποίου, συναρτήσει των εισόδων X_1 και X_2 δίνεται από τη σχέση

   $$\tilde{Y} = \tilde{h}_1 X_1 + \tilde{h}_2 X_2 + \tilde{Z}, \ \ \tilde{Z} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

   (α) **(5 μονάδες)**

   Βρείτε την περιοχή χωρητικότητας του καναλιού εάν η διαθέσιμη ισχύς στον πομπό 1 και 2 είναι P_1 και P_2 αντιστοίχως.

   Επίσης, δείξτε ότι υπάρχουν h_1 και h_2 τα οποία είναι συναρτήσεις των $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ και σ τέτοια ώστε το *ισοδύναμο* Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών

   $$Y = h_1 X_1 + h_2 X_2 + Z$$

   με $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ να έχει την ίδια περιοχή χωρητικότητας με το αρχικό κανάλι.

   Υπόδειξη: Σκεφτείτε ποια είναι η ισχύς που λαμβάνει ο δέκτης από κάθε πομπό.

   Στη συνέχεια της άσκησης, για διευκόλυνση των πράξεων, θα χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο κανάλι $Y = h_1 X_1 + h_2 X_2 + Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ αντί για το αρχικό.

   (β) **(5 μονάδες)**

   Έστω ότι διαθέτουμε συνολική ισχύ P και για τους δύο χρήστες. Δηλαδή, παρόλο που οι δύο χρήστες δεν μπορούν να συνεργαστούν για τη μετάδοση, μπορούμε να κατανείμουμε εκ των προτέρων στον καθένα τους μέρος της συνολικής ισχύος. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $P_1 = 2P/3$ και $P_2 = P/3$ ή $P_1 = P$ και $P_2 = 0$ κτλ.

   Υποθέτουμε, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $|h_1| \geq |h_2|$.

   Εάν ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα $R_1 + R_2$ (το λεγόμενο sum capacity) πώς πρέπει να κατανείμουμε την ισχύ στους δύο χρήστες;

   (γ) **(5 μονάδες)**

   Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το *σταθμισμένο* άθροισμα (weighted sum)

   $$R_1 + \mu R_2,$$

   όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\mu > 1$. Δηλαδή, δίνουμε μεγαλύτερο βάρος στο ρυθμό μετάδοσης του χρήστη 2 (ο οποίος έχει "χειρότερο" κανάλι, δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει ότι $|h_1| \geq |h_2|$).

   Έστω ότι γνωρίζουμε ότι το μέγιστο ισούται με w, δηλαδή ότι $\max\{R_1 + \mu R_2\} = w$. Αυτό σημαίνει ότι, για τα συγκεκριμένα P_1 και P_2 με τα οποία επιτυγχάνεται το w, η ευθεία $R_1 + \mu R_2 = w$ εφάπτεται σε ένα σημείο της περιοχής χωρητικότητας. (γιατί δεν την τέμνει;) Ποιο είναι αυτό το σημείο, έστω $A = (R_{1A}, R_{2A})$;

   Υπενθυμίζεται ότι έχουμε υποθέσει ότι $\mu > 1$ και $|h_1| \geq |h_2|$.

   (δ) **(5 μονάδες)**

   Με βάση τις συντεταγμένες του σημείου A στο οποίο η περιοχή χωρητικότητας εφάπτεται στην ευθεία $R_1 + \mu R_2 = w$ δώστε μια έκφραση για το σταθμισμένο άθροισμα $R_1 + \mu R_2$. Προς το παρόν θεωρήστε ότι δε γνωρίζουμε τη βέλτιστη τιμή των P_1 και P_2, οπότε χρησιμοποιήστε γενική παράμετρο P_2 και $P_1 = P - P_2$.

Υπόδειξη: Η έκφραση απλουστεύεται χρησιμοποιώντας την (τετριμμένη) σχέση $R_{1A} = (R_{1A} + R_{2A}) - R_{2A}$.

(ε) **(5 μονάδες)**

Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο Ερώτημα (δ) περιγράψτε πώς μπορούμε να βρούμε την τιμή της P_2. Δε χρειάζεται να λύσετε ως προς P_2, απλώς να περιγράψετε τι θα κάνατε για να υπολογίσετε την P_2 (και, επομένως, και την P_1).

Υπολογίστε την P_2 για τις εξής περιπτώσεις:

i. $\mu = 2$, $h_1 = \sqrt{2}h_2$.

ii. $\mu = 1.5$, $h_1 = \sqrt{2}h_2$, $h_2 = \sqrt{\frac{1}{P}}$.

(στ) **(15 μονάδες)**

Τέλος, έστω ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης έτσι ώστε $R_1 = R_2$. Δηλαδή, έχουμε το εξής πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$C_{eq} = \max\{R : R_1 = R_2 = R\}.$$

Πώς μπορούμε να βρούμε τις τιμές P_1 και P_2 που επιτυγχάνουν τη C_{eq}; Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, αρκεί να περιγράψετε τι θα κάνατε, όχι να βρείτε εκφράσεις για τις P_1 και P_2.

Υπόδειξη: Θέλουμε να βρούμε το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα επάνω στην ευθεία $R_1 = R_2$ το ένα άκρο του οποίου είναι η αρχή των αξόνων και το άλλο ένα σημείο της περιοχής χωρητικότητας για τις τιμές των P_1 και P_2. Σχεδιάστε τις περιοχές χωρητικότητας για συγκεκριμένα $|h_1|$ και $|h_2|$, $|h_1| \geq |h_2|$ και παρατηρήστε τι συμβαίνει καθώς μεταβάλλεται π.χ. η P_1 για $P = P_1 + P_2$.