22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Ενδεικτικές Λύσεις Τελικού Διαγωνίσματος

1. **Μπρίτζ (25 μονάδες + 5 επιπλέον)**

   Το μπριτζ παίζεται με μία τράπουλα 52 χαρτιών.

   Ένα *χέρι* (hand) είναι οποιοσδήποτε συνδυασμός 13 χαρτιών.

   Η *διανομή* (deal) είναι οποιαδήποτε διαμέριση της τράπουλας σε 4 χέρια.

   Ένας απλός τρόπος για να αναπαραστήσουμε ένα χέρι είναι αντιστοιχίζοντας ένα μοναδικό αριθμό 6 bits σε κάθε χαρτί. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται 78 bits για να περιγράψουν ένα συγκεκριμένο χέρι. (Αυτό που οι Μηχανικοί Επικοινωνιών ονομάζουν Pulse Coded Modulation – PCM).

   (α) **(10 μονάδες)**

   Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε *δυαδική* περιγραφή ενός αυθαίρετου χεριού δεν μπορεί να χρησιμοποιεί λιγότερα από *περίπου* $52H_b\left(\frac{1}{4}\right) \approx 42$ bits, όπου $H_b(p) = p\log\frac{1}{p} + (1-p)\log\frac{1}{1-p}$ η εντροπία δυαδικής τ.μ. $\sim \mathrm{Bern}(p)$.

   Υπόδειξη: Βρείτε, πρώτα, μία περιγραφή χρησιμοποιώντας 52 bits.

   Απάντηση:

   Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε χέρι ως μία δυαδική ακολουθία 52 bits με '1' όταν ένα χαρτί βρίσκεται μέσα στο χέρι και '0' αλλιώς. Η περιγραφή αυτή είναι 1-προς-1, δηλαδή μπορούμε να βρούμε το χέρι από την περιγραφή και αντιστρόφως. Επομένως, μπορούμε να φανταστούμε ένα χέρι ως την έξοδο μίας πηγής που παράγει μία από $\binom{52}{13}$ ακολουθίες μήκους 52. Η πιθανότητα ένα συγκεκριμένο χαρτί να είναι στο χέρι είναι 1/4. Επομένως, οι τυπικές ακολουθίες είναι $\approx 2^{52H_b(1/4)}$ και χρειαζόμαστε $\approx 52H_b\left(\frac{1}{4}\right)$ bits για να τις αναπαραστήσουμε. Βέβαια, η πηγή δεν είναι χωρίς μνήμη γιατί γνωρίζουμε ότι θα παραχθούν ακριβώς 13 '1' (και ακριβώς 39 '0'), γι' αυτό και το αποτέλεσμα είναι προσεγγιστικό.

   (β) **(8 μονάδες + 5 επιπλέον)**

   Δείξτε ότι δεν μπορούμε να περιγράψουμε μία αυθαίρετη διανομή με λιγότερα από 104 bits. Δώστε μία αναπαράσταση με χρήση 104 bits.

   Επιπλέον μονάδες αν δώσετε και δεύτερο τρόπο αναπαράστασης με χρήση 104 bits. Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $H_b\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Θεωρούμε, και πάλι, ακολουθία 52 συμβόλων, αλλά αυτή τη φορά με τετραδικές τιμές. Ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε χαρτί δηλώνει το χέρι στο οποίο βρίσκεται το χαρτί. Δεδομένου ότι ένα χαρτί μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε από τα 4 χέρια με την ίδια πιθανότητα, οι τυπικές ακολουθίες είναι $\approx 2^{52\log_2 4} = 2^{104}$ και χρειαζόμαστε περίπου 104 bits για να τις αναπαραστήσουμε.

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης είναι ο εξής:

• Χρησιμοποιούμε την ακολουθία 52 bits του Ερωτήματος (α) για να περιγράψουμε ποια χαρτιά ανήκουν στο 1ο χέρι $\rightarrow \approx 52H_b(1/4) \approx 42$ bits.

• Χρησιμοποιούμε ακολουθία 39 bits που αντιστοιχούν στα χαρτιά που δεν είναι στο 1ο χέρι (ο δέκτης μπορεί να βρει την αντιστοίχιση γιατί έχει, πρώτα, διαβάσει την 1η ακολουθία των 52 bits) $\rightarrow \approx 39H_b(1/3) \approx 36$ bits.

• Χρησιμοποιούμε ακολουθία 26 bits που αντιστοιχούν στα χαρτιά που δεν είναι στο 1ο ή στο 2ο χέρι $\rightarrow \approx 26H_b(1/2) \approx 26$ bits.

Σύνολο: ≈ 104 bits.

Εναλλακτικά μπορούμε να "τελειώνουμε" με κάθε χαρτί πριν προχωρήσουμε. Δηλαδή να ρωτάμε αν ένα χαρτί ανήκει στην 1η διανομή, αν όχι, αν ανήκει στη 2η κτλ. Οπότε, χρειαζόμαστε $H_b\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}H_b\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}H_b\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ bits ανά διανομή. Στην ουσία, όμως, αυτή η προσέγγιση είναι ίδια με το 2ο τρόπο αν τη δούμε ως κωδικοποίηση σταθερού μήκους πολλών χαρτιών μαζί.

(γ) **(7 μονάδες)**

Δείξτε ότι για να περιγραφούν δύο χέρια χρειάζονται περίπου 78 bits. Δώστε έναν τρόπο περιγραφής με χρήση 78 bits.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όπως και πριν, θεωρούμε ακολουθία 52 συμβόλων, αυτή τη φορά με 3 πιθανές τιμές (1ο χέρι, 2ο χέρι, 3ο ή 4ο χέρι) και κατανομή $\{1/4, 1/4, 1/2\}$. Επομένως, οι τυπικές ακολουθίες είναι $\approx 2^{52H(1/4,1/4,1/2)} = 2^{52\cdot 1.5} = 2^{78}$ και χρειαζόμαστε ≈ 78 bits για να τις αναπαραστήσουμε.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα 2 πρώτα βήματα του 2ου τρόπου του προηγούμενου ερωτήματος.

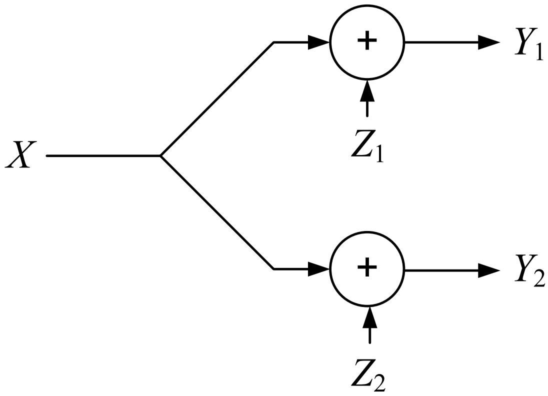
2. **Ένας πομπός, πολλοί δέκτες (30 μονάδες)**

Θεωρούμε έναν πομπό που μεταδίδει σε δύο δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σε κάθε δέκτη προστίθεται πραγματικός Γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και , $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Οι θόρυβοι είναι *ανεξάρτητοι* μεταξύ τους.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$.

(α) **(10 μονάδες)**

Αρχικά θεωρούμε ότι η ανίχνευση μπορεί να γίνει *από κοινού* (jointly) με χρήση των σημάτων και των δύο δεκτών. Δηλάδη οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, τα σήματά τους αποστέλλονται σε κάποιο κέντρο επεξεργασίας.



Σχήμα 1: Μετάδοση σε 2 δέκτες.

Αν επιβάλουμε περιορισμό μέσης ισχύος στον πομπό $\mathbb{E}\left[X^2\right] \leq P$ και $X \in \mathbb{R}$, βρείτε τη χωρητικότητα C_{joint} του καναλιού μεταξύ του πομπού και των δύο δεκτών, καθώς και την κατανομή της X με την οποία επιτυγχάνεται.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Παρόμοια με την περίπτωση Γκαουσιανού καναλιού με ένα δέκτη,

$$\begin{aligned} I(X;Y_1,Y_2) &= h(Y_1,Y_2) - h(Y_1,Y_2|X) \\ &\leq \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Y| - h(Z_1,Z_2) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Y| - \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Z|, \end{aligned}$$

όπου $K_Y = \mathbb{E}\left[[Y_1\ Y_2]^T \cdot [Y_1\ Y_2]\right]$ και $K_Z = \mathbb{E}\left[[Z_1\ Z_2]^T \cdot [Z_1\ Z_2]\right]$ οι πίνακες συνδιασποράς των (πραγματικών) τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$ και $\mathbf{Z} = [Z_1\ Z_2]^T$, αντίστοιχα.

Λόγω της ανεξαρτησίας των θορύβων, $K_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |K_Z| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2$.

$$\begin{aligned} K_Z &= \mathbb{E}\begin{bmatrix} Y_1^2 & Y_1Y_2 \\ Y_2Y_1 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left[X^2\right] + \sigma_1^2 & \mathbb{E}\left[X^2\right] \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] & \mathbb{E}\left[X^2\right] + \sigma_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ |K_Z| &= \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + \mathbb{E}\left[X^2\right](\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I(X;Y_1,Y_2) &\leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + \mathbb{E}\left[X^2\right](\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{\sigma_1^2} + \frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{\sigma_2^2}\right). \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν το $\mathbf{Y}$ είναι Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Επειδή το $\mathbf{Y}$ είναι γραμμική συνάρτηση της τ.μ. X, το $\mathbf{Y}$ είναι Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα όταν η X είναι Γκαουσιανή. Επίσης, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το όρισμα του λογαρίθμου, επιλέγουμε $\mathbb{E}\left[X^2\right] = P$.

Συνεπώς,

$$C_{\text{joint}} = \max I(X; Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\sigma_1^2} + \frac{P}{\sigma_2^2}\right).$$

Παρατηρήστε ότι κάθε κλάδος συμβάλλει με όρο $\frac{P}{\sigma_i^2}$. Δηλαδή, αν $\text{SNR}_i \triangleq \frac{P}{\sigma_i^2}$, $C_{\text{joint}} = \frac{1}{2}\log(1 + \text{SNR}_1 + \text{SNR}_2)$.

(β) **(7 μονάδες)**

Έστω ότι θέτουμε τον εξής περιορισμό στους δέκτες: Η αποκωδικοποιήση πρέπει να βασιστεί στο σήμα $\tilde{Y} = aY_1 + (1-a)Y_2$ με δεδομένο $0 \leq a \leq 1$. Δηλαδή, αντί να έχουμε απευθείας πρόσβαση στο σήμα κάθε δέκτη (δηλαδή στο διάνυσμα $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$), έχουμε πρόσβαση μόνο στο $\tilde{Y}$.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{lin-comb}}$, του καναλιού μεταξύ της X και της $\tilde{Y}$ για δεδομένο a.

Αλλάζει η απάντησή σας αν $\tilde{Y} = aY_1 + bY_2$ με $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = c > 1$, όπου c σταθερά;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$$\begin{aligned}
I(X;\tilde{Y}) &= h(\tilde{Y}) - h(\tilde{Y}|X) \\
&\leq \frac{1}{2}(2\pi e)\log\mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2\right] - \frac{1}{2}(2\pi e)\log\left(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi e)\log\left(\mathbb{E}\left[X^2\right] + a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) - \frac{1}{2}(2\pi e)\log\left(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Όπως και πριν, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται θέτοντας $X \sim \mathcal{N}(0, P)$, οπότε

$$C_{\text{lin-comb}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2}\right).$$

Η απάντηση δεν αλλάζει αν $a + b > c$. Θα έχουμε έναν όρο c^2 στον αριθμητή και έναν στον παρονομαστή οι οποίοι απαλοίφονται. Αυτό συμβαίνει γιατί ενισχύουμε το θόρυβο με το ίδιο κέρδος με το οποίο ενισχύουμε το χρήσιμο σήμα, οπότε ο SNR δεν αλλάζει (αν κάνετε τις πράξεις θα προκύψει ότι

$C_{\text{lin-comb}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\left(\frac{a}{c}\right)^2\sigma_1^2 + (1-\frac{a}{c})^2\sigma_2^2}\right)$).

(γ) **(8 μονάδες)**

Επιλέξτε την τιμή του $0 \leq a \leq 1$ που μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$ και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Σχολιάστε.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Λύνοντας την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial a}(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2) = 0$,

$$a^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1/\mathrm{SNR}_2}{1/\mathrm{SNR}_1 + 1/\mathrm{SNR}_2} = \frac{\mathrm{SNR}_1}{\mathrm{SNR}_1 + \mathrm{SNR}_2}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \le a^* \le 1$ και ότι $\frac{\partial^2}{\partial a^2}(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) > 0$. Επομένως, το a^* ελαχιστοποιεί τον παρονομαστή και, άρα, μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$.

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε και τα δύο Y_i, όχι μόνο το Y_1. Ωστόσο, δίνουμε μεγαλύτερο βάρος στο Y_1 που έχει μεγαλύτερο SNR.

$$\begin{aligned}
C^*_{\text{lin-comb}} &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^4 + \sigma_1^4\sigma_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\sigma_1^2} + \frac{P}{\sigma_2^2}\right) = C_{\text{joint}}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι μπορούμε να επιτύχουμε τη C_{joint} συνδυάζοντας με γραμμικό τρόπο τα Y_1 και Y_2. Δηλαδή το γεγονός ότι δεν έχουμε απευθείας πρόσβαση στα Y_i δεν ελαττώνει τη χωρητικότητα. Στη γενική περίπτωση καναλιών με πολλές εξόδους, αυτό δεν ισχύει.

(δ) **(5 μονάδες)**

Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, $C_{\text{separate}} = C_{\text{separate},1} + C_{\text{separate},2}$, που μπορούμε να πετύχουμε αν η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνει ξεχωριστά σε κάθε δέκτη, αν, δηλαδή, δεν επιτρέπεται συνεργασία (από κοινού αποκωδικοποίηση). Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα BC. Όπως είδαμε στις ασκήσεις, το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης επιτυγχάνεται όταν μεταδίδουμε μόνο στο χρήστη με το καλύτερο SNR. Επομένως,

$$C_{\text{separate}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\sigma_1^2}\right).$$

Η C_{separate} είναι μικρότερη από την C_{joint}. Αυτό είναι το τίμημα που πληρώνουμε επειδή δεν μπορούμε να προβούμε σε από κοινού αποκωδικοποίηση.

3. **Slepian-Wolf (25 μονάδες)**

Θεωρούμε δύο *δυαδικές* και *ανεξάρτητες* τ.μ. $Z_1 \sim \text{Bern}(1/2)$ και $Z_2 \sim \text{Bern}(1/2)$. Και οι δύο τ.μ. παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\}$.

(α) **(9 μονάδες)**

Θέλουμε να συμπιέσουμε *ανεξάρτητα* το άθροισμα $X = Z_1 + Z_2$ και τη διαφορά $Y = Z_1 - Z_2$ (*Προσοχή:* η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι στο $\mathbb{R}$).

Βρείτε την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης (Slepian-Wolf).

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος (R_X, R_Y) ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_X &> H(X|Y) \\ R_Y &> H(Y|X) \\ R_X + R_Y &> H(X, Y) \end{aligned}$$

Η X παίρνει τιμές 0, +1 και +2 με πιθανότητες 1/4, 1/2 και 1/4, αντίστοιχα. Επομένως, $H(X) = 1.5$ bits. Ομοίως, η Y παίρνει τιμές 0, +1 και −1 με πιθανότητες 1/2, 1/4 και 1/4, αντίστοιχα και $H(Y) = 1.5$ bits.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις $H(X|Y)$ και $H(Y|X)$ χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1.

Πιθανότητα	(Z_1, Z_2)	(X, Y)
$\frac{1}{4}$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$\frac{1}{4}$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$\frac{1}{4}$	$(0, 1)$	$(1, -1)$
$\frac{1}{4}$	$(1, 1)$	$(2, 0)$

Πίνακας 1: Πίνακας για υπολογισμό δεσμευμένων εντροπιών του Ερωτήματος (α).

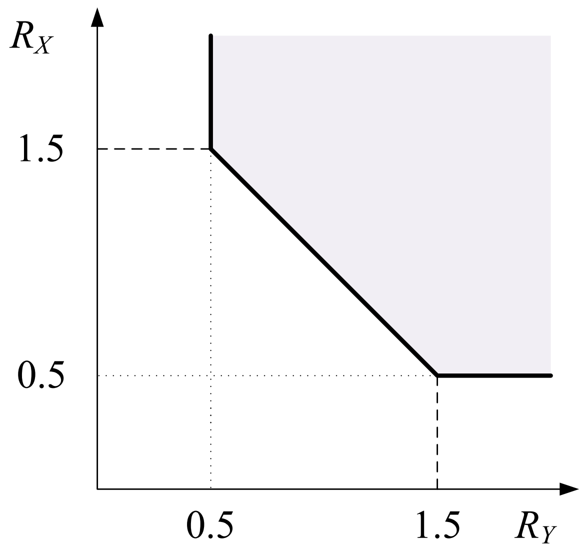
Επομένως, $H(X|Y) = \frac{1}{2}H(X|Y = 0) = \frac{1}{2}$ bits. Ομοίως, $H(Y|X) = \frac{1}{2}H(Y|X = 1) = \frac{1}{2}$ bits. Άρα, $H(X, Y) = 2$ bits.

Η περιοχή Slepian-Wolf σχεδιάζεται στο Σχήμα 2.

(β) **(9 μονάδες)**

Επαναλάβετε το 1ο ερώτημα αν οι Z_1 και Z_2 δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά έχουν από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας (p.m.f.) που δίνεται στον Πίνακα 2. Συγκρίνετε την περιοχή που προκύπτει με την περιοχή του Ερωτήματος (α).

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 2: Περιοχή Slepian-Wolf για το Ερώτημα (α).

	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 1$
$Z_1 = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Z_1 = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Πίνακας 2: Από κοινού κατανομή, $p_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2)$, των Z_1 και Z_2.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Σε αυτήν την περίπτωση, η X παίρνει τιμές 0, +1 και +2 με πιθανότητες 3/8, 1/4 και 3/8, αντίστοιχα. Επομένως, $H(X) \approx 1.5613$ bits. Η Y παίρνει τιμές 0, +1 και −1 με πιθανότητες 3/4, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα και $H(Y) = 1.0613$ bits.

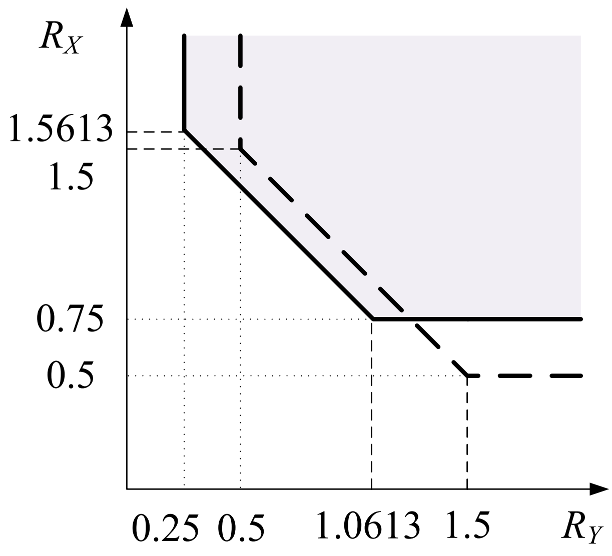
Τέλος, $H(X|Y) = \frac{3}{4}$ και $H(Y|X) = \frac{1}{4}$ (χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 3).

Επομένως, $H(X, Y) \approx 1.8113$ bits.

Πιθανότητα	(Z_1, Z_2)	(X, Y)
$\frac{3}{8}$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$\frac{1}{8}$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$\frac{1}{8}$	$(0, 1)$	$(1, -1)$
$\frac{3}{8}$	$(1, 1)$	$(2, 0)$

Πίνακας 3: Πίνακας για υπολογισμό δεσμευμένων εντροπιών του Ερωτήματος (γ).

Η περιοχή Slepian-Wolf σχεδιάζεται στο Σχήμα 3. Παρατηρούμε ότι, παρόλο που το άθροισμα $R_X + R_Y$ είναι μικρότερο σε σχέση με το Ερώτημα (α), η περιοχή δεν είναι υπερσύνολο της περιοχής του Ερωτήματος (α).



Σχήμα 3: Περιοχή Slepian-Wolf για το Ερώτημα (β).

(γ) **(7 μονάδες)**
Συγκρίνετε τις περιοχές των Ερωτημάτων (α) και (β) με την περίπτωση που κωδικοποιούμε (ανεξάρτητα) απευθείας τις Z_1 και Z_2 (αντί για τις X και Y).

Απάντηση:

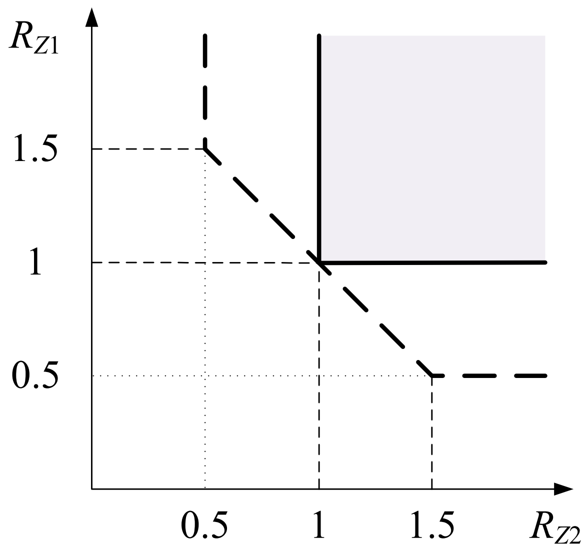
Για την περίπτωση όπου οι Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες, παρατηρούμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned} R_{Z_1} &> H(Z_1) = 1 \text{ bit} \\ R_{Z_2} &> H(Z_2) = 1 \text{ bit} \\ R_{Z_1} + R_{Z_2} &> H(Z_1, Z_2) = H(Z_1) + H(Z_2) = 2 \text{ bits} \end{aligned}$$

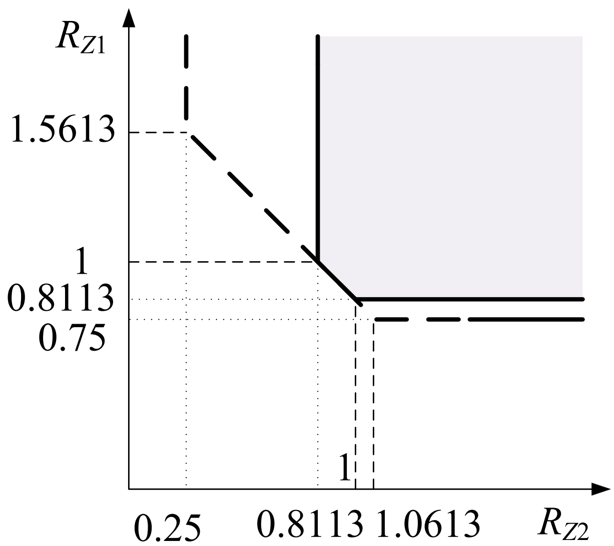
Η περιοχή Slepian-Wolf σχεδιάζεται στο Σχήμα 4 και συγκρίνεται με την περιοχή του Ερωτήματος (α). Παρατηρούμε ότι, λόγω της ανεξαρτησίας των Z_1 και Z_2, η περιοχή είναι μικρότερη. Ωστόσο, το ελάχιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, γιατί αν γνωρίζουμε τις Z_1 και Z_2 μπορούμε να βρούμε τις X και Y και αντιστρόφως.
Τέλος, για την κατανομή του Πίνακα 2,

$$\begin{aligned} R_{Z_1} &> H(Z_1|Z_2) = H(1/4) \approx 0.81 \text{ bits} \\ R_{Z_2} &> H(Z_2|Z_1) = H(1/4) \approx 0.81 \text{ bits} \\ R_{Z_1} + R_{Z_2} &> H(Z_1, Z_2) = H(Z_1) + H(Z_2|Z_1) = 1 + H(1/4) \approx 1.81 \text{ bits} \end{aligned}$$

Και σε αυτήν την περίπτωση, η περιοχή Slepian-Wolf που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5 είναι μικρότερη από την περιοχή του Ερωτήματος (β). Επίσης, η περιοχή είναι υπερσύνολο της περιοχής του Σχήματος 4. Και σε αυτήν την περίπτωση, το ελάχιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.



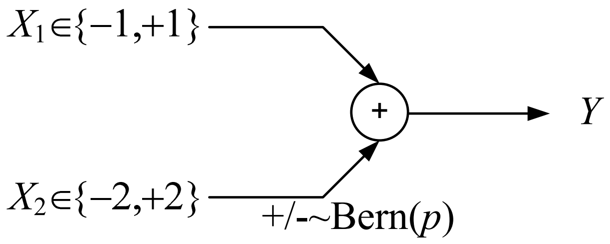
Σχήμα 4: Περιοχή Slepian-Wolf για το Ερώτημα (γ) για ανεξάρτητες Z_1 και Z_2.



Σχήμα 5: Περιοχή Slepian-Wolf για το Ερώτημα (γ) για εξαρτημένες Z_1 και Z_2.

4. **Υπέρθεση με τυχαία φάση (25 μονάδες)**

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχήματος 6. Οι τ.μ. X_1 και X_2 υπερτίθενται, οπότε προκύπτει η τ.μ. Y.



Σχήμα 6: Υπέρθεση τ.μ. με τυχαία φάση.

Η υπέρθεση γίνεται με τυχαία φάση 0 ή π. Πιο συγκεκριμένα, $Y = X_1 + X_2$ με πιθανότητα p, ενώ $Y = X_1 - X_2$ με πιθανότητα $1 - p$. Θεωρούμε ότι η τιμή της p είναι γνωστή.

Τέλος, $X_1 \in \{-1, +1\}$ και $X_2 \in \{-2, +2\}$.

(α) **(13 μονάδες)**

Βρείτε την περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$, καθώς και τις κατανομές των X_1 και X_2 με τις οποίες επιτυγχάνεται το όριο της $\mathcal{C}$.

Υπόδειξη: Για το συγκεκριμένο πρόβλημα ίσως είναι πιο εύκολο να γράψετε $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$ (αντί για $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$).

Απάντηση:

Από τις εξίσώσεις του MAC, για συγκεκριμένη $p(x_1)p(x_2)$,

$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1;Y|X_2) \\ R_2 &< I(X_2;Y|X_1) \\ R_1 + R_2 &< I(X_1,X_2;Y) \end{aligned}$$

• $I(X_1;Y|X_2) = H(X_1|X_2) - H(X_1|X_2,Y) = H(X_1) - H(X_1|X_2,Y)$, λόγω ανεξαρτησίας των X_1 και X_2.

Παρατηρήστε, τώρα, ότι, αν $X_1 = +1$, $Y = -1$ ή $+3$. Επίσης, αν $X_1 = -1$, $Y = -3$ ή $+1$. Επομένως, από την τιμή του Y μπορούμε να καταλάβουμε αν $X_1 = +1$ ή -1 και $I(X_1;Y|X_2) = H(X_1)$. Συνεπώς, $R_{1,\max} = 1$ bit και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \text{Bern}(1/2)$.

Το αποτέλεσμα είναι λογικό. Αν θέσουμε τη X_2 σε μία σταθερή τιμή, μπορούμε πάντα να βρούμε τη X_1 από την Y.

• $I(X_2;Y|X_1) = H(X_2|X_1) - H(X_2|X_1,Y) = H(X_2) - H(X_2|X_1,Y)$, λόγω ανεξαρτησίας των X_1 και X_2.

Με πιθανότητα p, $X_2 = Y - X_1$, ενώ, με πιθανότητα $1-p$, $X_2 = X_1 - Y$. Συνεπώς, $I(X_2;Y|X_1) = H(X_2) - H(p)$.

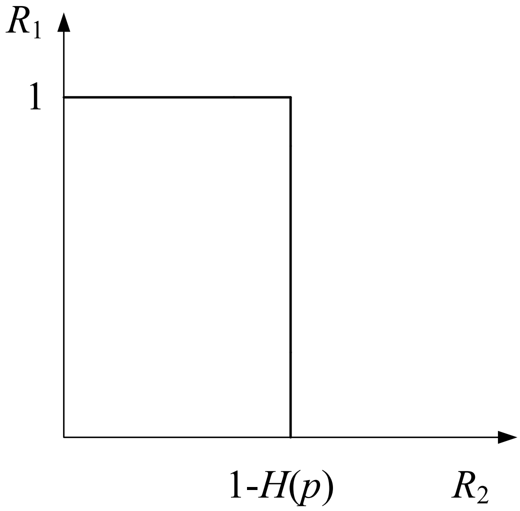
Επομένως, $R_{2,\max} = 1 - H(p)$ bits και επιτυγχάνεται με $X_2 \sim \text{Bern}(1/2)$.

• $I(X_1, X_2; Y) = H(X_1, X_2) - H(X_1, X_2|Y) = H(X_1) + H(X_2|X_1) - H(X_2|Y) - H(X_1|X_2, Y) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_2|Y)$.

Αν γνωρίζουμε το Y γνωρίζουμε και το X_1. Επομένως, με πιθανότητα p, $X_2 = Y - X_1$ και με πιθανότητα $1-p$, $X_2 = X_1 - Y$. Άρα, $H(X_2|Y) = H(p)$.

Συνεπώς, το άθροισμα $R_1 + R_2$ μεγιστοποιείται για $X_1 \sim \text{Bern}(1/2)$ και $X_2 \sim \text{Bern}(1/2)$ και $\max\{R_1 + R_2\} = 2 - H(p)$ bits.

Επομένως, το όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται όταν τόσο η X_1 όσο και η X_2 ακολουθούν κατανομή Bern(1/2). Η περιοχή χωρητικότητας έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 7. Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να πετύχει κάθε χρήστης δεν εξαρτάται από το ρυθμό μετάδοσης του άλλου χρήστη.



Σχήμα 7: Περιοχή χωρητικότητας.

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να δούμε το MAC ως 2 παράλληλα κανάλια που δεν επηρεάζουν το ένα το άλλο. Το ένα κανάλι είναι ένα ταυτοτικό δυαδικό κανάλι (από τη X_1 στη X_1). Το άλλο κανάλι είναι ένα BSC από τη X_2 σε μία τ.μ. X_2'. Η Y είναι συνάρτηση 1-προς-1 των X_1 και X_2'. Για το λόγο αυτό η περιοχή χωρητικότητας είναι ορθογώνια.

(β) **(4 μονάδες)**

Τι συμβαίνει όταν $p = 1/2$; Μπορούμε να περάσουμε πληροφορία στο κανάλι;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όταν $p = 1/2$ μόνο ο χρήστης 1 μπορεί να περάσει πληροφορία στο κανάλι (1 bit).

(γ) **(4 μονάδες)**

Μπορούμε να περάσουμε πληροφορία στο κανάλι αν δε γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου p;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Ναι, ο χρήστης 1 μπορεί να περάσει 1 bit.

(δ) **(4 μονάδες)**

Μπορούμε να αυξήσουμε το μέγιστο επιτεύξιμο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ (sum capacity) αν επιτρέπεται να συνεργαστούν οι δύο πηγές;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Όχι. $\max\{R_1 + R_2\} = \max I(X_1, X_2; Y) = 2 - H(p)$.